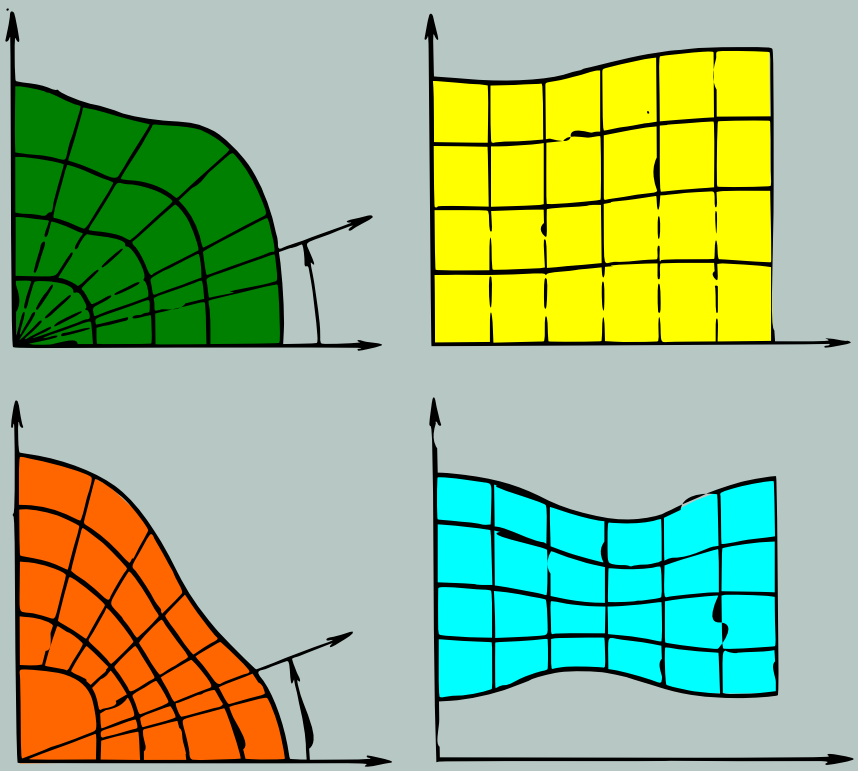
S. Godounov, A. Zabrodine,
M. Ivanov, A. Kraïko, G. Prokopov

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES PROBLÈMES MULTIDIMENSIONNELS DE LA DYNAMIQUE DES GAZ



Éditions Mir Moscou

С. К. ГОДУНОВ, А. В. ЗАБРОДИН, М. Я. ИВАНОВ,
А. Н. КРАЙКО, Г. П. ПРОКОПОВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Под редакцией С. К. ГОДУНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

S. GODOUNOV, A. ZABRODINE,
M. IVANOV, A. KRAÏKO, G. PROKOPOV

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES PROBLÈMES MULTIDIMENSIONNELS DE LA DYNAMIQUE DES GAZ

Sous la rédaction de S. GODOUNOV

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par VALÉRI PLATONOV

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976
© Traduction française Editions Mir • 1979

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 13

Liste des notations principales 18

Partie première. Bases théoriques de la méthode . . . .

Chapitre premier. CONSTRUCTION DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES LINÉAIRES 19

§ 1. Acoustique unidimensionnelle 19
Equations d'acoustique à une variable spatiale. Lois de conservation. Formules de la solution générale et d'une solution à données initiales. Problème de décomposition d'une discontinuité.

§ 2. Schéma aux différences finies 24
Approximation constante par morceaux des données initiales. Construction de la solution à l'aide des décompositions de discontinuités. Mise en moyenne et lois de conservation. Formules aux différences. Construction du même schéma à partir des relations sur les caractéristiques.

§ 3. Approximation et stabilité du schéma 29
Vérification de l'approximation du schéma sans conditions aux limites. Analyse de stabilité par méthode de Fourier. Inégalité énergétique. Déduction de la condition de stabilité pour un domaine illimité.

§ 4. Applications numériques 36
Instabilité du schéma pour le nombre de Courant $\nu > 1$. Etalement des discontinuités pour $\nu < 1$. Viscosité aux différences. Estimation de la zone d'étalement. Monotonie du schéma. Caractère régulier de l'étalement par rapport aux oscillations dans le schéma du second ordre.

§ 5. Schéma pour un problème mixte 44
Formulation des conditions aux limites. Décomposition aux limites d'une discontinuité. Modification du schéma dans le cas du problème mixte. Les conditions aux limites dissipatives assurent la stabilité.

§ 6. Analyse de la précision du schéma sur les frontières 48
Construction de la solution du problème aux différences dans

le cas de données initiales linéaires et de conditions aux limites linéaires. Justification du premier ordre de précision du schéma avec les conditions aux limites. Effet aux différences à la frontière de contact. Justification de la précision du schéma à la frontière de contact.

§ 7. Acoustique bidimensionnelle 58
Equations des ondes sonores dépendant de deux variables spatiales. Quadrillage aux différences. Lois de conservation aux différences. Calcul des grandeurs auxiliaires (« grandes ») à l'aide des décompositions de discontinuité. Formulation des conditions aux limites. Calcul des « grandes » valeurs aux frontières.

§ 8. Stabilité du schéma bidimensionnel de l'acoustique 64
Loi de conservation de l'énergie. Norme discrète des fonctions. Factorisation d'un schéma bidimensionnel en ceux « unidimensionnels ». Condition suffisante de stabilité du schéma en norme énergétique pour les conditions aux limites dissipatives. Démonstration de sa nécessité par la méthode de Fourier.

§ 9. Schéma unidimensionnel explicite pour un système hyperbolique quelconque 70
Systèmes symétriques. Intégrale de l'énergie. Réduction du système à la forme canonique. Schéma aux différences. L'inégalité principale est un analogue aux différences de l'intégrale de l'énergie. Condition de stabilité. Formulation correcte des conditions aux limites. Les conditions aux limites dissipatives garantissent la stabilité du schéma pour un pas suffisamment petit. Construction du schéma pour un système hyperbolique asymétrique. Modification du schéma au cas des coefficients variables.

§ 10. Schéma bidimensionnel explicite pour un système hyperbolique quelconque 79
Position d'un problème mixte avec les conditions aux limites dissipatives. Schéma aux différences sur un quadrillage. L'inégalité fondamentale est un analogue de l'intégrale d'énergie. Condition suffisante de stabilité d'un schéma sans conditions aux limites et avec les conditions aux limites dissipatives. Condition de stabilité pour un maillage parallélogrammatique. Equations bidimensionnelles de la théorie de l'élasticité linéaire.

§ 11. Schémas aux différences implicites 91
Construction générale des schémas implicites fondés sur les lois de conservation intégrales (méthode de prédiction-correction). Schéma implicite pour une équation modèle la plus simple. Analyse de la stabilité par la méthode de Fourier. Moyennage de lissage. Réalisation des conditions aux limites. Généralisation du schéma au système d'équations à une variable spatiale. Balayage comme méthode de résolution des équations sur la couche intermédiaire. Généralisation du schéma au cas de deux variables spatiales.

Chapitre II. SYSTÈMES HYPERBOLIQUES QUASI LINÉAIRES À DEUX VARIABLES 104

§ 12. Dynamique des gaz instationnaire unidimensionnelle . . . 104
Système d'équations instationnaires de la dynamique des gaz à une variable spatiale. Equation d'état. Lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Relations

aux discontinuités. Loi de conservation de l'entropie sur les solutions lisses et d'accroissement sur les ondes de choc. Conditions de Bethe-Weyl pour l'équation d'état. Notion de solution généralisée.

§ 13. Le problème de la décomposition de discontinuité 109
Position du problème. Description schématique des configurations possibles. Réduction à l'équation algébrique pour la pression sur la discontinuité de contact. Méthode d'itération pour sa solution. Propriétés de l'équation et application de la méthode des tangentes de Newton. Calcul des grandeurs décrivant la configuration engendrée par décomposition de discontinuité. Exemple d'une solution non univoque du problème de la décomposition de discontinuité abstraction faite de la loi d'accroissement d'entropie.

§ 14. Schéma pour les problèmes unidimensionnels de la dynamique des gaz 121
Description générale du schéma. Lois de conservation aux différences dans le cas de la géométrie « plane ». Utilisation des maillages flottants et modification correspondante du schéma aux différences. Géométrie à symétrie axiale, forme différentielle et forme aux différences des lois de conservation. Equations de la dynamique des gaz sous forme d'approximation quasi unidimensionnelle.

§ 15. Conditions aux limites pour les problèmes unidimensionnels 128
Le système d'équations aux différences nécessite que soient donnés le flux massique, les flux d'impulsion et d'énergie à travers les frontières. Modification du problème de la décomposition de discontinuité en tant que mode de réalisation des conditions aux limites en cas de : 1° paroi imperméable, 2° onde de choc extérieure, 3° frontière libre. Réalisation des conditions aux limites en régime supersonique en amont (4°) ou en aval (5°) du flux gazeux. Organisation du calcul sur les frontières internes entre les domaines de calcul.

§ 16. Approximation et stabilité du schéma unidimensionnel . . 133
Modèle linéarisé des équations instationnaires de la gazodynamique unidimensionnelle et du schéma aux différences. Décomposition « sonore » de la discontinuité. Condition de stabilité du modèle linéarisé du schéma sans conditions aux limites. Généralisation du critère de stabilité au schéma non linéaire. Approximation des équations linéarisées. Viscosité aux différences.

§ 17. Illustration du schéma unidimensionnel pour les problèmes instationnaires 139
Calcul de l'interaction des ondes de choc engendrées par décomposition de discontinuité et par réflexion sur la paroi rigide. Structure de la solution exacte. Résultats d'un calcul grossier avec « étalement » des discontinuités. Description de la tactique du calcul utilisant la particularisation des certaines des discontinuités.

§ 18. Ecoulements supersoniques stationnaires bidimensionnels 145
Equations de l'écoulement supersonique stationnaire sous forme des lois de conservation intégrales. Condition de constance de l'enthalpie totale. Lois de conservation sous forme de différences finies. Formules pour les grandeurs gazodynamiques. Calcul aux frontières du domaine. Critère de stabilité du schéma.

§ 19. Problème de deux flux supersoniques uniformes confluents 152
Divers schémas de confluence. Formules approchées pour

les flux confluents à paramètres peu différents. Formules valables pour le calcul de confluence dans le cas des ondes de détente intenses.

§ 20. Exemples illustrant la précision du schéma stationnaire 158
Calcul du choc de compression oblique et de l'onde de détente centrée. Ecoulement dans une tuyère de Laval à symétrie axiale et jet sous-détendu supersonique débouchant dans une atmosphère.

§ 21. Schéma unidimensionnel implicite pour les problèmes quasi linéaires 164
Lois de conservation intégrales et équations quasi linéaires. Description générale du schéma prédicteur-correcteur. Système d'équations implicites dans la couche intermédiaire. Réalisation des conditions aux limites. Calcul explicité aux frontières des domaines de calcul. Rôle de la mobilité du réseau.

Chapitre III. CONSTRUCTION DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES MULTIDIMENSIONNELS 173

§ 22. Lois de conservation et équations de la dynamique des gaz 173
Forme intégrale des lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans la mécanique des milieux continus. Equations différentielles associées. Relations sur les discontinuités. Les différentes formes des équations de la dynamique des gaz instationnaire en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Symétrisation des équations de la physique mathématique, notamment de celles de la dynamique des gaz. Loi de conservation complémentaire pour les systèmes symétriques d'équations.

§ 23. Les maillages flottants et les méthodes les plus simples permettant de les construire 181
Discrétisation du problème et schéma général du calcul. Le maillage le plus simple avec frontières se mouvant suivant les rayons immobiles. Disposition des nœuds du maillage le long des rayons. Calcul du maillage dans le domaine à frontières curvilignes par formules d'interpolation.

§ 24. Formules de calcul d'un schéma pour les problèmes bidimensionnels instationnaires 189
Lois de conservation aux différences pour un maillage quelconque. Calcul des flux à travers les faces latérales d'une maille. Procédure de calcul sur les frontières extérieures du domaine. Mouvement des frontières extérieures. Modifications dans le schéma pour les problèmes de révolution.

§ 25. Stabilité et choix du pas en temps 198
Schéma de calcul des problèmes instationnaires bidimensionnels de dynamique des gaz sur un quadrillage. Modèle linéarisé des équations instationnaires de la dynamique des gaz. Critère de stabilité du modèle linéarisé. Son application aux problèmes quasi linéaires de la dynamique des gaz instationnaire bidimensionnelle. Modèles linéarisés pour un problème stationnaire à deux et trois variables. Critères de stabilité des schémas aux différences pour les écoulements stationnaires supersoniques.

§ 26. Schéma pour écoulements stationnaires spatiaux supersoniques 206
Construction du maillage aux différences. Lois de conservation aux différences. Détermination des « grandes » valeurs des problèmes de deux flux confluents. Critère de stabilité du schéma.
§ 27. Schéma pour écoulements spatiaux instationnaires 212
Maillage spatial immobile. La forme discrète des lois de conservation. Condition de stabilité du schéma.

Chapitre IV. RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE DES GAZ EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES 216

§ 28. Formalisation des modes de description de la figure de l'écoulement calculé 216
Utilisation de l'information *a priori* sur la solution lors de la mise en œuvre de l'algorithme de calcul. Liaison du système de coordonnées curvilignes avec la configuration des singularités de la solution. Formalisation de la description de la figure de l'écoulement au moyen des notions: domaine de calcul, frontière de calcul, image du domaine de calcul, image de frontière de calcul.
§ 29. Système de coordonnées instationnaire suivant le mouvement des frontières. Choix des variables 218
Système de coordonnées curvilignes local. Choix des fonctions inconnues pour la description du mouvement et des paramètres donnant un système de coordonnées curvilignes local.
§ 30. Equations de la dynamique des gaz sous forme des lois de conservation pour un système de coordonnées curvilignes 221
Construction du système d'équations intégrales de la dynamique des gaz dans une base locale.
§ 31. Calcul des coordonnées des points frontières au cours du mouvement 227
Mode de définition de la position des frontières de calcul et des grandeurs hydrodynamiques associées pour le pas en temps donné. Construction de l'algorithme du mouvement des frontières de calcul et détermination de leur position pour le pas en temps suivant.
§ 32. Equations pour la construction des maillages 232
Formalisation mathématique du problème de la construction d'un maillage aux différences. Algorithme I utilisant les équations « inverses » de Laplace. Augmentation de son efficacité par l'introduction des paramètres variables. Application des représentations conformes et quasi conformes (algorithme II). Construction de maillages voisins de maillages orthogonaux (algorithme III).
§ 33. Réalisation numérique des algorithmes de construction des maillages 240
Equations aux différences ayant lieu lors de la résolution numérique des systèmes d'équations répondant aux algorithmes I et II. Les procédures itératives les plus simples pour leur résolution. Réalisation numérique de l'algorithme III par la méthode des directions alternées. Optimisation des paramètres itératifs. Exemples illustrant les algorithmes de construction des maillages.

§ 34. Système d'équations aux différences pour les problèmes instationnaires de la dynamique des gaz dans un système de coordonnées curviligne local 257
Construction dans l'espace x, y, t d'un volume élémentaire V. Substitution dans le système d'équations intégrales de la dynamique des gaz écrit dans une base locale au domaine d'intégration arbitraire du volume élémentaire V. Discrétisation des relations intégrales obtenues et construction du système d'équations aux différences.

§ 35. Calcul des grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire 278
Obtention des schémas explicite et implicite selon la technique de calcul des grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire. Interprétation d'une décomposition de discontinuité plane dans le cas où deux états d'un gaz sont séparés par une frontière curviligne. Schéma implicite. Construction, sur la base d'un système d'équations en coordonnées curvilignes locales, de deux systèmes dont chacun dépend d'une coordonnée spatiale. Linéarisation de ces systèmes et leur utilisation pour la construction d'un schéma aux différences implicite.

§ 36. Quelques remarques sur les principes de la mise en œuvre de la technique 284
Exigences concernant l'algorithme aux différences, formulées à partir de l'application expérimentale de la méthode. Approches et tactique de la résolution des problèmes.

Partie deuxième. Illustration des possibilités de la méthode 290

Chapitre V. PROBLÈMES INSTATIONNAIRES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ 291

§ 37. Diffraction d'une onde de choc par un corps bidimensionnel 291
Diffraction d'une onde de choc plane (avec, en aval, un écoulement super- et subsonique) par un profil en losange, par un cylindre perpendiculaire au plan d'écoulement et par une sphère. Evolution de l'écoulement dans le temps et établissement d'une figure d'écoulement stationnaire.

§ 38. Interaction d'une explosion sphérique avec une surface plane 295
Ecoulement spatial résultant de l'interaction avec un plan d'un flux à symétrie sphérique engendré par une explosion ponctuelle. Evolution de la réflexion d'une onde de choc — de la réflexion régulière à la réflexion irrégulière (« de Mach »).

§ 39. Explosion d'une charge non sphérique 297
Idéalisation du problème consistant à remplacer la région du dégagement de l'énergie d'explosion par une région de gaz au repos ayant une pression élevée. Utilisation d'un maillage aux différences flottant particularisant l'onde de choc de tête et la surface de contact. Formation d'une onde de choc secondaire. Influence de la forme de la charge.

§ 40. Quelques problèmes de la dynamique des écoulements instationnaires dans les canaux 302
Ecoulement dans un tube à choc de section variable. Evolu-

tion de l'écoulement dans la manche d'entrée d'air, qui est supersonique en amont, avec un choc de compression « terminal » au voisinage du col géométrique et subsonique en aval pour des paramètres variables dans les sections d'entrée ou de sortie. Processus dynamiques dans les canaux munis de parois longitudinales. Réflexion des ondes planes sur les tranches sub- et transsonique de la tuyère de Laval.

§ 41. Propagation d'une onde de choc au sein d'un gaz conducteur dans un tube circulaire en présence d'un champ magnétique méridien 313
Utilisation d'un maillage flottant lié à l'onde de choc. Effet d'accélération de l'onde de choc dû au caractère bidimensionnel de l'écoulement. Confrontation avec les conclusions de l'approximation unidimensionnelle.

§ 42. Calcul de la collision des plaques métalliques (soudage par explosion) 317
Enoncé du problème. Choix de la tactique du calcul. Analyse des résultats obtenus.

Chapitre VI. CALCUL DES ÉCOULEMENTS MIXTES PAR LA MÉTHODE D'ÉTABLISSEMENT 332

§ 43. Problème direct de la théorie des tuyères de Laval bidimensionnelles 323
Formulation du problème pour une tuyère prolongée en amont par un tube cylindrique semi-infini et pour une tuyère à contour « fermé ». Ecoulement dans les tuyères de types variés (tuyère de Laval classique et tuyère avec un corps central). Calcul d'un écoulement rotationnel et non isentropique dans les tuyères et influence des effets de la rotation et de la variabilité de l'entropie sur la forme de la ligne sonique. Résolution du problème direct de l'écoulement d'un gaz conducteur dans une tuyère de Laval à symétrie axiale en présence d'un champ magnétique méridien.

§ 44. Écoulements mixtes dans les grilles planes 329
Etablissement de l'aspect stationnaire de l'écoulement avec la fuite de flux du bord aval sans application au calcul de la condition de Tchaplyguine-Joukovski. Application des maillages curvilignes.

§ 45. Jet surdétendu débouchant dans une atmosphère 334
Cas de la réflexion irrégulière du choc partant du bord de la tuyère avec formation du « disque de Mach ». Emploi d'un maillage aux différences « semi-mobile ». Comparaison des résultats obtenus avec différents nombres de mailles de calcul, confrontation avec les résultats expérimentaux.

§ 46. Action « normale » du jet supersonique sur une paroi 337
Les différents schémas d'écoulement. Réseau flottant particularisant la frontière du jet. Exemples de calcul.

§ 47. Ecoulement autour des profils plans et des profils à symétrie axiale 340
Ecoulement autour d'un cylindre circulaire placé normalement au plan d'écoulement et autour de l'assemblage cône-cylindre d'un flux uniforme supersonique avec formation de zones subsoniques locales. Ecoulement au voisinage des profils plans pour vitesse supercritique du flux incident. Quelques résultats du calcul de l'écoulement sonique autour des corps. Calcul de l'écoulement transsonique autour des corps à symétrie axiale du type fuseau de réacteur.

§ 48. Ecoulement transsonique spatial autour des corps 346
Ecoulement sonique à un angle d'attaque autour d'un corps pointu de section droite elliptique. Ecoulements transsonique et sonique autour d'un cône raccordé à un cylindre placé à un angle d'attaque dans le flux.
§ 49. Problème direct de la théorie de la tuyère de Laval spatiale 348
Tuyères spatiales à un et à deux plans de symétrie. Comparaison entre les résultats du calcul de l'écoulement transsonique dans les tuyères de section droite en ellipse pour différents rapports des demi-axes. Asymétrie du flux due à l'asymétrie de la forme de la tuyère.

Chapitre VII. ÉCOULEMENTS SUPERSONIQUES STATIONNAIRES 355

§ 50. Ecoulements plans et écoulements à symétrie axiale d'un gaz parfait 355
Jets sous-détendus à taux de détente élevés débouchant dans une atmosphère lorsqu'en contournant le bord de la tuyère une partie de jet s'écoule dans un sens quasi opposé à son sens initial. Jets annulaires et jets en éventail. Exemples de calcul de l'écoulement dans les entrées d'air planes.
§ 51. Ecoulement dans la partie divergente des tuyères spatiales 365
Ecoulement dans la partie divergente des tuyères de section droite elliptique et quasi carrée. Ecoulement spatial dans la partie divergente de la tuyère à symétrie axiale dû à la dissymétrie de l'écoulement dans la section initiale.
§ 52. Ecoulement des jets sous-détendus des tuyères de section de sortie non circulaire 370
Ecoulement d'un jet supersonique en cas de tuyères de section de sortie elliptique et quasi carrée. Effet de variation de l'orientation du « grand axe » de la section droite du jet avec l'éloignement à l'aval de la section de sortie de la tuyère.
§ 53. Confluence latérale des jets supersoniques à symétrie axiale et interaction latérale entre ces jets et les parois solides . . 375
Incidence des jets sous-détendus à symétrie axiale sur les plans parallèles et non parallèles à l'axe de la tuyère. Confluence des jets identiques « parallèles » s'écoulant des tuyères dont les axes sont contenus dans un même plan. Interaction latérale d'un jet avec une surface cylindrique parallèle à l'axe de la tuyère.
§ 54. Ecoulement autour des corps coniques 384
Emploi du processus d'établissement en variable r du système de coordonnées sphériques. Exemples du calcul de l'écoulement autour des cônes circulaire, elliptique et quasi pyramidal, des ailes delta et des ailes en V et d'un cône circulaire raccordé à l'aile delta.
§ 55. Ecoulement supersonique autour des configurations spatiales pointues 396
Examen comparatif des corps spatiaux équivalents. Ecoulement autour d'un corps de type aéronef.

Conclusion 399
Bibliographie 403
Index 412

AVANT-PROPOS

La présente monographie traite de la base théorique d'une méthode effective d'intégration numérique des systèmes d'équations quasi linéaires aux dérivées partielles du type hyperbolique et illustre l'application de cette méthode à la résolution d'un bon nombre de problèmes portant sur la dynamique des gaz instationnaire, sur l'aérodynamique externe et interne ainsi que sur certains autres domaines de la mécanique des milieux continus.

La méthode que l'on se propose de décrire ici repose sur les idées exposées pour la première fois dans les publications datant de 1957 à 1961 [28], [5], [29], [35]. Ces idées sont au nombre de deux, à notre avis. La première idée consiste dans l'utilisation pour la construction d'un schéma aux différences des solutions exactes des équations avec les données initiales constantes par morceaux. Pour un système hyperbolique ces solutions se décomposent en des ensembles de détails indépendants et relativement simples à calculer, « décompositions de discontinuités ». La seconde idée consiste dans l'utilisation de maillages aux différences déformables, souples, souvent mobiles, maillages liés aux frontières de contact des domaines, aux ondes de choc et à toutes les autres lignes semblables isolées au départ d'un calcul. Les mailles de maillage ne sont généralement pas rattachées aux éléments mobiles du milieu.

L emploi de ces maillages souples impose à un schéma aux différences des exigences très précises. De longues années d'expérience ont montré qu'un schéma de « décompositions de discontinuités » y satisfait.

Ce livre met l'accent moins sur un schéma aux différences que sur la structure même du processus d'intégration des problèmes complexes.

Ces principes de construction d'un algorithme de calcul se sont montrés féconds et sont devenus d'un usage répandu surtout les 5 ou 6 dernières années), ils ont été généralisés à des systèmes hyperboliques différents de ceux de départ. Un grand nombre d'articles ont été consacrés dans divers périodiques à leur modernisation et à leur perfectionnement. Cette méthode présente l'avantage essentiel

d'être applicable aux calculs des processus d'établissement. L'emploi de l'établissement permet de résoudre des problèmes mixtes (elliptico-hyperboliques) d'écoulements transsoniques.

La méthode attire l'attention d'un nombre toujours croissant de spécialistes qui sont obligés de se familiariser avec ces principes d'après des publications fragmentaires, voire souvent vieillies, ce qui complique évidemment la mise en œuvre des recherches correspondantes ou nuit à leur qualité.

Le fait que pendant plus de 20 ans, depuis sa création, la méthode ait été éprouvée sur un grand nombre de problèmes qui ont été résolus grâce à elle, problèmes qui présentaient en outre un intérêt tout particulier, justifie, semble-t-il, la publication de cette monographie.

Les auteurs de la monographie ou bien sont les créateurs de la méthode ou bien ils ont beaucoup contribué à son développement et son application.

Le livre est divisé en deux parties. La première partie comportant quatre chapitres traite de la base théorique de la méthode.

Le premier chapitre est consacré à la description des principes de construction des schémas que nous employons pour les systèmes modèles hyperboliques symétriques. On y traite de l'approximation, des conditions de stabilité et de leur interprétation physique, de la position des conditions aux limites. Nous nous bornons uniquement au cas des conditions aux limites dissipatives dont la théorie est la plus claire.

Dans le chapitre II consacré aux systèmes hyperboliques quasi linéaires à deux variables indépendantes on procède à la construction du schéma de calcul sur l'exemple des équations de la dynamique des gaz instationnaire unidimensionnelle et de celles des écoulements supersoniques stationnaires bidimensionnels. On y montre qu'il est possible, en s'appuyant sur l'analyse des problèmes modèles linéaires, de se représenter les propriétés du schéma de calcul dans un cas plus général.

La généralisation des principes de la méthode se caractérise par la tendance à l'accroissement du nombre de variables indépendantes. Le chapitre III y est consacré (écoulements supersoniques bi- et tridimensionnels, stationnaires et instationnaires).

Le chapitre IV traite des questions liées à l'intégration des problèmes gazodynamiques en coordonnées curvilignes arbitraires à l'aide de maillages flottants. On y trouve certains algorithmes de construction des maillages au cas des domaines de calcul compliqués, des systèmes d'équations en coordonnées curvilignes et des schémas de calcul s'adaptant aux problèmes concrets et aux particularités de ces derniers.

La seconde partie du livre comprenant trois chapitres illustre les possibilités de la méthode sur l'exemple de la résolution de

plusieurs problèmes relevant de la gazodynamique bi- et tridimensionnelle, stationnaire et instationnaire.

Parmi les exemples des problèmes gazodynamiques instationnaires traités au chapitre V citons les exemples suivants: diffraction d'une onde de choc par des obstacles, explosion d'une charge non sphérique, interaction d'une explosion sphérique avec un plan, propagation d'une onde de choc au sein d'un gaz conducteur dans un tube rond en présence d'un champ magnétique méridien, dynamique de l'écoulement du gaz dans des canaux, réflexion des ondes planes sur la tranche subsonique d'une tuyère de Laval ainsi que le problème du « soudage par explosion» résolu dans l'approximation hydrodynamique.

Les possibilités de résolution des problèmes mixtes (à l'aide de la méthode d'établissement) envisagées dans le chapitre VI seront illustrées par les résultats du calcul du problème direct de la théorie de la tuyère de Laval dans le cas bidimensionnel et spatial de calcul des écoulements mixtes dans les grilles planes, par ceux des problèmes d'écoulement de jet sous- et surdétendu contenant le disque de Mach, d'interaction d'un jet supersonique avec une paroi ainsi que par un vaste ensemble de problèmes bi- et tridimensionnels d'écoulements transsonique, sonique et supersonique autour des obstacles.

Les exemples du calcul des écoulements stationnaires purement supersoniques, objet du chapitre VII, portent sur les écoulements dans des tuyères et jets spatiaux, les divers écoulements autour des obstacles pointus, coniques et spatiaux, ainsi que sur la confluence latérale des jets supersoniques et interaction de ceux-ci avec les parois de formes variées.

Nous avons donné à notre description la forme d'un aperçu en cherchant à souligner la souplesse de la technique exposée et sa capacité à s'adapter aux diverses conditions concrètes. En pratique la résolution d'un problème concret d'un type nouveau quelconque se compose souvent de plusieurs, voire de dizaines, calculs mettant en jeu diverses lois de répartition et différents nombres de points, diverses partitions en domaines de calcul. Cela étant fait, les problèmes de type semblable sont résolus quasi automatiquement. Faute de pouvoir décrire tous les détails de cette étude nous avons présenté les résultats et les techniques de résolution des problèmes les plus courants.

Il découle de cet aperçu de l'ouvrage que nous ne nous sommes pas donné pour but de décrire et de faire une étude comparative des diverses techniques et des schémas aux différences des calculs gazodynamiques mais nous avons seulement voulu rassembler et, dans une seule étude, faire le point de l'état actuel d'une méthode unique que nous avons élaborée et appliquée à la solution de multiples problèmes.

Les différentes parties du livre ont été écrites par différents auteurs. Les §§ 1 à 12 ont été écrits par S. Godounov et G. Prokopov, les §§ 13 à 17, 21 à 25 et 32, 33 par G. Prokopov, les §§ 28 à 31, 34 à 36, 42 par A. Zabrodine; M. Ivanov et A. Kraïko ont écrit les §§ 18 à 20, 26, 27 de la première partie du livre et la seconde partie de celui-ci (sauf § 42). De là le caractère particulier de l'exposé. Il est à noter que dans notre bilan, les résultats d'un travail de longues années ont permis aux auteurs de revoir sous un jour nouveau certains aspects d'une matière apparemment bien connue jusqu'alors.

Les sujets ne sont pas tous exposés de la même manière. Ainsi, les principes de construction des maillages curvilignes et flottants sont décrits fort sommairement. La raison en est que si longue que soit l'élaboration de ce thème, les auteurs n'ont pas encore abouti à une opinion définitive sur les principes de base de la mise au point des techniques de calcul, et les méthodes de construction des maillages en usage, malgré leur multitude, ont un caractère souvent opérationnel de sorte qu'on ne peut pas les recommander. A notre avis, cette circonstance que nous avons soulignée à dessein devrait inciter les jeunes scientifiques à résoudre les problèmes soulevés et à perfectionner la méthode.

Nous supposons connues du lecteur la théorie des équations différentielles hyperboliques, par exemple d'après le livre [130], et la théorie des schémas aux différences en volume du dernier chapitre du livre [130] et du livre [133].

On suppose également que le lecteur a pris connaissance de la dynamique des gaz dans l'un des manuels classiques, par exemple [137], quoique tous les faits principaux (ou presque tous) servant de base sont exposés dans la monographie.

Conscients du caractère restreint de la monographie qui ne décrit l'état actuel que d'une seule méthode parmi le grand nombre de méthodes de calcul gazodynamique en usage, les auteurs ne veulent en aucune façon que le présent livre serve d'un manuel des méthodes numériques de la dynamique des gaz. Le lecteur désireux d'en prendre connaissance doit s'adresser à une vaste littérature. En ce qui concerne les algorithmes d'ordre de précision plus élevé pour les problèmes relatifs à l'étude des écoulements gazodynamiques stationnaires, signalons tout particulièrement la méthode exposée dans la monographie [4]. L'ouvrage [86] contient une riche bibliographie sur le problème de l'écoulement autour des corps émoussés. On peut se faire une idée assez nette des multiples méthodes utilisées dans la résolution des problèmes de dynamique des gaz en s'adressant aux ouvrages cités dans la bibliographie (voir par exemple [7], [27], [51], [109], [113], [114], [154], etc.

Lors de l'élaboration et de la mise au point de la méthode nous avons été assistés par nos maîtres, camarades, disciples et collabora-

teurs. Nous nous sommes efforcés de souligner leur rôle tout au long de l'exposé ou dans les références correspondantes.

Tout le travail de l'élaboration des variantes tant unidimensionnelle que bidimensionnelle de la méthode était mené sous le patronage et avec la participation de M. Keldych. Au cours de ses séminaires on a discuté les détails des résultats relatifs aux étapes successives du travail. La généralisation de la méthode aux écoulements stationnaires ainsi que la majeure partie de résultats composant la seconde partie du livre ont été discutées au cours des séminaires dirigés par G. Tcherny, dont l'influence a été déterminante dans l'orientation des études entreprises.

Les auteurs espèrent que la monographie présente un intérêt pour un vaste public de chercheurs, d'étudiants et de stagiaires du troisième cycle se spécialisant dans le domaine des méthodes numériques et de leur application aux problèmes de la mécanique des milieux continus.

S. Godounov, A. Zabrodine, M. Ivanov,
A. Kraïko, G. Prokopov

LISTE DES NOTATIONS PRINCIPALES

t, temps
x, y, z, coordonnées spatiales cartésiennes
x, r, φ, coordonnées cylindriques
ρ, densité de milieu
p, pression
q, vecteur vitesse du milieu
u, v, w, composantes du vecteur vitesse
R, P, U, V, W, quantités auxiliaires (« grandes »)
$\varkappa$, indice de l'adiabatique
c, vitesse du son
ε, énergie interne de l'unité de masse
h, pas du maillage aux différences unidimensionnel
h_x, h_y, h_z, pas du maillage spatial
τ, pas en temps
τ_x, τ_y, τ_z, pas en temps des schémas « unidimensionnels »
ν, nombre de Courant
j, k, indices entiers des nœuds du maillage $j = 0, 1, \ldots, J$; $k = 0, 1, \ldots, K$
$j - 1/2$, $k - 1/2$, indices demi-entiers des mailles du maillage

PARTIE PREMIÈRE

BASES THÉORIQUES DE LA METHODE

CHAPITRE PREMIER

CONSTRUCTION DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES FINIES POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES LINÉAIRES

§ 1. Acoustique unidimensionnelle

Equations d'acoustique à une variable spatiale. Lois de conservation. Formules de la solution générale et d'une solution à données initiales. Problème de décomposition d'une discontinuité.

Voici, pour commencer, un système d'équations différentielles de la propagation des ondes sonores planes *)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1.1}$$

où u désigne la vitesse du milieu où se propage le son, p la pression dans ce milieu (plus précisément les petits écarts de la vitesse et de la pression dus à la propagation des ondes, par rapport à leurs valeurs dans le milieu non perturbé). Les constantes ρ_0, c_0 sont liées aux propriétés du milieu : ρ_0 est sa densité, c_0^2 caractérise la compressibilité du milieu.

En intégrant les équations (1.1) sur un domaine quelconque au contour Γ dans le plan des variables x, t et en passant aux intégrales de contour on obtient les égalités intégrales

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma \rho_0 u\,dx-p\,dt=0,\\ &\oint_\Gamma \frac{p}{c_0^2}\,dx-\rho_0 u\,dt=0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

*) Pour la déduction des équations d'acoustique voir, par exemple, le livre [137], § 63, ou les deux premiers chapitres du livre [73].

La première d'entre elles représente la loi de conservation de la quantité de mouvement $\left(\int \rho_0 u\, dx$ est la quantité de mouvement, $\int p\, dt$ l'impulsion de la force$\right)$, la seconde traduit la loi de conservation de la masse, car dans le cas acoustique considéré $p = c_0^2(\rho - \rho_0)$ en vertu de l'équation d'état.

Déduisons enfin la loi de conservation de l'énergie des ondes acoustiques dont nous aurons besoin par la suite. En multipliant la première équation (1.1) par $\rho_0 u$ et la seconde par $p/(\rho_0 c_0^2)$ et en additionnant les résultats on aboutit à une identité vraie pour les solutions des équations d'acoustique:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(pu) = 0. \tag{1.3}$$

D'où pour tout contour fermé a lieu l'égalité intégrale

$$\oint_\Gamma \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt = 0 \tag{1.4}$$

que nous appelons loi de conservation de l'énergie des ondes acoustiques *).

En règle générale, les équations de la mécanique du milieu continu sont d'abord établies sous forme des lois intégrales de conservation; on en tire ensuite des équations différentielles.

Reprenons le cas du système acoustique (1.1). On peut sans peine le mettre sous une forme très simple qu'on appellera canonique dans ce qui suit. Notamment, en multipliant la seconde équation par $1/(\rho_0 c_0)$ puis en la sommant avec la première équation et en la retranchant de celle-ci on obtient deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si l'on introduit les notations

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = Y, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = Z, \tag{1.6}$$

ces équations prennent la forme

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} - c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \tag{1.7}$$

qui permet immédiatement d'écrire leur solution générale:

$$Y = f(x - c_0 t), \quad Z = g(x + c_0 t),$$

*) Les détails concernant la loi de conservation de l'énergie dans l'acoustique sont donnés, par exemple, dans le § 64 du livre [137] ou dans le ch. IV de [73]. On trouve aussi une discussion intéressante à ce sujet dans [105], pp. 249-256.

f et g étant des fonctions arbitraires sauf qu'elles soient différentiables pour satisfaire aux égalités (1.7).

En explicitant les quantités u et p de (1.6) par Y, Z on obtient la représentation de la solution générale des équations de la propagation du son (1.1):

$$u = \frac{1}{2}[f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)],$$
$$p = \frac{\rho_0 c_0}{2}[f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)]. \tag{1.8}$$

Les quantités Y, Z définies par les formules (1.6) sont dites *invariants riemanniens* (en l'honneur du mathématicien allemand Riemann qui les introduisit dans un cas analogue mais un peu plus compliqué). Il suit de la formule $u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = f(x - c_0 t)$ que la quantité $Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$ reste constante sur la droite $x - c_0 t = \text{const}$, c.-à-d. le graphique de la fonction $Y(x)$ se déplace avec le temps à droite à la vitesse c_0. De façon analogue, la quantité $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$ reste constante sur la droite $x + c_0 t = \text{const}$ et son graphique se déplace à gauche avec la même vitesse. C'est la raison pour laquelle on appelle c_0 vitesse de propagation des ondes sonores ou vitesse du son. Les droites $x \pm c_0 t = \text{const}$ $\left(\frac{dx}{dt} = \pm c_0\right)$ dans le plan x, t sont dites *caractéristiques* du système (1.1).

Comme on l'a déjà dit, les formules (1.8) donnent la représentation de la solution générale du système (1.1). Pour en dégager une solution unique complètement définie on doit imposer des exigences supplémentaires qui se présentent sous la forme de conditions dites *conditions initiales* et *conditions aux limites.*

Ainsi, par exemple, si l'on exige que la solution du système (1.1) satisfasse aux données initiales

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x) \tag{1.9}$$

sur le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$, on doit choisir les fonctions f et g à partir des égalités

$$u_0(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)],$$

$$p_0(x) = \frac{\rho_0 c_0}{2}[f(x) - g(x)].$$

Il en découle que

$$f(x) = u_0(x) + \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0}, \quad g(x) = u_0(x) - \frac{p_0(x)}{\rho_0 c_0}$$

si bien que la solution du système (1.1) aux données initiales (1.9) sera de la forme

$$u(x, t) = \frac{u_0(x-c_0t)+u_0(x+c_0t)}{2} + \frac{p_0(x-c_0t)-p_0(x+c_0t)}{2\rho_0 c_0},$$
$$p(x, t) = \frac{p_0(x-c_0t)+p_0(x+c_0t)}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_0(x-c_0t)-u_0(x+c_0t)}{2}. \quad (1.10)$$

A l'aide de raisonnements assez simples on peut justifier non seulement l'existence mais aussi l'unicité de la solution du système

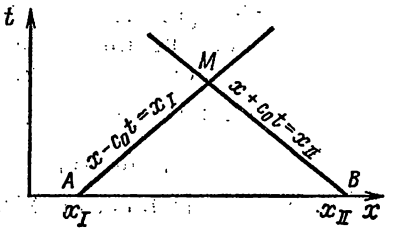


Fig. 1.1

d'équations (1.1) aux données initiales à l'intérieur d'un triangle ABM dit caractéristique (fig. 1.1). Ses côtés sont: le segment AB de l'axe x, sur lequel sont définies les données initiales, le segment AM de la caractéristique de la famille $x - c_0t = \text{const}$, issue de l'extrémité gauche $x = x_I$, le segment BM de la caractéristique de la famille $x + c_0t = \text{const}$, issue de l'extrémité droite $x = x_{II}$.

On a indiqué précédemment que les fonctions f et g doivent être lisses (différentiables) pour que u et p calculés à l'aide des formules (1.10) soient solution du système (1.1). Il en sera ainsi, d'après les formules (1.10), si les fonctions $u_0(x)$, $p_0(x)$ définissant les données initiales sont différentiables. Comment faire si elles ne le sont pas?

Considérons, en particulier, le problème très simple suivant. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ les conditions initiales (1.9) soient de la forme

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u_I, \quad p_0(x) = p_I \quad \text{pour } x < x^*, \\ u_0(x) &= u_{II}, \quad p_0(x) = p_{II} \quad \text{pour } x > x^*, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où u_I, p_I, u_{II}, p_{II} sont des constantes telles que l'on ait l'une des inégalités: $u_I \neq u_{II}$ ou $p_I \neq p_{II}$, ou les deux simultanément.

En laissant de côté pour le moment le caractère discontinu des données initiales, construisons la solution selon le modèle précédent. En ramenant (1.1) à la forme canonique (1.5) et compte tenu de la constance de l'invariant riemannien $Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$ le long des

caractéristiques $x - c_0 t = \text{const}$ et de l'invariant $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$ le long des caractéristiques $x + c_0 t = \text{const}$ on aboutit à la structure représentée sur la figure 1.2.

Dans le domaine I on a

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I - \frac{p_I}{\rho_0 c_0},$$

d'où $u = u_I$, $p = p_I$, c.-à-d. que les quantités « de gauche » restent non perturbées.

De même, dans le domaine II

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} + \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0},$$

d'où $u = u_{II}$, $p = p_{II}$, c.-à-d. que les quantités « de droite » restent

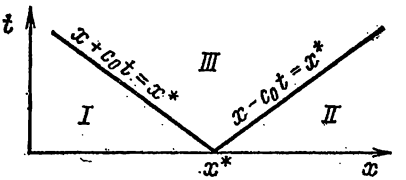


Fig. 1.2

non perturbées.

Enfin, dans le domaine III les quantités u, p peuvent être trouvées à partir des équations

$$u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_I + \frac{p_I}{\rho_0 c_0}, \quad u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = u_{II} - \frac{p_{II}}{\rho_0 c_0}.$$

Ainsi la solution du problème considéré est donnée par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} &u = u_I, \quad p = p_I, \quad \text{si} \quad x < x^* - c_0 t, \\ &u = u_{II}, \quad p = p_{II}, \quad \text{si} \quad x > x^* + c_0 t, \\ &u = \frac{u_I + u_{II}}{2} - \frac{p_{II} - p_I}{2\rho_0 c_0}, \quad \text{si} \quad x^* - c_0 t < x < x^* + c_0 t. \\ &p = \frac{p_I + p_{II}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{II} - u_I}{2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Les fonctions construites $u(x, t)$, $p(x, t)$ sont discontinues sur deux droites: $x + c_0 t = x^*$ et $x - c_0 t = x^*$, qui séparent les domaines I, II, III. Ces deux droites de discontinuité se sont formées à partir de la discontinuité initiale au point $x = x^*$. On convient, pour cette raison, d'appeler le problème considéré *problème de décomposition d'une discontinuité*. Il n'est pas formellement permis

d'envisager les fonctions $u(x, t)$, $p(x, t)$ comme des solutions du problème considéré car elles ne sont même pas continues. C'est pourquoi considérons-les comme *solution généralisée* du problème de la décomposition d'une discontinuité. Voici quelques arguments à l'appui de ces procédés. Faisons le « lissage » des données initiales (1.11) en les modifiant sur un petit segment $x^* - \delta \leqslant x \leqslant x^* + \delta$, au voisinage du point de discontinuité x^* de telle sorte que les nouvelles données initiales $u|_{t=0} = u_\delta(x)$, $p|_{t=0} = p_\delta(x)$, premièrement, soient différentiables et, deuxièmement, diffèrent peu de celles de départ:

$$\int |u_\delta(x) - u_0(x)|\,dx < \delta, \quad \int |p_\delta(x) - p_0(x)|\,dx < \delta.$$

Il sera alors possible d'établir pour elles une solution « classique » (lisse). Puis considérons la suite de ces solutions lorsque $\delta \to 0$. On voit aisément que pour des δ très petits les graphiques des solutions lisses construites ne différeront pas de ceux des fonctions construites précédemment qu'on avait appelées solutions généralisées.

On connaît d'autres manières de procéder à la construction d'une solution généralisée considérée comme limite des solutions lisses, que nous laissons pour le moment de côté. On peut trouver une étude plus détaillée de la question dans le § 19 du livre [130]. C'est à S. Sobolev qu'on doit l'introduction de la notion de solution généralisée.

§ 2. Schéma aux différences finies

Approximation constante par morceaux des données initiales. Construction de la solution à l'aide des décompositions de discontinuités. Mise en moyenne et lois de conservation. Formules aux différences. Construction du même schéma à partir des relations sur les caractéristiques.

Pour mettre en œuvre les méthodes numériques de calcul des processus décrits par telles ou telles équations différentielles il faut remplacer les fonctions aux arguments continus par certains ensembles discrets de nombres.

On va procéder à cette discrétisation de la façon suivante. Supposons que le milieu dans lequel nous nous proposons de décrire les processus soit divisé en une série de couches suivant la coordonnée x par les points x_j appelés *nœuds* du réseau aux différences (j étant un indice entier). En remettant à plus tard la question des conditions aux limites supposons que les données initiales soient définies sur tout l'axe des x et que ce dernier soit entièrement rempli par le réseau aux différences (i.e. le réseau contient un ensemble dénombrable infini de nœuds).

Pour simplifier, supposons que les nœuds soient équidistants: $x_j - x_{j-1} = h$. La quantité h est dite *pas du réseau* en coordonnée x.

Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, dans chaque couche, les quantités u, p sont constantes. Désignons leurs valeurs dans la couche entre les nœuds x_{j-1} et x_j par $u_{j-1/2}$, $p_{j-1/2}$ en affectant la couche d'un indice « demi-entier » $j - 1/2$. Ainsi donc, en qualité de données initiales on a une certaine fonction constante par morceaux. Sur chaque frontière entre deux couches voisines se crée la décomposition de discontinuité qu'on a déjà étudiée au § 1. Il en résulte que chaque nœud du réseau envoie des ondes sonores

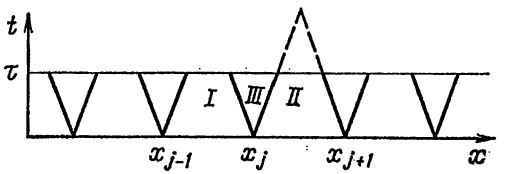


Fig. 2.1

se propageant à droite et à gauche à la vitesse du son c_0 si bien que pendant un certain laps de temps la structure de la solution a la forme schématisée à la figure 2.1. En particulier, au voisinage du point x_j, on a, conformément aux formules (1.12):

$$u = u_{j-1/2}, \quad p = p_{j-1/2} \text{ dans le domaine } I\text{: } x_{j-1} + c_0 t < x < x_j - c_0 t;$$

$$u = u_{j+1/2}, \quad p = p_{j+1/2} \text{ dans le domaine } II\text{: } x_j + c_0 t < x < x_{j+1} - c_0 t;$$

$$u = U_j = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0} \tag{2.1}$$

$$\text{dans le domaine } III\text{: } x_j - c_0 t < x < x_j + c_0 t,$$

$$p = P_j = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2}$$

La structure de la solution, représentée sur la figure 2.1, se conservera jusqu'au moment où les ondes sonores issues des nœuds voisins du réseau se rencontrent. Après cela il faudra la réviser. Au cas où les intervalles du réseau sont inégaux, les instants de la réformation seront différents selon les nœuds. Toutefois, même dans le cas d'un réseau uniforme la description d'une solution exacte pour de grands t s'avère très fastidieuse. Etant donné le côté illustratif du problème traité et la nécessité des généralisations ultérieures au cas des équations plus compliquées aux coefficients variables il semble plus rationnel de contourner cette difficulté de la façon suivante.

Soit une solution au moment $t = \tau$; remplaçons-la par une autre, ayant la même structure qu'au moment initial $t = 0$, en prenant soin qu'on puisse la considérer comme « approchée » pour la solution vraie au moment $t = \tau$. Nous remettons à plus tard l'éclaircissement du terme « solution approchée » en nous contentant de considérations purement intuitives.

Ainsi donc, nous supposons qu'au moment $t = \tau$ la solution approchée soit représentée par des fonctions qui sont constantes dans les intervalles bornés par les anciens nœuds du réseau x_j. Désignons les nouvelles valeurs « moyennes » de ces fonctions dans la couche entre les nœuds x_{j-1} et x_j par $u^{j-1/2}$ et $p^{j-1/2}$ en élevant l'indice $j - 1/2$ pour marquer qu'elles se rapportent au moment $t = \tau$ et non à $t = 0$ comme les anciennes valeurs $u_{j-1/2}$ et $p_{j-1/2}$. Pour calculer ces $u^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ moyens il semble naturel de procéder ainsi. On calcule d'abord $u^*(x, \tau)$, $p^*(x, \tau)$ sous la forme d'une fonction constante par morceaux, dont les discontinuités coïncident avec les points atteints au moment considéré par les discontinuités (ondes) formées lors de la décomposition des discontinuités qui sont apparues au moment $t = 0$. Ensuite, on prend la moyenne de la solution exacte sur les intervalles (x_{j-1}, x_j) à l'aide des formules suivantes:

$$u^{j-1/2} = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} u^*(x, \tau)\, dx,$$

$$p^{j-1/2} = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} p^*(x, \tau)\, dx.$$

La solution approchée ainsi obtenue grâce aux fonctions

$$\hat{u}(x, \tau) = u^{j-1/2}, \quad \hat{p}(x, \tau) = p^{j-1/2} \text{ pour } x_{j-1} < x < x_j,$$

est de nouveau constante par morceaux mais, comparée à la solution exacte, elle est plus maniable en ceci que ses discontinuités se trouvent aux mêmes points x_j que celles des données initiales.

Il apparaît que lors du calcul des $u^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ on peut se dispenser de calculer la solution exacte $u^*(x, \tau)$, $p^*(x, \tau)$ et calculer ces derniers directement d'après les formules

$$\begin{aligned} u^{j-1/2} &= u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} (P_j - P_{j-1}), \\ p^{j-1/2} &= p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} \rho_0 c_0^2 (U_j - U_{j-1}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

où U_j, P_j sont des valeurs obtenues lors de la décomposition de la discontinuité au point $x = x_j$ et calculées selon les formules

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{u_{j-1/2}+u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2}-p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \\ P_j &= \frac{p_{j-1/2}+p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2}-u_{j-1/2}}{2}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

U_{j-1}, P_{j-1} sont des valeurs analogues pour le point $x = x_{j-1}$. En effet, écrivons la première loi de conservation (1.2):

$$\oint \left(u\,dx - \frac{p}{\rho_0}\,dt\right) = 0,$$

pour une maille rectangulaire du réseau dans le plan x, t limité par les droites $x = x_{j-1}$, $x = x_j$, $t = 0$, $t = \tau$:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, \tau)\,dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, 0)\,dx - \frac{1}{\rho_0}\int_0^{\tau} [p(x_j, t) - p(x_{j-1}, t)]\,dt. \tag{2.4}$$

Nous partirons de l'hypothèse que la fonction $u(x, t)$, pour $t = 0$, est constante sur l'intervalle de x_{j-1} à x_j et prend les valeurs de $u_{j-1/2}$. Sur le côté gauche et le côté droit de la maille la fonction $p(x, t)$ prend les valeurs constantes P_{j-1} et P_j respectivement (en vertu du problème de la décomposition de la discontinuité) au moins jusqu'à ce que ces valeurs soient modifiées par les ondes sonores issues des nœuds voisins du réseau.

Par conséquent, l'égalité (2.4) peut être récrite sous la forme

$$\frac{1}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j} u(x, \tau)\,d\tau = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\frac{1}{\rho_0}(P_j - P_{j-1}). \tag{2.5}$$

En posant ensuite la valeur « moyenne » de la fonction $u(x, t)$ sur l'intervalle $x_{j-1} < x < x_j$ comme égale à $u^{j-1/2}$ au moment $t = \tau$, nous retrouvons ainsi la première formule de (2.2). La seconde formule s'obtient à la suite de considérations analogues à partir de la seconde loi de conservation (1.2):

$$\oint (p\,dx - \rho_0 c_0^2 u\,dt) = 0.$$

Notons que les discontinuités nées à $t = 0$ aux points $x = x_j$ se propagent à la vitesse du son c_0. Lorsque $t = h/(2c_0)$, elles se rencontrent en des points $(x_{j-1} + x_j)/2$ moyens entre x_{j-1} et x_j. Ce choc fera naître de nouvelles ondes qui, dans l'intervalle de temps suivant (de durée $h/(2c_0)$), atteindront les points x_j, x_{j-1}. Avant cet événement, i.e. pendant le temps $h/c_0 = h/(2c_0) + h/(2c_0)$ à partir de la

décomposition initiale de discontinuité, les valeurs U_j, P_j aux points x_j qui s'y sont créées resteront constantes. Cela nous autorise à utiliser les formules (2.2) pour le calcul de $u^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ lorsque $\tau < h/c_0$. On verra par la suite qu'on impose la même restriction à la valeur τ à partir de considérations toutes différentes lors de l'étude de la stabilité du schéma aux différences.

En appliquant successivement les formules (2.2), (2.3) à tous les nœuds du maillage aux différences, on obtient, pour le moment $t_1 = \tau$, en tant que « solution approchée », des fonctions constantes par morceaux dont la structure est la même que celle des données initiales. Cela permet, en s'appuyant sur les résultats obtenus et sur ceux de départ, d'avancer encore de τ pour construire, sous la même forme, la solution au moment $t_2 = 2\tau$, ensuite à $t_3 = 3\tau$, etc. Convenons d'appeler par la suite « calcul d'un pas » le passage de l'état du problème au moment $t = t_{n-1}$ à l'état au moment $t_n = t_{n-1} + \tau$. Notons que l'intervalle de temps τ peut généralement varier d'un pas à l'autre pour des causes diverses dont il sera question plus tard. Appelons les valeurs correspondant au moment $t = t_{n-1}$ valeurs de la couche « inférieure » en les marquant par les indices inférieurs et les valeurs correspondant au moment $t_n = t_{n-1} + \tau$ valeurs de la couche « supérieure » en les marquant par les indices supérieurs.

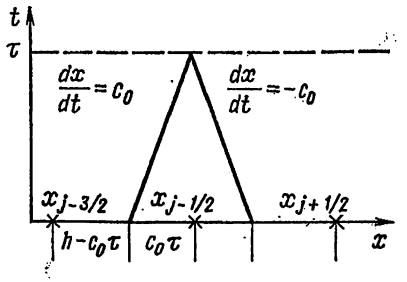


Fig. 2.2

Il nous paraît intéressant de donner encore une interprétation du schéma aux différences décrit. En effet, celui-ci a été obtenu pour la première fois à partir d'autres considérations fondées sur les invariants riemanniens (1.6) déjà mentionnés:

$$Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}.$$

Compte tenu de la constance de ces quantités sur les caractéristiques on arrive, en les interpolant linéairement aux valeurs en des points voisins de la couche « inférieure » (fig. 2.2), aux formules suivantes de calcul approché des valeurs des invariants riemanniens sur la couche « supérieure »:

$$\begin{aligned} Y^{j-1/2} &= \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Y_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2}, \\ Z^{j-1/2} &= \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Z_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notons tout de suite que ces formules ne représentent l'interpolation que dans le cas où est satisfaite la condition $\tau \leqslant \tau^* = h/c_0$, comme on le voit sur la figure 2.2. Dans le cas contraire les poids négatifs apparaissent dans les formules (2.6).

Après avoir substitué dans (2.6) les expressions des invariants Y, Z en fonction des valeurs correspondantes u, p, on en tire les formules pour les valeur $su^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ sur la couche « supérieure » sous la forme suivante:

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\rho_0\left[\left(\frac{p_{j-1/2}+p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2}-u_{j-1/2}}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{p_{j-1/2}+p_{j-3/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j-1/2}-u_{j-3/2}}{2}\right)\right], \qquad (2.7)$$
$$p^{j-1/2} = p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\rho_0 c_0^2\left[\left(\frac{u_{j-1/2}+u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2}-p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{u_{j-1/2}+u_{j-3/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2}-p_{j-3/2}}{2\rho_0 c_0}\right)\right].$$

Le groupement des termes entre crochets dans ces formules est presque dû au hasard: il fut dicté par un souci de commodité lors des calculs sur l'arithmomètre à clavier, sur l'instance de V. Paleitchik (c'était l'époque où les calculatrices électroniques n'étaient pas encore d'usage courant). Quelques mois après seulement on a remarqué par hasard que les expressions entre parenthèses coïncident avec les formules pour la pression et la vitesse qui se créent au cours de la décomposition de discontinuité. Une analyse approfondie de cette circonstance a amené à l'interprétation du schéma aux différences dont la description ouvre l'exposé.

La construction du schéma aux différences décrite dans ce paragraphe est le fruit de vastes recherches expérimentales faites en 1953 par S. Godounov. A ce travail ont également pris part N. Zuéva et un groupe de calcul dirigé par V. Paleitchik. Ces recherches ont permis d'élaborer non seulement le schéma pour les équations linéaires décrit ici, mais également le schéma pour les équations non linéaires de la dynamique des gaz, proche de celui du § 14. Les discussions des diverses variantes et des résultats expérimentaux qu'avait menées les auteurs avec I. Gelfand et K. Sémendiaev ont sensiblement influencé la mise au point de ces schémas.

§ 3. Approximation et stabilité du schéma

Vérification de l'approximation du schéma sans conditions aux limites. Analyse de stabilité par méthode de Fourier. Inégalité énergétique. Déduction de la condition de stabilité pour un domaine illimité.

Essayons de vérifier que le schéma présenté approche les équations d'acoustique (1.1). Pour cela il est commode de partir des

équations (2.7) récrites sous la forme suivante:

$$\frac{u^{j-1/2}-u_{j-1/2}}{\tau}+\frac{1}{\rho_0}\frac{p_{j+1/2}-p_{j-3/2}}{2h}-c_0\frac{u_{j+1/2}-2u_{j-1/2}+u_{j-3/2}}{2h}=0,$$

$$\frac{p^{j-1/2}-p_{j-1/2}}{\tau}+\rho_0c_0^2\frac{u_{j+1/2}-u_{j-3/2}}{2h}-c_0\frac{p_{j+1/2}-2p_{j-1/2}+p_{j-3/2}}{2h}=0. \tag{3.1}$$

En supposant les fonctions $u(x, t)$, $p(x, t)$ suffisamment lisses, développons en séries de Taylor les quantités entrant dans les formules (3.1) en retenant les termes jusqu'au second ordre en h et τ. Pour la première équation (3.1) on obtient

$$\frac{u^{j-1/2}-u_{j-1/2}}{\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+o(\tau),$$

$$\frac{p_{j+1/2}-p_{j-3/2}}{2h}=\frac{\partial p}{\partial x}+o(h),$$

$$\frac{u_{j+1/2}-2u_{j-1/2}+u_{j-3/2}}{2h}=\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+o(h).$$

Ces formules impliquent que les valeurs des dérivées sont calculées au point de « référence » $x=\frac{1}{2}(x_{j-1}+x_j)$, $t=t_0$. Ainsi la première équation aux différences (3.1) peut s'écrire comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h}{2}c_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+o(h+\tau), \tag{3.2}$$

et la seconde peut tout naturellement être amenée par des opérations analogues à la forme

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\frac{h}{2}c_0\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+o(h+\tau). \tag{3.3}$$

Si les dérivées secondes des fonctions $u(x, t)$, $p(x, t)$ sont bornées, alors pour $\tau\to 0$, $h\to 0$ les seconds membres des égalités (3.2), (3.3) tendent vers zéro. Ce fait permet d'affirmer que le schéma aux différences décrit assure l'approximation des équations d'acoustique. Les termes résiduels sont du premier ordre en h et en τ. Cela signifie qu'on peut s'attendre, en diminuant de plusieurs fois les pas τ en temps et h en coordonnée x, à une diminution à peu près proportionnelle de l'erreur de la solution.

En vertu des équations de départ (1.1) il est possible d'éliminer, dans les seconds membres des égalités (3.2), (3.3), les dérivées par rapport au temps t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)=c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_0c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\rho_0c_0^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=c_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Il apparaît alors que sur les solutions des équations d'acoustique le schéma aux différences adopté permet l'approximation du second ordre du système d'équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=h\frac{c_0}{2}\left(1-c_0\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ &\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=h\frac{c_0}{2}\left(1-c_0\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On l'appelle première approximation différentielle. Fait curieux à noter: comme précédemment la quantité $\tau^* = h/c_0$ y joue un rôle particulier. Ainsi pour $\tau > h/c_0$ il apparaît que le problème de Cauchy est incorrectement posé pour le système (3.4). Le lecteur peut s'en convaincre lui-même en se référant au problème de Cauchy analogue pour l'équation de chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $t < 0$ (voir p. ex. [130], § 8).

La restriction $\tau \leqslant h/c_0$ appelée à jouer un rôle important est loin d'être le fait d'un hasard. En guise d'exemple, nous donnons au paragraphe suivant, § 4, les résultats d'un calcul effectué sans respecter cette condition. Cet exemple montre que les formules de calcul, tout en approchant les équations d'acoustique (au premier ordre près), sont inapplicables pour $\tau > h/c_0$. On dit que pour $\tau > h/c_0$ le schéma décrit est instable.

Sans entrer dans les détails le sens de la notion de stabilité consiste dans ce que les solutions aux différences construites d'après les données initiales bornées restent bornées pendant tout intervalle de temps fini sans dépendre de la valeur τ (quelle qu'elle soit) du pas de calcul. On peut montrer que pour un schéma aux différences stable les erreurs d'arrondi, inévitables dans le calcul numérique, amènent à une erreur dans la solution calculée qui est du même ordre que les erreurs commises dans les opérations intermédiaires.

De plus on peut démontrer, et cela est d'une importance capitale, que si le schéma aux différences finies approche les équations différentielles et est stable, alors lorsque les pas diminuent ses solutions convergent vers celles des équations différentielles. Nous n'allons pas nous arrêter sur la justification et sur une formulation plus rigoureuse de ces faits universellement connus de nos jours. S'il désire, le lecteur peut en prendre connaissance dans [130], [133], [95].

Au contraire, dans le cas d'un schéma instable les erreurs d'arrondi croissent indéfiniment en amenant, en définitive, le dépassement de capacité de l'échelle binaire d'un ordinateur.

Nous allons entreprendre l'étude de la stabilité du schéma aux différences décrit par la méthode dite de Fourier. Dans ce but, considérons pour les équations étudiées (3.1) les solutions de la forme

$$u^{j-1/2} = \lambda u_{j-1/2} = \lambda u^* e^{ij\varphi},$$
$$p^{j-1/2} = \lambda p_{j-1/2} = \lambda p^* e^{ij\varphi}.$$

Ici u^*, p^*, λ, φ sont des constantes, i est l'unité imaginaire. Pour u^*, p^* on obtient un système de deux équations linéaires:

$$\left[\lambda - 1 - \frac{\tau}{h} c_0 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2}\right] u^* + \frac{\tau}{h} \frac{1}{\rho_0} \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} p^* = 0,$$

$$\frac{\tau}{h} \rho_0 c_0^2 \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} u^* + \left[\lambda - 1 - \frac{\tau}{h} c_0 \frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{2}\right] p^* = 0.$$

Pour qu'il puisse être résolu il faut que le déterminant de ce système soit égal à zéro, c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 + \nu(1 - \cos\varphi) & \frac{1}{\rho_0 c_0} i\nu \sin\varphi \\ \rho_0 c_0 i\nu \sin\varphi & \lambda - 1 + \nu(1 - \cos\varphi) \end{vmatrix} = 0,$$

où $\nu = c_0\tau/h$. Cette égalité représente une équation quadratique dont les racines sont

$$\lambda_{1,2} = 1 - \nu(1 - \cos\varphi) \pm i\nu \sin\varphi. \tag{3.5}$$

On voit aisément que

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{[1 - \nu(1 - \cos\varphi)]^2 + \nu^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - 4\nu(1 - \nu)\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Pour $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ on a évidemment

$$0 \leqslant 4\nu(1 - \nu) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant 1 - 4\nu(1 - \nu)\sin^2\frac{\varphi}{2} \leqslant 1,$$

si bien que $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$ quel que soit φ. Dans le cas où $\nu > 1$ il existe les valeurs de φ telles que $|\lambda_{1,2}| > 1$. Ainsi pour $\varphi = \pi$ on a

$$|\lambda_{1,2}(\pi)| = \sqrt{1 - 4\nu(1 - \nu)} = |2\nu - 1| > 1, \quad \text{si} \quad \nu > 1.$$

Il découle de ces propriétés des racines $\lambda(\nu, \varphi)$ que pour $\nu = c_0\tau/h \leqslant 1$ le schéma est stable et pour $\nu = c_0\tau/h > 1$ il est instable. La quantité ν est dite *nombre de Courant*.

Pour nos buts ultérieurs il apparaît plus avantageux de se servir pour l'étude de la stabilité non pas de la méthode de Fourier mais des estimations des solutions aux différences finies en normes énergétiques (voir par exemple [95]).

Les valeurs $\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}$ dans une couche de maillage $t = \text{const}$ forment un vecteur fonction défini sur le réseau. Introduisons dans l'espace de ces vecteurs fonctions la norme

$$\|\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}\| = \sqrt{h \sum_j \left[\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} h\rho_0 \sum_j [Y_{j-1/2}^2 + Z_{j-1/2}^2]}, \tag{3.6}$$

où Y et Z sont des invariants riemanniens:

$$Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}.$$

L'analyse de stabilité en norme énergétique se ramène à démontrer que pour $\nu = c_0\tau/h \leqslant 1$ on a l'inégalité

$$\|\{u^{j-1/2}, p^{j-1/2}\}\| \leqslant \|\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}\|.$$

Le principe de cette démonstration consiste dans l'utilisation de l'analogue aux différences finies de la loi de conservation de l'énergie pour les ondes acoustiques (1.4). Il a été montré au § 1 que sa déduction se ramène à établir, en tant que conséquence des équations d'acoustique (1.1), l'égalité différentielle (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(pu) = 0.$$

On va montrer que pour $c_0\tau/h \leqslant 1$ on a l'inégalité

$$\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \leqslant \rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\tau}{h}(P_j U_j - P_{j-1} U_{j-1}), \quad (3.7)$$

si les quantités qui y entrent se calculent d'après les formules (2.2), (2.3) du schéma aux différences finies décrit. L'inégalité (3.7) est un analogue aux différences finies de l'égalité différentielle (1.3).

Compte tenu de la définition des invariants riemanniens d'après laquelle

$$Y_{j-1/2} = u_{j-1/2} + \frac{p_{j-1/2}}{\rho_0 c_0}, \quad Z_{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{p_{j-1/2}}{\rho_0 c_0},$$

les équations (2.3) pour des « grandes » valeurs peuvent revêtir la forme

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0} = \frac{1}{2}(Y_{j-1/2} + Z_{j+1/2}), \\ P_j &= \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2} = \frac{\rho_0 c_0}{2}(Y_{j-1/2} - Z_{j+1/2}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pour cette raison l'inégalité (3.7) qui est à démontrer peut être écrite, à l'aide des invariants riemanniens, sous la forme suivante:

$$\rho_0[(Y^{j-1/2})^2 + (Z^{j-1/2})^2] \leqslant \rho_0[Y_{j-1/2}^2 + Z_{j-1/2}^2] - \\ - \frac{\tau}{h}\rho_0 c_0[(Y_{j-1/2}^2 - Z_{j+1/2}^2) - (Y_{j-3/2}^2 - Z_{j-1/2}^2)]. \quad (3.9)$$

Cette inégalité est une conséquence évidente des deux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} (Y^{j-1/2})^2 &\leqslant \left(1 - \frac{\tau}{h}c_0\right) Y_{j-1/2}^2 + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2}^2, \\ (Z^{j-1/2})^2 &\leqslant \left(1 - \frac{\tau}{h}c_0\right) Z_{j-1/2}^2 + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dont on va donner ci-après la justification avec une condition supplémentaire $\nu = c_0\tau/h \leqslant 1$. Rappelons qu'au paragraphe précédent il a été montré que pour notre schéma aux différences en termes d'invariants riemanniens ont lieu les égalités (2.6):

$$Y^{j-1/2} = \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Y_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Y_{j-3/2},$$

$$Z^{j-1/2} = \left(1 - \frac{\tau}{h} c_0\right) Z_{j-1/2} + \frac{\tau}{h} c_0 Z_{j+1/2}.$$

Ainsi donc, établir les inégalités (3.10) revient à démontrer que pour $0 < \nu \leqslant 1$ l'égalité $c = (1 - \nu)\, a + \nu b$ entraîne l'inégalité $c^2 \leqslant \leqslant (1 - \nu)\, a^2 + \nu b^2$. Cela découle évidemment de l'opération élémentaire suivante:

$$c^2 = [(1 - \nu)\, a + \nu b]^2 = (1 - \nu)\, a^2 + \nu b^2 - \nu (1 - \nu)\, (a + b)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \nu)\, a^2 + \nu b^2, \quad (3.11)$$

si bien que l'inégalité (3.9) et par conséquent l'inégalité (3.7) sont complètement démontrées.

Faisons la sommation de l'inégalité démontrée (3.7) sur l'indice j de $J' + 1$ à J'':

$$\sum_{j=J'+1}^{J''} \left[\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2}\right] - \frac{\tau}{h} \sum_{j=J'+1}^{J''} (P_j U_j - P_{j-1} U_{j-1}).$$

Il vient après la sommation

$$h \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant h \sum_{j=J'+1}^{J''} \left[\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2}\right] - \frac{\tau}{h} (P_{J''} U_{J''} - P_{J'} U_{J'}). \quad (3.12)$$

C'est cette assertion qui constitue la base de l'analyse de stabilité.

Pour commencer traitons le cas plus simple d'un maillage aux différences illimité des deux côtés. Supposons que la norme

$$\|\{u_{j-1/2}, p_{j-1/2}\}\| = \sqrt{h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)}$$

soit finie, i.e. la série sous la racine est convergente. Il s'ensuit entre autres que $u_{j-1/2} \to 0$, $p_{j-1/2} \to 0$ lorsque $j \to \pm\infty$ et donc P_j, U_j qui s'expriment au moyen de ces quantités tendent vers zéro. Cela permet dans l'inégalité démontrée d'effectuer la sommation sur j de $-\infty$ à $+\infty$ et de rejeter les termes « de bord » $P_{J''}U_{J''} - P_{J'}U_{J'}$, ce qui donne

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right).$$

Ainsi est établie l'inégalité

$$\| \{u^{j-1/2},\ p^{j-1/2}\} \| \leqslant \| \{u_{j-1/2},\ p_{j-1/2}\} \|$$

qui conduit à la stabilité du schéma au cas d'un domaine illimité avec la condition supplémentaire que $\nu = \tau c_0/h \leqslant 1$.

Certes, en pratique on a à résoudre des problèmes dans un domaine limité où l'on impose telles ou telles conditions aux limites. Le paragraphe suivant est consacré à l'étude des problèmes éventuels se posant dans un domaine limité, aux schémas aux différences qui s'y rapportent et aux conditions de leur stabilité.

Avant d'aborder ces problèmes faisons une remarque concernant la démonstration de notre inégalité principale (3.7). Sa déduction pourrait nous inciter à croire qu'elle se fonde sur l'application des formules (2.3) pour des « grandes » valeurs

$$U_j = \frac{u_{j-1/2} + u_{j+1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2} - p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0},$$

$$P_j = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{2}$$

avec les valeurs de l'indice $j = J',\ J'+1,\ \ldots,\ J'',\ J''+1$. Or, on s'aperçoit qu'il suffit qu'elles ne soient remplies que pour $j = J'+1,\ \ldots,\ J''$ et pour les valeurs extrêmes $j = J'$ et $j = J''+1$, il suffit d'utiliser une seule condition par indice:

$$U_{J''} - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J'} = u_{J'+1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J'+1/2} = Z_{J'+1/2},$$

$$U_{J''} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J''} = u_{J''-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J''-1/2} = Y_{J''-1/2}.$$

Les quantités $(u_{J'-1/2},\ p_{J'-1/2})$, $(u_{J''+1/2},\ p_{J''+1/2})$ présentes dans la déduction ci-dessus peuvent être définies par convention avec un grand degré d'arbitraire pourvu qu'elles satisfassent au système

d'équations linéaires (sous-déterminé) suivant:

$$u_{J'-1/2}+\frac{1}{\rho_0 c_0}p_{J'-1/2}=U_{J'}+\frac{1}{\rho_0 c_0}P_{J'},$$

$$u_{J''+1/2}-\frac{1}{\rho_0 c_0}p_{J''+1/2}=U_{J''}-\frac{1}{\rho_0 c_0}P_{J''}.$$

On se servira de cette remarque plus tard lors de l'étude de la stabilité pour des problèmes aux conditions aux limites.

§ 4. Applications numériques

Instabilité du schéma pour le nombre de Courant $\nu > 1$. Etalement des discontinuités pour $\nu < 1$. Viscosité aux différences. Estimation de la zone d'étalement. Monotonie du schéma. Caractère régulier de l'étalement par rapport aux oscillations dans le schéma du second ordre.

Voici quelques exemples simples visant à illustrer les faits qui ont été exposés pour les équations d'acoustique (1.1) et le schéma aux différences (2.2), (2.3) pour leur intégration numérique.

Ecrivons le système d'équations (1.1) avec les coefficients $\rho_0 = 0{,}25$, $c_0 = 2{,}0$ et avec les données initiales en « échelon »:

$$u_{\mathrm{I}} = 1{,}0, \quad p_{\mathrm{I}} = 5{,}0 \quad \text{pour} \quad x < 0;$$

$$u_{\mathrm{II}} = 0, \quad p_{\mathrm{II}} = 2{,}0 \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

En accord avec les données exposées au § 2, la « décomposition d'une discontinuité » fait surgir deux « ondes » qui se propagent à partir du point $x = 0$ à la vitesse $c_0 = 2{,}0$ par rapport au milieu. Dans le domaine qui les sépare u et p sont constants et, d'après les formules (1.12), ont les valeurs $U = 3{,}5$, $P = 3{,}75$. Construisons un réseau aux différences uniforme $x_j = jh$ de pas $h = 0{,}05$ et effectuons le calcul d'après les formules aux différences (2.2), (2.3) pour diverses valeurs de $\nu = c_0\tau/h$. On obtient les résultats suivants.

Variante 1. Pour $\nu = 1$ le schéma aux différences reproduit exactement la solution du problème de décomposition d'une discontinuité, décrite au § 1.

Variante 2. Pour $\nu = 2$ les *Tableaux 1 et 2* donnent les valeurs $u_{j-1/2}$, $p_{j-1/2}$ aux nœuds du réseau contigus à $x = 0$, qui sont obtenues pour les cinq premiers pas de calcul (n est le numéro du pas). Il est évident qu'elles sont sans aucun rapport avec la vraie solution. Remarquons que les signes des valeurs obtenues alternent. Cette circonstance a son explication. Comme il a été établi au § 3, lors de l'étude de la stabilité du schéma par la méthode de Fourier, les valeurs propres λ de l'opérateur aux différences décrivant le passage d'une couche temporelle à la couche suivante sont données par la formule (3.5):

$$\lambda = 1 - \nu(1 - \cos\varphi) \pm i\nu\sin\varphi.$$

Tableau 1

Vitesse $u_{j-1/2}$

n \ j	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	6	7	0	0	0
2	1	1	11	1	0	14	0	0
3	1	21	−9	6	7	−14	28	0
4	41	−39	21	1	0	28	−56	56
5	−119	81	−19	6	7	−28	112	−168

Tableau 2

Pression $p_{j-1/2}$

n \ j	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4
0	5	5	5	5	2	2	2	2
1	5	5	5	2,5	5,5	2	2	2
2	5	5	0	5	2	9	2	2
3	5	−5	10	2,5	5,5	−5	16	2
4	−5	10	2,5	3,75	3,75	5,5	−5	16
5	65	−35	15	2,5	5,5	−12	58	−82

C'est pourquoi pour $\nu = 2$ la partie réelle de ces valeurs $\operatorname{Re} \lambda = 1 - \nu(1 - \cos\varphi)$ ne s'avérera négative que pour des φ satisfaisant à l'inégalité $\cos\varphi < 1/2$. La représentation graphique des résultats du calcul aurait fait ressortir la forme caractéristique « en dents de scie » avec une amplitude rapidement croissante d'un pas à l'autre (car, par exemple, pour $\varphi = \pi$ on a $|\lambda(\pi)| = |2\nu - 1| = 3$, si $\nu = 2$). Pratiquement, en calculant sur ordinateur, cela entraîne rapidement le dépassement de sa capacité.

Pour tout $\nu > 1$ la situation est analogue à celle décrite pour $\nu = 2$. Le schéma est instable et on ne peut pas effectuer les calculs avec $\nu > 1$.

Variante 3. Pour $\nu = 0{,}8$ la figure 4.1, *a*, *b* reproduit les résultats du calcul de la vitesse u et de la pression p obtenus avec 5, 10, 15 et 20 pas. Les discontinuités décrites précédemment se font « étaler » par le schéma aux différences. Cet « étalement » s'explique

ainsi. On a établi au § 3 que le schéma aux différences utilisé approche, au second ordre près, sur les solutions des équations de l'acousti-

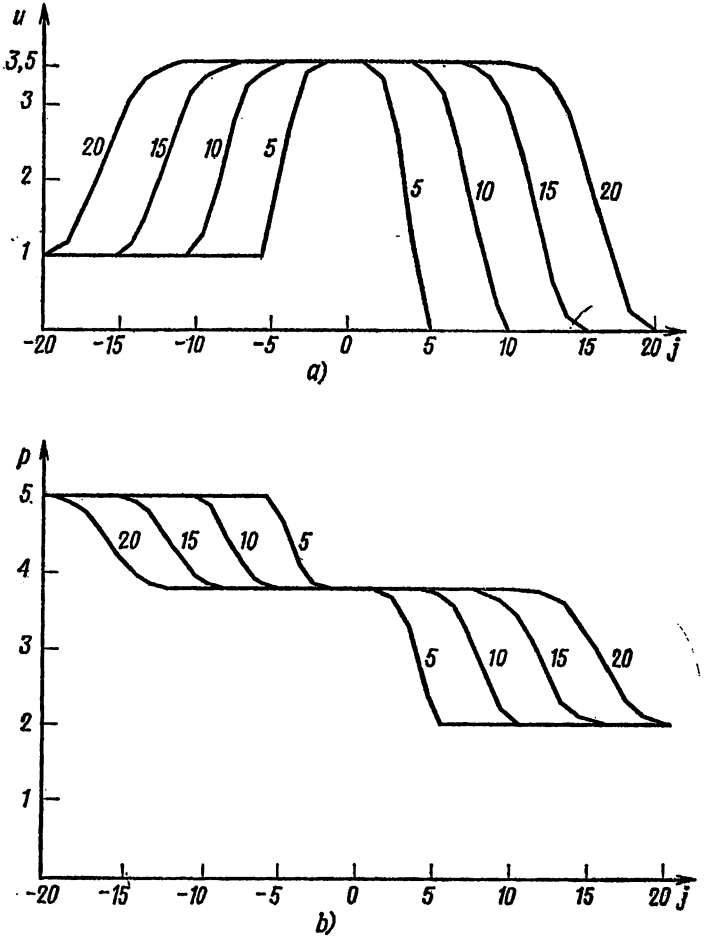


Fig. 4.1

que le système d'équations (3.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=h\frac{c_0}{2}\left(1-c_0\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=h\frac{c_0}{2}\left(1-c_0\frac{\tau}{h}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Par analogie avec la viscosité physique présente dans les équations différentielles de l'écoulement d'un fluide visqueux, on inter-

prète parfois les termes dans les seconds membres de ces équations comme la viscosité inhérente au schéma aux différences lui-même. Ces termes sont donc la cause de l'effet observé.

Pour estimer la largeur de la zone d'étalement on peut recourir aux considérations suivantes (voir [32], ch. II, § 1). Soient une équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4.1}$$

et le schéma aux différences qui l'approche

$$u^j=\left(1-\frac{\tau}{h}\right)u_j+\frac{\tau}{h}u_{j-1}. \tag{4.2}$$

Comme on le voit d'après la formule (2.6), le schéma ci-dessus ne diffère de celui décrit du point de vue de l'invariant riemannien $Y = u + p/(\rho_0 c_0)$ (coefficient $c_0 = 1$) que par le remplacement de l'indice $j - 1/2$ par j.

Prenons les données initiales sous la forme

$$u_j=\begin{cases} 1 & \text{pour} \quad j=0, \\ 0 & \text{pour} \quad j\neq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

et suivons leur transformation par le schéma (4.2).

Introduisons la notation u_j^n pour la valeur de la solution au n-ième pas de calcul au nœud de numéro j et désignons en même temps $\nu = \tau/h$. Par vérification directe on constate que la solution qu'il nous faut a la forme

$$u_j^n=\begin{cases} C_n^{n-j}\nu^j(1-\nu)^{n-j} & \text{pour} \quad 0\leqslant j<n, \\ 0 & \text{pour les autres } j. \end{cases} \tag{4.4}$$

La fonction figurant dans le second membre (distribution binomiale) peut approximativement être présentée sous la forme

$$u_j^n\approx\hat{u}_j^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1-\nu)}}e^{-\frac{(j-n\nu)^2}{2n\nu(1-\nu)}}. \tag{4.5}$$

Le diagramme de la solution au n-ième pas a la forme représentée sur la figure 4.2. Le second membre de (4.5) atteint son maximum $\hat{u}_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1-\nu)}}$ pour $j = n\nu$, i.e. ce maximum a pour coordonnée $x = jh = n\tau = t$. Comme $x - t = 0$ est une caractéristique de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ on voit que le maximum de la solution se déplace sur la caractéristique. Convenons d'appeler largeur de la zone d'étalement la longueur du segment où la solution prend les valeurs $u > e^{-\alpha^2}\hat{u}_{\max}$ (voir fig. 4.2). On tire aisément à partir de la formule (4.5) la largeur de cette zone

$$H = 2\alpha\sqrt{\nu(1-\nu)}\,th. \tag{4.6}$$

Par conséquent, lorsque $h \to 0$ le domaine où la solution est essentiellement non nulle se réduit à la caractéristique $x - t = 0$ (fig. 4.3). Avec le temps t le domaine d'étalement s'élargit proportionnellement à $\sqrt{t}$. La solution des équations aux différences aux données initiales sous forme « d'échelon »

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{pour } j < 0, \\ 0 & \text{pour } j > 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

peut être obtenue par la sommation des solutions spéciales de la forme que nous venons d'étudier. Nous avons noté précédemment que, du point de vue des invariants riemanniens, notre schéma aux différences pour les équations de l'acoustique est analogue à (4.2). On peut donc s'attendre à ce que

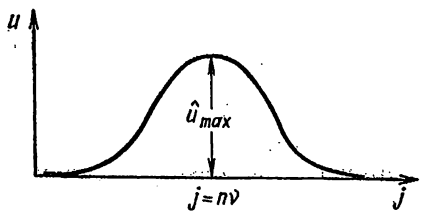


Fig. 4.2

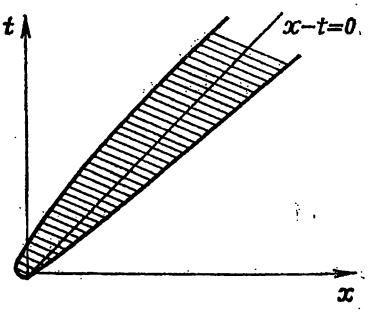


Fig. 4.3

l'estimation obtenue (4.6) pour la largeur de la zone d'étalement se reproduit de façon qualitative également pour notre schéma aux différences.

Sur la figure 4.4 sont comparés les résultats du calcul décrit avec le pas $h = 0{,}05$ (variante 3, $\nu = 0{,}8$) avec ceux du calcul avec le pas quatre fois plus petit ($h = 0{,}0125$) pour le même instant $t = 0{,}3$ (atteint sur 15 et 60 pas respectivement). La partie du graphique au voisinage de $x = 0$ n'est pas représentée étant sans importance. Comme on le voit sur la figure 4.4, l'étendue géométrique de la zone « d'étalement » a diminué d'environ 2 fois.

Notons en passant que pour la valeur du nombre de Courant $\nu = 1$ la formule (4.6) fournit pour la largeur de la zone d'étalement la valeur $H = 0$, ce qui est confirmé par la variante 1 mentionnée où le schéma reproduit la solution exacte.

Soulignons la forme régulière des discontinuités étalées. Elle s'explique par la condition de monotonie remplie par le schéma utilisé. L'ouvrage [29] fournit le critère simple suivant de la monotonie du schéma.

Pour qu'un schéma aux différences de la forme

$$u^j = \sum_k \alpha_{k-j} u_k \tag{4.8}$$

transforme toutes les fonctions monotones en fonctions monotones en conservant le sens de leur croissance, il faut et il suffit que tous les coefficients α_{k-j} soient non négatifs.

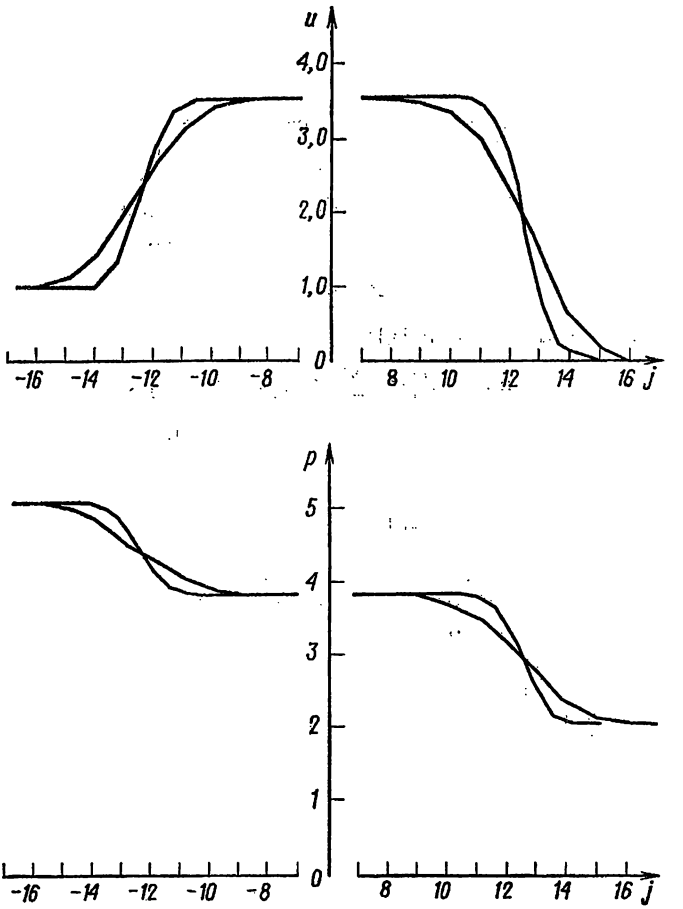


Fig. 4.4

La démonstration de ce critère n'étant pas compliquée, nous la donnons ci-dessous.

Supposons que $\alpha_k \geqslant 0$ et $\{u_j\}$ est monotone. Pour fixer les idées, supposons que $\{u_j\}$ est croissant, i.e. tous les $u_j - u_{j-1}$ sont non

négatifs. Alors

$$u^j - u^{j-1} = \sum_k \alpha_{k-j} u_k - \sum_k \alpha_{k-j+1} u_k =$$

$$= \sum_k \alpha_{k-j} u_k - \sum_k \alpha_{k-j} u_{k-1} = \sum_k \alpha_{k-j} (u_k - u_{k-1}),$$

i.e. $u^j - u^{j-1} \geqslant 0$. On a ainsi démontré que ce critère est suffisant.

Démontrons qu'il est nécessaire. Soit par exemple $\alpha_{k_0} < 0$. Posons

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{pour } j \geqslant k_0, \\ 0 & \text{pour } j \leqslant k_0 - 1. \end{cases}$$

Alors $u^0 - u^{-1} = \alpha_{k_0} < 0$, ce qui est impossible si l'on admet que le schéma transforme les suites monotones en suites monotones avec le même sens de croissance. La nécessité est démontrée.

On justifie aisément la stabilité des schémas monotones. En effet, si tous ses coefficients $\alpha_k \geqslant 0$ et, en outre,

$$\sum_k \alpha_k = 1, \tag{4.9}$$

alors il est facile de constater que

$$\max_j |u^j| < \sum_k |\alpha_{k-j}| \cdot \max_j |u_j|.$$

Or, dans nos hypothèses, $\max_k |\alpha_k| \leqslant 1$ si bien qu'a lieu l'inégalité

$$\sum_j |u^j| \leqslant \sum_j |u_j|$$

signifiant la stabilité. Le critère (4.9) est assez naturel pour les schémas approximant diverses équations différentielles et signifie que la solution des équations $u = \text{const}$ l'est également pour les équations aux différences (4.8).

On démontre dans l'ouvrage [29] qu'il n'existe pas de schéma satisfaisant à la condition de monotonie parmi les schémas aux différences linéaires du second ordre de précision pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. C'est pourquoi en effectuant les calculs d'après le schéma du second ordre on peut obtenir des diagrammes de la solution à peu près de la même forme que celui représenté sur la figure 4.5. La figure représente le résultat du calcul de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ d'après le schéma aux différences

$$\frac{u^j - u_j}{\tau} + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = \frac{\tau}{2} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}, \tag{4.10}$$

qui l'approche sur les solutions au second ordre près. Le diagramme correspond au 100-ième pas de calcul avec les données initiales (4.7)

pour la valeur du nombre de Courant $\nu = \tau/h = 0{,}1$. A la forme (4.10) se réduit notamment, dans le cas linéarisé, le schéma connu de Lax-

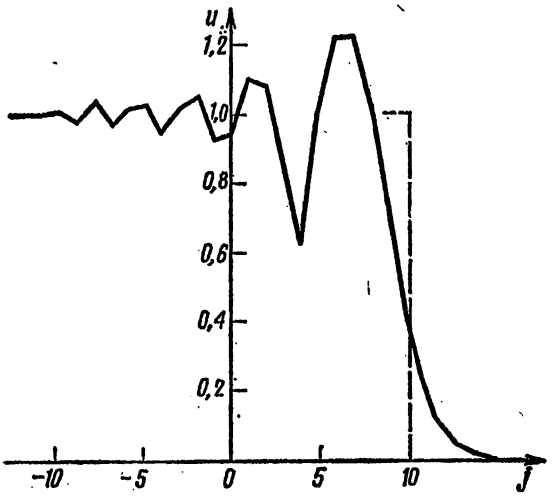


Fig. 4.5

Wendroff [139]. Le diagramme présenté montre que l'application de ces schémas aux cas où le nombre ν est petit (il en est ainsi, en

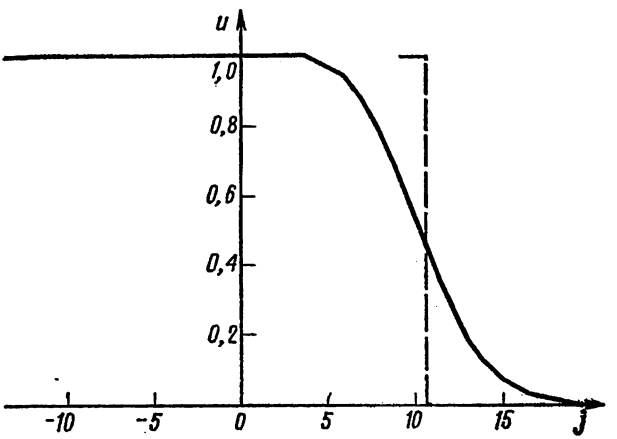


Fig. 4.6

règle générale, des problèmes quasi linéaires) exige des mesures spéciales pour la suppression des oscillations qui apparaissent. D'habitude, elles se réduisent soit à l'introduction dans les équations

de termes spéciaux dits viscosité artificielle, soit au lissage forcé des résultats sans rapport avec les équations différentielles à résoudre.

A titre de comparaison nous représentons sur la figure 4.6 le résultat obtenu dans les mêmes conditions ($\nu = \tau/h = 0{,}1$) d'après le schéma (4.2).

§ 5. Schéma pour un problème mixte

Formulation des conditions aux limites. Décomposition aux limites d'une discontinuité. Modification du schéma dans le cas du problème mixte. Les conditions aux limites dissipatives assurent la stabilité.

En résolvant les équations de l'acoustique (1.1) dans un domaine fini $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$ on est obligé d'imposer aux extrémités $x = x_I$, $x = x_{II}$ de ce segment certaines conditions aux limites. Supposons que celles-ci sont de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_I(t)\,u + \beta_I(t)\,p &= f_I(t) \quad \text{pour} \quad x = x_I; \\ \alpha_{II}(t)\,u + \beta_{II}(t)\,p &= f_{II}(t) \quad \text{pour} \quad x = x_{II}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

La théorie générale des équations différentielles (voir [130]) nous apprend que ces conditions aux limites sont admissibles pour notre système à condition que la combinaison $\alpha_I u + \beta_I p$ ne soit pas proportionnelle à l'invariant riemannien $Z = u - \frac{p}{\rho_0 c_0}$ pour une famille de caractéristiques $\frac{dx}{dt} = -c_0$ à pente négative et que $\alpha_{II} u + \beta_{II} p$ ne soit pas proportionnelle à l'invariant riemannien $Y = u + \frac{p}{\rho_0 c_0}$ répondant aux caractéristiques $\frac{dx}{dt} = c_0$. En d'autres termes, pour que les conditions aux limites soient admissibles, il faut que

$$\begin{vmatrix} \alpha_I & \beta_I \\ 1 & -\frac{1}{\rho_0 c_0} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{II} & \beta_{II} \\ 1 & \frac{1}{\rho_0 c_0} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.2}$$

Pour le schéma aux différences décrit il existe une variante très simple et naturelle permettant l'introduction des conditions aux limites dans le procédé de calcul.

Supposons que le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$ soit divisé en J intervalles de longueur $h = (x_{II} - x_I)/J$ chacun par les points x_j, $j = 0, 1, \ldots, J$, avec $x_0 = x_I$, $x_J = x_{II}$, et supposons que sur chacune des portions $x_{j-1} < x < x_j$ les valeurs initiales des quantités u, p soient constantes et égales à $u_{j-1/2}$, $p_{j-1/2}$ respectivement. Nous commençons, tout comme dans le cas du domaine illimité, par le calcul des valeurs U_j, P_j. Pour $j = 1, 2, \ldots, J-1$, i.e. pour les points intérieurs de division du segment $[x_I, x_{II}]$, leur calcul se fait avec les mêmes formules (2.3) que dans le cas du domai-

ne illimité. On propose de déterminer les valeurs frontières U_0, P_0, U_J, P_J à partir des équations

$$\begin{aligned} &\alpha_I U_0 + \beta_I P_0 = f_I, \\ &U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 = u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2} \end{aligned} \tag{5.3}$$

au point frontière gauche $x = x_0 = x_I$ et à partir des équations

$$\begin{aligned} &\alpha_{II} U_J + \beta_{II} P_J = f_{II}, \\ &U_J + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_J = u_{J-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_{J-1/2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

au point frontière droit $x = x_J = x_{II}$. Les coefficients (α_I, β_I, f_I), $(\alpha_{II}, \beta_{II}, f_{II})$ représentent, au cas où les conditions aux limites (5.1) sont variables dans le temps, certaines valeurs moyennes des fonctions correspondantes sur l'intervalle de temps de t_0 à $t_0 + \tau$, ou bien leurs valeurs à l'instant t_0 ou $t_0 + \tau$.

Les systèmes (5.3), (5.4) sont compatibles et possèdent une solution unique parce que nous supposons que les conditions (5.2) sont remplies. La variante proposée peut être illustrée de la manière suivante. Pour calculer U_0, P_0 résolvons le problème de la « décomposition limite de discontinuité » qui consiste à trouver la solution pour $x > x_0$ à partir des données initiales constantes $u = u_{1/2}$, $p = p_{1/2}$ et de la condition aux limites $\alpha_I u + \beta_I p = f_I$ donnée pour $x = x_0$. La solution d'un tel problème sera constante par morceaux. Les domaines de constance (ils sont en nombre de deux) sont séparés l'un de l'autre par la caractéristique $x - c_0 (t - t_0) = x_0$. Pour $x - c_0 (t - t_0) > x_0$, i.e. là où l'influence de la frontière $x = x_0$ qui se propage à la vitesse du son c_0 ne s'est pas fait sentir, on aura $u = u_{1/2}$, $p = p_{1/2}$ (l'état initial). Pour $x - c_0 (t - t_0) < x_0$ l'invariant de Riemann $u - p/(\rho_0 c_0)$ qui reste constant le long des caractéristiques $dx/dt = -c_0$ sera le même que pour les données initiales: $u - p/(\rho_0 c_0) = u_{1/2} - p_{1/2}/(\rho_0 c_0)$ tandis que l'invariant correspondant à une autre famille de caractéristiques $dx/dt = c_0$ doit être choisi de manière qu'il remplisse la condition aux limites $\alpha_I u + \beta_I p = f_I$ pour $x = x_0$. Ainsi donc, les valeurs $u = U_0$, $p = P_0$ pour $x - c_0 (t - t_0) < x_0$ doivent être définies à partir des conditions (5.3).

Il en est de même pour l'interprétation des règles du calcul de U_J, P_J donnant la solution du problème de la « décomposition limite de discontinuité » pour $x > x_J - c_0 (t - t_0)$, i.e. la solution satisfaisant aux conditions

$$u|_{t=t_0} = u_{J-1/2}; \quad p|_{t=t_0} = p_{J-1/2}; \quad (\alpha_{II} u + \beta_{II} p)|_{x=x_J} = f_{II}.$$

Ainsi avons-nous décrit le calcul de U_0, P_0, U_J, P_J au pas initial de calcul $t = t_0$. Pour tous les pas qui suivent leur détermination reste rigoureusement la même.

Le schéma aux différences est construit pour un problème aux limites. Pour justifier sa validité il faut démontrer qu'il approche la solution du problème mixte et qu'il est stable. Remettons l'étude de l'approximation au paragraphe suivant pour nous occuper à présent de l'analyse de la stabilité. Pour simplifier l'exposé supposons que les conditions aux limites (5.1) soient homogènes, i.e.

$$f_{\mathrm{I}}(t) \equiv 0, \quad f_{\mathrm{II}}(t) \equiv 0. \tag{5.5}$$

Nous démontrerons la stabilité du schéma aux différences pour le cas où les conditions aux limites posées pour $x = x_{\mathrm{I}}$ et pour $x = x_{\mathrm{II}}$ sont dissipatives. Cette notion est envisagée dans le § 13 du livre [130]. En ce qui concerne l'exemple des équations de l'acoustique traité ici la dissipation va être définie plus bas.

On sait que sur toutes les solutions de ces équations et pour tout contour est vraie l'identité intégrale (1.4):

$$\oint_{\Gamma} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - pu\, dt = 0,$$

signifiant la validité de la loi de conservation de l'énergie. Choisissons comme contour d'intégration un rectangle limité par les droites $t = t_0$, $t = t_1$ $(t_1 > t_0)$, $x = x_{\mathrm{I}}$, $x = x_{\mathrm{II}}$. Pour ce contour la loi de conservation de l'énergie prend la forme

$$\int_{x_{\mathrm{I}}}^{x_{\mathrm{II}}} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)_{t=t_1} dx =$$

$$= \int_{x_{\mathrm{I}}}^{x_{\mathrm{II}}} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)_{t=t_0} dx + \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{\mathrm{I}}}\, dt - \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{\mathrm{II}}}\, dt.$$

En vertu des conditions aux limites homogènes

$$(\alpha_{\mathrm{I}} u + \beta_{\mathrm{I}} p)_{x=x_{\mathrm{I}}} = 0, \quad (\alpha_{\mathrm{II}} u + \beta_{\mathrm{II}} p)_{x=x_{\mathrm{II}}} = 0$$

on peut admettre que

$$(pu)_{x=x_{\mathrm{I}}} = -\frac{\beta_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}} p^2(x_{\mathrm{I}}, t),$$

$$(pu)_{x=x_{\mathrm{II}}} = -\frac{\beta_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{II}}} p^2(x_{\mathrm{II}}, t).$$

Si β_{II} et α_{II} sont de signes différents et β_{I} et α_{I} de même signe, alors

$$\int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{\mathrm{I}}}\, dt - \int_{t_0}^{t_1} (pu)_{x=x_{\mathrm{II}}}\, dt \leqslant 0.$$

Par conséquent

$$\int_{x_{\mathrm{I}}}^{x_{\mathrm{II}}} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)_{t=t_1} dx \leqslant \int_{x_{\mathrm{I}}}^{x_{\mathrm{II}}} \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)_{t=t_0} dx,$$

i.e. l'énergie décroît avec le temps (plus précisément, ne croît pas) en se dissipant sur la frontière. Pour cette raison les conditions aux limites homogènes

$$(\alpha_{\mathrm{I}} u + \beta_{\mathrm{I}} p)_{x=x_{\mathrm{I}}} = 0, \quad (\alpha_{\mathrm{II}} u + \beta_{\mathrm{II}} p)_{x=x_{\mathrm{II}}} = 0$$

sont appelées *dissipatives* si, en vertu de ces conditions, sont remplies les inégalités

$$(pu)_{x=x_{\mathrm{I}}} \leqslant 0, \quad (pu)_{x=x_{\mathrm{II}}} \geqslant 0. \tag{5.6}$$

Pour cela, nous le venons de constater, il suffit que

$$\alpha_{\mathrm{I}} \beta_{\mathrm{I}} \geqslant 0, \quad \alpha_{\mathrm{II}} \beta_{\mathrm{II}} \leqslant 0. \tag{5.7}$$

Les conditions aux limites les plus simples $p = 0$ ou $u = 0$ sont évidemment elles aussi dissipatives.

Maintenant on peut aborder la démonstration de la stabilité du schéma aux différences. On a établi au § 3 que pour la solution des équations aux différences du schéma que nous avons décrit, on doit satisfaire à l'inégalité (3.12):

$$h \sum_{j=1}^{J} \left[\rho_0 \frac{(u^{j-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant h \sum_{j=1}^{J} \left(\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) - \tau (P_J U_J - P_0 U_0). \tag{5.8}$$

Dans la remarque faite à propos de la déduction de cette inégalité à la fin du § 3 il a été souligné que pour que la déduction soit juste, U_0, P_0, U_J, P_J (valeurs frontières de P, U) doivent satisfaire aux conditions

$$U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 = u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2},$$

$$U_J + \frac{1}{\rho_0 c_0} P_J = u_{J-1/2} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{J-1/2}.$$

Pour le procédé de calcul des valeurs frontières P, U que nous envisageons cette exigence est remplie. Comme, en outre, P_0, U_0, P_J, U_J satisfont aux conditions aux limites dissipatives $\alpha_{\mathrm{I}} U_0 + \beta_{\mathrm{I}} P_0 = 0$, $\alpha_{\mathrm{II}} U_J + \beta_{\mathrm{II}} P_J = 0$, alors

$$P_0 U_0 \leqslant 0, \; P_J U_J \geqslant 0, \quad P_0 U_0 - P_J U_J \leqslant 0.$$

Ainsi donc, on est amené à l'inégalité

$$h\sum_{j=1}^{J}\left[\rho_0\frac{(u^{j-1/2})^2}{2}+\frac{(p^{j-1/2})^2}{2\rho_0c_0^2}\right]\leqslant h\sum_{j=1}^{J}\left(\rho_0\frac{u_{j-1/2}^2}{2}+\frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0c_0^2}\right)$$

qu'il est aisé de mettre sous une forme symbolique

$$\|\{u^{j-1/2},\ p^{j-1/2}\}\|\leqslant\|\{u_{j-1/2},\ p_{j-1/2}\}\|.$$

La stabilité de notre schéma pour les conditions aux limites dissipatives est démontrée.

§ 6. Analyse de la précision du schéma sur les frontières

Construction de la solution du problème aux différences dans le cas de données initiales linéaires et de conditions aux limites linéaires. Justification du premier ordre de précision du schéma avec les conditions aux limites. Effet aux différences à la frontière de contact. Justification de la précision du schéma à la frontière de contact.

Dans le paragraphe précédent nous avons décrit un schéma aux différences pour l'intégration numérique des équations de l'acoustique

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{6.1}$$

aux données initiales $u(x, 0)=u_0(x)$, $p(x, 0)=p_0(x)$ définies sur le segment $x_{\mathrm{I}}\leqslant x\leqslant x_{\mathrm{II}}$ et aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{I}}u(x_{\mathrm{I}},\ t)+\beta_{\mathrm{I}}p(x_{\mathrm{I}},\ t)&=f_{\mathrm{I}},\\ \alpha_{\mathrm{II}}u(x_{\mathrm{II}},\ t)+\beta_{\mathrm{II}}p(x_{\mathrm{II}},\ t)&=f_{\mathrm{II}}\end{aligned} \tag{6.2}$$

et analysé sa stabilité. Le présent paragraphe sera consacré à la question de l'approximation et de la précision de ce schéma aux différences au voisinage des frontières.

Considérons les équations aux différences dans l'intervalle $j=1/2$ contigu à la frontière gauche du domaine de calcul. Elles sont de la forme

$$\begin{aligned}\frac{u^{1/2}-u_{1/2}}{\tau}+\frac{1}{\rho_0}\frac{P_1-P_0}{h}&=0,\\ \frac{p^{1/2}-p_{1/2}}{\tau}+\rho_0c_0^2\frac{U_1-U_0}{h}&=0,\end{aligned} \tag{6.3}$$

où les valeurs auxiliaires U_1, P_1 sont définies d'après les formules

$$\begin{aligned}U_1&=\frac{u_{1/2}+u_{3/2}}{2}-\frac{p_{3/2}-p_{1/2}}{2\rho_0c_0},\\ P_1&=\frac{p_{1/2}+p_{3/2}}{2}-\rho_0c_0\frac{u_{3/2}-u_{1/2}}{2},\end{aligned} \tag{6.4}$$

et les valeurs U_0, P_0 d'après les équations

$$\begin{aligned} &\alpha_I U_0 + \beta_I P_0 = f_I, \\ &U_0 - \frac{1}{\rho_0 c_0} P_0 = u_{1/2} - \frac{1}{\rho_0 c_0} p_{1/2}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

En éliminant entre les équations (6.3) les valeurs U_1, P_1 à l'aide des formules (6.4) récrivons-les sous la forme qui nous sera utile dans la suite:

$$\begin{aligned} &\frac{u^{1/2} - u_{1/2}}{\tau} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2h} - \rho_0 c_0 \frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2h} + \frac{p_{1/2} - P_0}{h}\right) = 0, \\ &\frac{p^{1/2} - p_{1/2}}{\tau} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2h} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2h} + \frac{u_{1/2} - U_0}{h}\right) = 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Soit $u^*(x, t)$, $p^*(x, t)$ la solution exacte de notre problème. Supposons que dans (6.5)

$$\alpha_I = \alpha_I(t), \quad \beta_I = \beta_I(t), \quad f_I = f_I(t),$$

où t est le temps lié à la couche « inférieure ». Cela étant, les formules (6.5) peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &p_{1/2} - P_0 = \rho_0 c_0 (u_{1/2} - U_0), \\ &u_{1/2} - U_0 = \frac{\alpha_I u_{1/2} + \beta_I p_{1/2} - f_I}{\alpha_I + \rho_0 c_0 \beta_I} = \frac{\alpha_I (u_{1/2} - u_0^*) + \beta_I (p_{1/2} - p_0^*)}{\alpha_I + \rho_0 c_0 \beta_I}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

où $u_0^* = u^*(x_I, t)$, $p_0^* = p^*(x_I, t)$.

Considérons maintenant un exemple simple mais significatif. Aux équations de l'acoustique (6.1), on le vérifie aisément, satisfont les fonctions suivantes, linéaires en x et en t:

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &= \frac{F}{\rho_0 c_0^2} x - Gt, \\ p^*(x, t) &= \rho_0 G x - Ft, \end{aligned} \tag{6.8}$$

où F, G sont des constantes arbitraires. Considérons ensuite des fonctions auxiliaires $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ qui en diffèrent par certaines quantités Δu et Δp (indépendantes du temps t):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{F}{\rho_0 c_0^2} x - Gt + \Delta u, \\ \tilde{p}(x, t) &= \rho_0 G x - Ft + \Delta p \end{aligned} \tag{6.9}$$

et les fonctions définies sur le réseau qui correspondent aux fonctions $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ et dont les valeurs $\tilde{u}_{j-1/2}$, $\tilde{p}_{j-1/2}$ se calculent d'après les formules (6.9) pour $x = (j - 1/2)h$, $t = t_{n-1} = (n - 1)\tau$, où n est le numéro du pas en temps. Il est aisé de s'assurer par une vérification directe que ces fonctions satisfont aux équations du schéma aux différences (2.7) dans tous les intervalles « intérieurs »

du réseau quelles que soient les valeurs Δu et Δp, et aux équations (6.6), (6.7) pour l'intervalle limite $j = 1/2$ si Δu et Δp vérifient la relation

$$\alpha_I \left(\Delta u - \frac{Gh}{2c_0}\right) + \beta_I \left(\Delta p - \frac{Fh}{2c_0}\right) = 0. \tag{6.10}$$

Tout comme pour l'intervalle $j = 1/2$ on peut étudier les équations aux différences dans l'intervalle $j = J - 1/2$ contigu à la frontière droite et constater que les mêmes fonctions définies sur le réseau $\{\tilde{u}_{j-1/2}\}$, $\{\tilde{p}_{j-1/2}\}$ satisfont à ces équations à condition que

$$\alpha_{II} \left(\Delta u - \frac{Gh}{2c_0}\right) + \beta_{II} \left(\Delta p - \frac{Fh}{2c_0}\right) = 0. \tag{6.11}$$

Si $\alpha_I\beta_{II} - \alpha_{II}\beta_I \neq 0$, alors (6.10) et (6.11) définissent univoquement les quantités

$$\Delta u = \frac{Gh}{2c_0}, \quad \Delta p = \frac{Fh}{2c_0}. \tag{6.12}$$

On a ainsi démontré qu'en utilisant dans les conditions aux limites

$$\alpha_I U_0 + \beta_I P_0 = f_I, \quad \alpha_{II} U_J + \beta_{II} P_J = f_{II}$$

les valeurs des coefficients correspondant à la date t de la couche « inférieure », on obtient, d'après le schéma aux différences décrit, au lieu de la solution linéaire exacte $u^*(x, t)$, $p^*(x, t)$ définie par les formules (6.8), les fonctions linéaires (6.9) au même gradient, mais décalées par rapport à la solution exacte des quantités d'ordre h définies par les formules (6.12).

La non-univocité apparente de la détermination des quantités Δu, Δp dans le cas particulier où les coefficients dans les conditions aux limites se trouvent proportionnels ($\alpha_I\beta_{II} - \alpha_{II}\beta_I = 0$) est levée par l'unicité de la solution d'un problème mixte correctement posé.

Aux formules (6.10), (6.11) obtenues lors de l'étude de cet exemple et servant à calculer les « écarts » de pression Δp et de vitesse Δu on peut conférer la forme

$$\begin{aligned} \alpha_I \left[\Delta u + \frac{h}{2c_0}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_I\right] + \beta_I \left[\Delta p + \frac{h}{2c_0}\left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_I\right] = 0, \\ \alpha_{II} \left[\Delta u + \frac{h}{2c_0}\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_{II}\right] + \beta_{II} \left[\Delta p + \frac{h}{2c_0}\left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_{II}\right] = 0, \end{aligned} \tag{6.13}$$

où $\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_I$, $\left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_I$ sont les valeurs des dérivées de la solution exacte dans le point frontière gauche $x = x_I$, et $\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_{II}$, $\left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_{II}$ celles à la

frontière droite $x = x_{II}$. Dans le cas linéaire considéré

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_{II} = -G, \quad \left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_I = \left(\frac{\partial p^*}{\partial t}\right)_{II} = -F.$$

Une analyse plus détaillée fait ressortir que les formules (6.13) sont vérifiées aux valeurs en h^2 près non seulement sur les solutions linéaires mais sur toutes les solutions lisses des équations de l'acoustique.

Nous pouvons donc entreprendre l'analyse de l'approximation du schéma aux différences avec les conditions aux limites. Portons dans les équations aux différences non pas la solution exacte $u^*(x, t)$, $p^*(x, t)$ mais les fonctions auxiliaires

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= u^*(x, t) + \Delta u, \\ \tilde{p}(x, t) &= p^*(x, t) + \Delta p, \end{aligned} \tag{6.14}$$

où Δu, Δp sont des quantités, fonctions de t, déterminées à partir des équations (6.13). Une telle substitution rend plus commode, pour tous les intervalles « intérieurs » du réseau, l'utilisation des équations aux différences écrites sous la forme (3.1). Ces équations pour des fonctions lisses arbitraires $u(x, t)$, $p(x, t)$ (pas obligatoirement pour des solutions) peuvent être ramenées, comme nous l'avons constaté au début du § 3, à la forme (3.2), (3.3) d'où il découle immédiatement que la substitution $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ produit les termes résiduels $O(h + \tau)$. Pour l'intervalle $j = 1/2$, au voisinage de la frontière gauche $x = x_I$, il est plus commode d'effectuer la substitution dans les équations (6,6) complétées par les formules (6.7). Il est aisé de constater qu'en y substituant les valeurs aux nœuds du réseau $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ on obtient également le terme résiduel $O(h + \tau)$ tout comme dans le cas de la substitution dans des équations analogues pour l'intervalle aux voisinage de la frontière droite $x = x_{II}$.

Par conséquent, les fonctions auxiliaires $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ construites d'après les formules (6.14), (6.13) satisfont à toutes les équations aux différences à $O(h + \tau)$ près. Il est donc naturel de s'attendre à ce que les équations aux différences aient pour solutions les fonctions u, p différant de $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ par les quantités $O(h + \tau)$. On peut le démontrer de façon plus systématique en utilisant la stabilité du schéma. Comme $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ diffèrent à leur tour de la solution exacte u^*, p^* par les quantités $O(h)$ d'après (6.14)-(6.13), la solution calculée suivant le schéma aux différences diffère de la solution exacte u^*, p^* par $O(h + \tau)$.

Ce type de raisonnement est systématiquement appliqué à des exemples un peu différents dans le § 37 du livre [130] et dans le § 40 du livre [133].

C'est pour des raisons de méthode que nous avons commencé l'étude de la précision du schéma aux différences par l'analyse du problème mixte. En fait, le procédé décrit de construction de la solution aux différences de la forme (6.9), qui permet d'analyser les effets apparaissant près de la frontière du domaine de calcul, a été inventé à l'occasion de l'effet qu'on avait observé dans l'analyse des calculs gazodynamiques au voisinage des discontinuités de contact.

Cet effet fut découvert par K. Sémendiaev lors de l'étude des diagrammes de calcul; ce dernier a joué un rôle du premier plan dans la mise en œuvre de la technique à laquelle est consacré le présent ouvrage. Il suivit attentivement l'évolution des premières recherches qui ont abouti à la création de cette technique et dirigea pendant plusieurs années de multiples calculs effectués sur cette base. L'effet aux différences que l'on se propose d'étudier a été confirmé sur un modèle linéarisé décrit en détail dans l'ouvrage [29]. Pour rendre l'exposé plus complet nous en donnerons la description.

Supposons que dans les équations de l'acoustique (6.1) les coefficients ρ_0, c_0 se distinguent pour $x > 0$ et $x < 0$:

$$\begin{aligned} &\rho_0 = \overline{\rho}_0, \quad c_0 = \overline{c}_0 \quad \text{pour} \quad x < 0, \\ &\rho_0 = \overline{\overline{\rho}}_0, \quad c_0 = \overline{\overline{c}}_0 \quad \text{pour} \quad x > 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Il est aisé de vérifier que dans ce cas les équations admettent la solution suivante, continue au point $x = 0$:

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} \dfrac{F}{\overline{\rho}_0 \overline{c}_0^2} x - Gt & \text{pour} \quad x < 0, \\ \dfrac{F}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0^2} x - Gt & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$\hat{p}(x, t) = \begin{cases} \overline{\rho}_0 G x - Ft & \text{pour} \quad x < 0, \\ \overline{\overline{\rho}}_0 G x - Ft & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases} \tag{6.16}$$

où F, G sont des constantes arbitraires.

La figure 6.1, *a*, *b* représente les diagrammes résultant du calcul de la solution de cette forme d'après le schéma aux différences décrit. Les valeurs concrètes des paramètres sont les suivantes:

$$\begin{aligned} &\overline{\rho}_0 = 4{,}0, \quad \overline{c}_0 = 0{,}5, \quad F = -3{,}0, \\ &\overline{\overline{\rho}}_0 = 2{,}0, \quad \overline{\overline{c}}_0 = 1{,}0, \quad G = 2{,}0. \end{aligned}$$

Le pas du réseau uniforme $h = 0{,}05$, $\nu = \tau/h = 0{,}8$. La solution de (6.16) est alors la suivante:

$$\hat{u} = -3x - 2t, \quad \hat{p} = 8x + 3t \quad \text{pour} \quad x < 0,$$
$$\hat{u} = -1{,}5x - 2t, \quad \hat{p} = 4x + 3t \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

La figure 6.1 correspond à l'instant $t^* = 0{,}8$ (20-ième pas de calcul) pour lequel

$$\hat{u}(0, t^*) = -1{,}6, \quad \hat{p}(0, t^*) = 2{,}4.$$

L'apparition dans la solution aux différences de discontinuités pour $x = 0$ analogues aux écarts de la pression Δp et de la vitesse

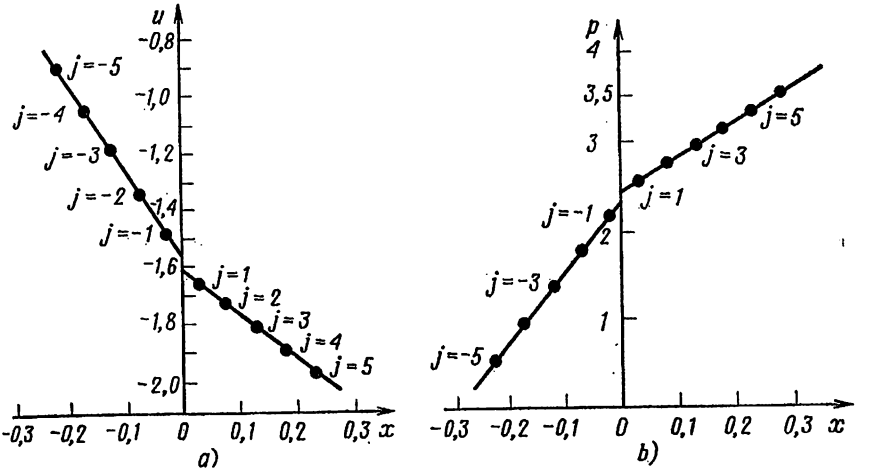


Fig. 6.1

Δu décrits précédemment peut être interprétée de la façon suivante. En composant les équations aux différences (2.2), (2.3) on prendra, dans les équations (1.1), les valeurs $\rho_0 = \overline{\rho}_0$, $c_0 = \overline{c}_0$, $h = \overline{h}$ pour les numéros $j < 0$ et les valeurs $\rho_0 = \overline{\overline{\rho}}_0$, $c_0 = \overline{\overline{c}}_0$, $h = \overline{\overline{h}}$ pour les numéros $j > 0$. (Le choix des différents pas $\overline{h}$, $\overline{\overline{h}}$ est nécessaire dans la suite.) Les quantités U_0, P_0 au nœud $x_0 = 0$ doivent être calculées en vertu des principes de construction admis du schéma aux différences à partir des équations

$$U_0 + \frac{P_0}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0} = u_{-1/2} + \frac{p_{-1/2}}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0},$$
$$U_0 - \frac{P_0}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0} = u_{1/2} - \frac{p_{1/2}}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0}. \tag{6.17}$$

On peut vérifier que le système d'équations aux différences ainsi obtenu (nous le considérons sans conditions aux limites, i.e. sur un réseau infini) admet une solution qui est, tout comme (6.16), une fonction linéaire de x et de t dans les domaines $x < 0$ et $x > 0$ et a dans ces domaines les mêmes gradients que (6.16). Cette solution sera la suivante:

$$u(x, t) = \begin{cases} \hat{u}(x, t) + \dfrac{G\bar{h}}{2c_0} + k_1 & \text{pour} \quad x < 0, \\ \hat{u}(x, t) + \dfrac{G\bar{\bar{h}}}{2c_0} + k_1 & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$p(x, t) = \begin{cases} \hat{p}(x, t) + \dfrac{F\bar{h}}{2c_0} + k_2 & \text{pour} \quad x < 0, \\ \hat{p}(x, t) + \dfrac{F\bar{\bar{h}}}{2c_0} + k_2 & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases} \tag{6.18}$$

où k_1, k_2 sont des constantes arbitraires. Les valeurs de la solution aux différences $u^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ au n-ième pas dans le temps se calculent à partir de ces formules pour $x = (j - 1/2)\,h$, $t = n\tau$ avec la valeur correspondante de $h = \bar{h}$ ou $h = \bar{\bar{h}}$.

Les formules (6.18) donnent lorsque $x \to 0$ à gauche et à droite des valeurs distinctes dont les différences sont

$$[u] = \frac{G}{2}\left(\frac{\bar{\bar{h}}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0}\left(\frac{\bar{\bar{h}}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0}\right),$$

$$[p] = \frac{F}{2}\left(\frac{\bar{\bar{h}}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0}\left(\frac{\bar{\bar{h}}}{c_0} - \frac{\bar{h}}{c_0}\right). \tag{6.19}$$

La solution aux différences n'étant définie qu'aux points demi-entiers $j - 1/2$, on n'observe aucune discontinuité réelle des pressions et des vitesses. Cependant si l'on effectue l'extrapolation linéaire des résultats du calcul au point $x = 0$, on retrouvera cette discontinuité. Sur la figure 6.1 elle correspond aux valeurs concrètes des paramètres numériques.

Comme le montre une analyse plus détaillée, les formules obtenues (6.19) pour le « saut » de pression et de vitesse à la frontière de contact sont valables, aux valeurs en h^2 près, non seulement sur les solutions linéaires mais sur toutes solutions lisses des équations de l'acoustique. Cela étant, les formules pour les « sauts »

acquièrent la forme

$$[u] = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0}\left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{c_0}}} - \frac{\overline{h}}{\overline{c_0}}\right) + O(h^2),$$
$$[p] = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0}\left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{c_0}}} - \frac{\overline{h}}{\overline{c_0}}\right) + O(h^2), \tag{6.20}$$

où $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ est une solution exacte du problème pour le système d'équations de l'acoustique (6.1) aux coefficients discontinus (6.15), continue au point $x = 0$:

$$\hat{u}(-0, t) = \hat{u}(+0, t), \quad \hat{p}(-0, t) = \hat{p}(+0, t).$$

Dans notre étude ultérieure nous la supposerons lisse (ce qui est assuré par l'initialisation convenable) dans tous les points sauf $x = 0$. Au point $x = 0$, on suppose, outre la continuité, que seules les dérivées par rapport au temps $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}$ sont lisses.

Donnons à présent une description succincte de l'analyse de l'approximation par le schéma aux différences à la frontière de contact. Pour cela construisons les fonctions auxiliaires:

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \hat{u}(x, t) - \dfrac{\overline{h}}{2\overline{c_0}}\left(\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0} & \text{pour} \quad x < 0, \\ \hat{u}(x, t) - \dfrac{\overline{\overline{h}}}{2\overline{\overline{c_0}}}\left(\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0} & \text{pour} \quad x > 0, \end{cases}$$
$$\tilde{p}(x, t) = \begin{cases} \hat{p}(x, t) - \dfrac{\overline{h}}{2\overline{c_0}}\left(\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0} & \text{pour} \quad x < 0, \\ \hat{p}(x, t) - \dfrac{\overline{\overline{h}}}{2\overline{\overline{c_0}}}\left(\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0} & \text{pour} \quad x > 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Elles diffèrent de la solution exacte d'une valeur de l'ordre h, l'écart étant introduit de façon qu'il simule l'effet à la frontière décrit plus haut. En vérifiant l'approximation nous substituerons dans les équations aux différences non pas la solution exacte $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ mais ces fonctions auxiliaires $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$. Pour tous les intervalles « intérieurs » du réseau une telle substitution ne diffère aucunement de celle décrite plus haut pour un problème mixte et amène aux termes résiduels $O(h + \tau)$. Pour les intervalles $j = 1/2$ et $j = -1/2$ contigus au point $x_0 = 0$ on doit faire une étude spéciale. Nous ne la décrirons que pour $j = 1/2$ et ne considérerons qu'une des deux équations aux différences du schéma, par exemple la seconde. Compte tenu de ce qui a été dit au début du présent paragraphe on peut la prendre directement sous la forme

de la seconde équation (6.6) en posant $\rho_0 = \overline{\overline{\rho}}_0$, $c_0 = \overline{\overline{c}}_0$. En y portant l'expression de U_0 découlant des formules (6.17):

$$U_0 = u_{1/2} - \frac{\overline{\rho}_0 \overline{c}_0 (u_{1/2} - u_{-1/2}) - (p_{1/2} - p_{-1/2})}{\overline{\rho}_0 \overline{c}_0 + \overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0},$$

on peut conférer à cette équation la forme

$$\frac{p^{1/2} - p_{1/2}}{\tau} - \overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0^2 \left[\frac{u_{3/2} - u_{1/2}}{2\overline{\overline{h}}} - \frac{p_{3/2} - p_{1/2}}{2\overline{\overline{h}}\,\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\overline{\rho}_0 \overline{c}_0 + \overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0} \left(\frac{u_{1/2} - u_{-1/2}}{\overline{\overline{h}}} \overline{\rho}_0 \overline{c}_0 - \frac{p_{1/2} - p_{-1/2}}{\overline{\overline{h}}} \right) \right] = 0. \quad (6.22)$$

Substituons dans l'équation obtenue (6.22) les valeurs définies sur le réseau des fonctions auxiliaires $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ données par les formules (6.21) et effectuons le développement des expressions qui y figurent en série de Taylor. Simultanément on tient compte qu'en vertu de la discontinuité des coefficients (6.15) dans les équations (6.1), les dérivées de la solution exacte $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ vérifient les égalités

$$\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0} = -\overline{\rho}_0 \overline{c}_0^2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_{x=-0} = -\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0^2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_{x=+0},$$

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0} = -\frac{1}{\overline{\rho}_0} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right)_{x=-0} = -\frac{1}{\overline{\overline{\rho}}_0} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right)_{x=+0}. \quad (6.23)$$

Commençons par l'expression $\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2}$. Comme

$$\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2} = \hat{u}_{1/2} - \hat{u}_{-1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0} \left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{c}}_0} - \frac{\overline{h}}{\overline{c}_0} \right)$$

et à son tour

$$\hat{u}_{1/2} - \hat{u}_{-1/2} = (\hat{u}_{1/2} - \hat{u}_0) + (\hat{u}_0 - \hat{u}_{-1/2}) =$$

$$= \frac{\overline{h}}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_{-0} + \frac{\overline{\overline{h}}}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)_{+0} + O(h^2),$$

on a en vertu des formules (6.23)

$$\tilde{u}_{1/2} - \tilde{u}_{-1/2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0} \left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{\rho}}_0 \overline{\overline{c}}_0^2} + \frac{\overline{h}}{\overline{\rho}_0 \overline{c}_0^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0} \left(\frac{\overline{\overline{h}}}{\overline{\overline{c}}_0} - \frac{\overline{h}}{\overline{c}_0} \right) + O(h^2),$$

De façon analogue on obtient la formule

$$\tilde{p}_{1/2} - \tilde{p}_{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}\right)_{x=0}(\bar{\bar{\rho}}_0\bar{\bar{h}} + \bar{\rho}_0\bar{h}) - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)_{x=0}\left(\frac{\bar{\bar{h}}}{\bar{\bar{c}}_0} - \frac{\bar{h}}{\bar{c}_0}\right) + O(h^2).$$

En se servant de ces résultats et en développant les autres termes de l'équation (6.22) en série de Taylor, on peut constater, après des transformations simples, que son premier membre sur les fonctions $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ devient de la forme

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \bar{\bar{\rho}}_0\bar{\bar{c}}_0^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}_0\bar{\bar{c}}_0}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right) - \right. \\ \left. -\frac{1}{2\bar{\bar{c}}_0}\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}_0\bar{\bar{c}}_0}\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}\right)\right] + O(h). \qquad (6.24)$$

Les valeurs des dérivées dans cette expression sont calculées au point $x = \bar{\bar{h}}/2$ que l'on peut prendre dans les développements comme point de référence. En vertu des équations de l'acoustique l'expression (6.24) est la quantité $O(h)$.

Ainsi donc, l'étude précédente et l'étude analogue que l'on peut faire pour la première équation (6.3) et pour les équations aux différences au point $x = -\bar{h}/2$ montrent que les fonctions auxiliaires $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{p}(x, t)$ construites d'après les fonctions lisses $\hat{u}(x, t)$, $\hat{p}(x, t)$ à l'aide des formules (6.21) satisfont à toutes les équations aux différences à $O(h)$ près. On peut maintenant tirer la même conclusion que dans le cas d'un problème mixte: il est naturel de s'attendre à ce que les équations aux différences aient pour solutions les fonctions u, p décalées par rapport à $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ de quantités $O(h)$. Comme $\tilde{u}$, $\tilde{p}$ diffèrent à leur tour par $O(h)$ de la solution exacte $\hat{u}$, $\hat{p}$ par leur construction (6.21), on peut affirmer qu'il existe une solution des équations aux différences s'écartant de la solution exacte $\hat{u}$, $\hat{p}$ de $O(h)$.

En conclusion, faisons quelques remarques sur la manière d'éliminer l'effet découvert. Comme on le voit d'après les formules (6.19), pour l'atténuer il est préférable de choisir pour le réseau des pas $\bar{h}$ et $\bar{\bar{h}}$ tels que soit remplie la condition

$$\frac{\bar{h}}{\bar{c}_0} \approx \frac{\bar{\bar{h}}}{\bar{\bar{c}}_0}. \qquad (6.25)$$

Dans les cas où on y parvient, l'effet décrit consistant dans les « sauts » de pression et de vitesse extrapolées sur la frontière de

contact à gauche et à droite peut pratiquement être supprimé, ce qui témoigne de l'augmentation de la précision du schéma à la frontière. Bien entendu, il faut agir avec circonspection. S'il y a plusieurs frontières, on peut, en choisissant les pas dans les domaines intérieurs, obtenir une diminution des discontinuités sur toutes les frontières. Mais malgré cela la différence des erreurs reste la même. Nous nous bornerons à cette remarque sans analyser en détail l'effet noté. En outre, dans les problèmes de gazodynamique non linéaires étudiés dans les chapitres suivants de notre ouvrage, la condition (6.25) est difficile à remplir, la vitesse du son c_0 variant au cours du calcul.

§ 7. Acoustique bidimensionnelle

Equations des ondes sonores dépendant de deux variables spatiales. Quadrillage aux différences. Lois de conservation aux différences. Calcul des grandeurs auxiliaires (« grandes ») à l'aide des décompositions de discontinuité. Formulation des conditions aux limites. Calcul des « grandes » valeurs aux frontières.

Le schéma aux différences décrit aux §§ 2, 5 pour l'intégration numérique des équations de l'acoustique à une variable spatiale se généralise facilement quoique pas tout à fait trivialement au cas de deux variables spatiales ou plus. Considérons, à titre d'exemple, son application au système d'équations différentielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{7.1}$$

décrivant la propagation des ondes sonores dépendant de deux variables spatiales x et y. Ici $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ sont deux composantes de la vitesse du milieu (sur x et y respectivement), $p = p(x, y, t)$ est la pression dans le milieu. Les constantes ρ_0 et c_0 ont le même sens qu'au cas unidimensionnel du § 1.

La construction du schéma aux différences débute par celle du réseau aux différences sur lequel on fera le calcul. Pour simplifier choisissons le réseau rectangulaire uniforme (quadrillage) représenté sur la figure 7.1. Il est formé par deux familles de droites. La première famille est constituée par les droites $x = x_j$ parallèles à l'axe des y, la seconde par les droites $y = y_k$ parallèles à l'axe des x. On suppose que la quantité $h_x = x_j - x_{j-1}$ est la même pour toutes les valeurs de j et la quantité $h_y = y_k - y_{k-1}$ pour toutes les valeurs de k. Appelons h_x et h_y *pas du quadrillage* en x et en y respectivement. Le rectangle dont les sommets se trouvent aux points $(x_{j-1},$

y_{k-1}), (x_j, y_{k-1}), (x_j, y_k), (x_{j-1}, y_k) sera appelé *maille du quadrillage* de numéro $(j - 1/2, k - 1/2)$.

On suppose que les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ décrivant l'état du milieu à l'instant t soient constantes dans les limites d'une maille de quadrillage et à ces constantes on attribue le numéro de la maille correspondante. Ainsi pour une maille de numéro $(j - 1/2, k - 1/2)$ elles sont de la forme $u_{j-1/2, k-1/2}$, $v_{j-1/2, k-1/2}$, $p_{j-1/2, k-1/2}$.

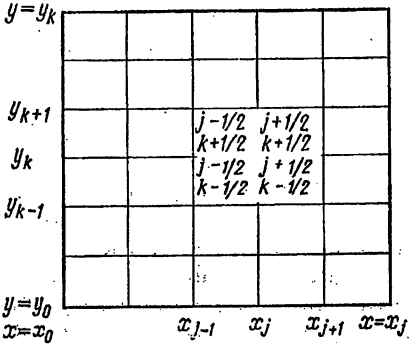


Fig. 7.1

Le calcul s'effectue par pas en temps successifs. Un pas de calcul consiste à déterminer d'après les valeurs $\{(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}\}$ à l'instant $t = t_0$ les mêmes valeurs constantes dans chaque maille pour l'instant $t = t_0 + \tau$, où τ est la valeur du pas en temps. Pour distinguer leurs valeurs à l'instant $t_0 + \tau$ les numéros de la maille se présenteront sous forme d'indices supérieurs: $(u, v, p)^{j-1/2, k-1/2}$ sont des valeurs pour une maille de numéro $(j - 1/2, k - 1/2)$ à l'instant $t_0 + \tau$.

Pour déduire les formules de calcul on s'appuiera sur les relations intégrales traduisant les lois de conservation de la masse et de l'impulsion pour le problème acoustique traité:

$$\oint\!\!\oint \rho_0 u\, dx\, dy + p\, dy\, dt = 0,$$

$$\oint\!\!\oint \rho_0 v\, dx\, dy + p\, dx\, dt = 0, \tag{7.2}$$

$$\oint\!\!\oint p\, dx\, dy + \rho_0 c_0^2 (u\, dy\, dt + v\, dx\, dt) = 0.$$

Les intégrales des premiers membres de ces égalités peuvent être prises sur toute surface fermée, sphère homéomorphe dans l'espace tridimensionnel x, y, t. Le système d'équations différentielles (7.1) est une conséquence de ces lois de conservation.

Appliquons la première égalité intégrale (7.2):

$$\oint\!\!\oint \rho_0 u\, dx\, dy + p\, dy\, dt = 0$$

à la maille de numéro $(j - 1/2,\ k - 1/2)$ pendant le temps τ. Il en vient

$$\rho_0 (u^{j-1/2,\,k-1/2} - u_{j-1/2,\,k-1/2})\, h_x h_y + \\ + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} [p(x_j,\ y,\ t) - p(x_{j-1},\ y,\ t)]\, dy\, dt = 0. \qquad (7.3)$$

Dans cette formule le terme

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x_j,\ y,\ t)\, dy\, dt \qquad (7.4)$$

est une intégrale prise sur la frontière entre les mailles $(j - 1/2,\ k - 1/2)$ et $(j + 1/2,\ k - 1/2)$ à laquelle il est naturel d'associer le numéro $(j,\ k - 1/2)$. La coordonnée x est constante le long de cette frontière et est égale à x_j. A la différence du cas unidimensionnel traité au § 1, la quantité $p(x_j,\ y,\ t)$ figurant dans cette intégrale ne sera pas constante le long de la frontière de la maille même si, pour $t = t_0$, à l'intérieur des mailles $(j - 1/2,\ k - 1/2)$ et $(j + 1/2,\ k - 1/2)$ les valeurs sont constantes et le pas τ est suffisamment petit. La constance sera rompue au voisinage des points anguleux où se créent des écoulements non unidimensionnels complexes. Toutefois, on n'en tiendra pas compte lors de mise au point du schéma aux différences et on remplacera dans (7.4) la fonction $p(x_j,\ y,\ t)$ par une constante dans l'intervalle de temps de t_0 à $t_0 + \tau$. On désignera cette constante par $P_{j,\,k-1/2}$.

A l'heure actuelle, on a effectué avec succès un bon nombre de calculs d'après le schéma et cette procédure semble parfaitement naturelle. Mais il était très difficile de se décider à le faire à l'époque où ce schéma venait d'être mis au point. En 1956 K. Brouchlinski avait mis au point un schéma pour les équations de l'acoustique avec un calcul exact des solutions aux sommets d'après les solutions fonctionnelles invariantes de S. Sobolev. On a fait les calculs de simulation d'après ce schéma, lesquels, comparés aux calculs d'après le schéma « grossier » décrit, se sont trouvés pratiquement les mêmes. C'est seulement après cela qu'il fut décidé d'utiliser le schéma « grossier » qu'on est en train de décrire. La recherche de Brouchlinski a été réalisée sur l'initiative et sous la direction de I. Gelfand qui suivait attentivement l'élaboration du schéma. La contribution de ce dernier fut essentielle.

Revenons à la description du schéma. En introduisant une constante analogue $P_{j-1,\,k-1/2}$ pour le calcul du second terme intégral

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{y_{k-1}}^{y_k} p(x_{j-1},\ y,\ t)\, dy\, dt$$

de la formule (7.3), on obtient le résultat suivant:

$$\rho_0 (u^{j-1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \\ + \tau h_y (P_{j, k-1/2} - P_{j-1, k-1/2}) = 0. \quad (7.5)$$

On transforme de façon analogue les autres lois de conservation (7.2) en formules discrétisées:

$$\rho_0 (v^{j-1/2, k-1/2} - v_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \tau h_x (P_{j-1/2, k} - P_{j-1/2, k-1}) = 0, \quad (7.6)$$

$$(p^{j-1/2, k-1/2} - p_{j-1/2, k-1/2}) h_x h_y + \tau \rho_0 c_0^2 h_y (U_{j, k-1/2} - U_{j-1, k-1/2}) + \\ + \tau \rho_0 c_0^2 h_x (V_{j-1/2, k} - V_{j-1/2, k-1}) = 0.$$

On n'a pas encore défini, dans ces formules, les quantités P, U, V qui doivent être calculées sur les frontières des mailles (on les appellera dans la suite « grandes » valeurs). Par analogie avec le schéma unidimensionnel on utilisera, pour leur calcul, les solutions des problèmes modèles qu'on va convenir d'appeler *calcul des décompositions de discontinuité.*

Supposons que dans le demi-plan $x < x_j$ l'état du milieu à un certain instant soit donné par des constantes $(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}$ et dans le demi-plan $x > x_j$ par des constantes $(u, v, p)_{j+1/2, k-1/2}$.

Alors, comme nous l'avons vu au § 1, il se crée des ondes sonores se propageant à droite et à gauche à la vitesse du son c_0 et sur la ligne $x = x_j$ les valeurs des grandeurs u, p se calculent d'après les formules analogues à (1.12):

$$u = U_{j, k-1/2} = \frac{u_{j-1/2, k-1/2} + u_{j+1/2, k-1/2}}{2} - \frac{p_{j+1/2, k-1/2} - p_{j-1/2, k-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \quad (7.7)$$

$$p = P_{j, k-1/2} = \\ = \frac{p_{j-1/2, k-1/2} + p_{j+1/2, k-1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{u_{j+1/2, k-1/2} - u_{j-1/2, k-1/2}}{2}.$$

Ce sont précisément ces quantités qu'on va utiliser dans les formules (7.5), (7.6). Notons que la grandeur $V_{j, k-1/2}$ n'y figure pas, et il ne sera donc pas nécessaire de la déterminer.

Pour le calcul des « grandes » valeurs $P_{j-1/2, k}$, $V_{j-1/2, k}$ on considère le problème analogue de la décomposition de discontinuité qui aura lieu si pour $y < y_k$ on introduit un milieu à constantes $(u, v, p)_{j-1/2, k-1/2}$ et pour $y > y_k$ celui à constantes $(u, v, p)_{j-1/2, k+1/2}$. Alors, on aura sur la ligne $y = y_k$:

$$v = V_{j-1/2, k} = \frac{v_{j-1/2, k-1/2} + v_{j-1/2, k+1/2}}{2} - \frac{p_{j-1/2, k+1/2} - p_{j-1/2, k-1/2}}{2\rho_0 c_0}, \quad (7.8)$$

$$p = P_{j-1/2, k} = \frac{p_{j-1/2, k-1/2} + p_{j-1/2, k+1/2}}{2} - \rho_0 c_0 \frac{v_{j-1/2, k+1/2} - v_{j-1/2, k-1/2}}{2}.$$

On n'a pas besoin de calculer $U_{j-1/2,\,k}$.

Des formules (7.5), (7.6) on peut expliciter les valeurs $(u, v, p)^{j-1/2,\,k-1/2}$ pour l'instant $t = t_0 + \tau$ (i.e. sur la couche « supérieure »):

$$
\begin{aligned}
u^{j-1/2,\,k-1/2} &= u_{j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_x}(P_{j,\,k-1/2} - P_{j-1,\,k-1/2}),\\
v^{j-1/2,\,k-1/2} &= v_{j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_y}(P_{j-1/2,\,k} - P_{j-1/2,\,k-1}),\\
p^{j-1/2,\,k-1/2} &= p_{j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{h_x}\rho_0 c_0^2 (U_{j,\,k-1/2} - U_{j-1,\,k-1/2}) - \\
&\qquad - \frac{\tau}{h_y}\rho_0 c_0^2 (V_{j-1/2,\,k} - V_{j-1/2,\,k-1})
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

et, en utilisant les formules (7.7), (7.8) pour les « grandes » valeurs auxiliaires, obtenir leurs expressions explicites en fonction des quantités $\{(u, v, p)_{j-1/2,\,k-1/2}\}$ à l'instant t_0 (sur la couche « inférieure »). On peut vérifier que le système d'équations aux différences obtenu approche le système d'équations différentielles (7.1) au premier ordre d'approximation à condition de supposer les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ suffisamment lisses.

Jusque-là on élaborait le schéma aux différences dans l'hypothèse que le maillage était illimité dans la direction des variables x et y. En réalité, cependant, le calcul se fait dans un domaine fini sur les frontières duquel on se donne des conditions aux limites. Pour simplifier considérons le cas où le domaine représente un rectangle limité par les droites $x = x_0$, $x = x_J$, $y = y_0$, $y = y_K$. Pour qu'on puisse déterminer toutes les grandeurs $(u, v, p)^{j-1/2,\,k-1/2}$ à partir du système d'égalités (7.9) il faut le compléter par des formules pour le calcul des « grandes » valeurs suivantes:

$$
\begin{aligned}
&P_{0,\,k-1/2},\ U_{0,\,k-1/2} && \text{à la frontière gauche} && x = x_0,\\
&P_{J,\,k-1/2},\ U_{J,\,k-1/2} && \text{à la frontière droite} && x = x_J,\\
&P_{j-1/2,\,0},\ V_{j-1/2,\,0} && \text{à la frontière inférieure} && y = y_0,\\
&P_{j-1/2,\,K},\ V_{j-1/2,\,K} && \text{à la frontière supérieure} && y = y_K.
\end{aligned}
$$

Analysons la situation sur l'intervalle $y_{k-1} < y < y_k$ de la frontière gauche. Par analogie avec le cas unidimensionnel une équation pour les « grandes » valeurs s'écrit comme la relation exprimant la conservation de l'invariant riemannien $u - p/(\rho_0 c_0)$ le long des caractéristiques $dx/dt = -c_0$ d'un système d'équations

« unidimensionnel » :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (7.10)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=0$$

découlant de (7.1) après l'élimination des dérivées en y. Cette relation a la forme

$$U_{0,\,k-1/2}-\frac{1}{\rho_0 c_0}P_{0,\,k-1/2}=u_{1/2,\,k-1/2}-\frac{1}{\rho_0 c_0}p_{1/2,\,k-1/2}. \qquad (7.11)$$

S'il y a, à la frontière $x = x_0$, une condition aux limites

$$\alpha_0(y, t)\,u(x_0, y, t)+\beta_0(y, t)\,p(x_0, y, t)=f_0(y, t), \qquad (7.12)$$

alors, en l'approximant sur l'intervalle $y_{k-1} < y < y_k$ par la relation

$$\alpha_{0,\,k-1/2}U_{0,\,k-1/2}+\beta_{0,\,k-1/2}P_{0,\,k-1/2}=f_{0,\,k-1/2}, \qquad (7.13)$$

il devient possible de calculer à partir de (7.11) et (7.13) les grandeurs nécessaires $U_{0,\,k-1/2}$, $P_{0,\,k-1/2}$. Pour cela il faut seulement que soit remplie la condition

$$\begin{vmatrix}\alpha_0(y, t) & \beta_0(y, t)\\ 1 & -\dfrac{1}{\rho_0 c_0}\end{vmatrix}\neq 0,$$

analogue à la première condition (5.2) du cas unidimensionnel.

Si la condition aux limites a une forme plus générale que (7.12) et contient la fonction $v(x_0, y, t)$, alors en l'approchant par la relation

$$\alpha_{0,\,k-1/2}U_{0,\,k-1/2}+\beta_{0,\,k-1/2}P_{0,\,k-1/2}+\gamma_{0,\,k-1/2}V_{0,\,k-1/2}=f_{0,\,k-1/2}$$

il devient possible d'éliminer $V_{0,\,k-1/2}$ en posant par exemple $V_{0,\,k-1/2}=v_{1/2,\,k-1/2}$ conformément à l'équation $\partial v/\partial t = 0$ du système « unidimensionnel » (7.10). Une méthode tout à fait analogue permet de déterminer des « grandes » valeurs $(P, U)_{J,\,k-1/2}$ à la frontière droite $x = x_J$. La seule différence consiste dans le changement de (7.11) en

$$U_{J,\,k-1/2}+\frac{1}{\rho_0 c_0}P_{J,\,k-1/2}=u_{J-1/2,\,k-1/2}+\frac{1}{\rho_0 c_0}p_{J-1/2,\,k-1/2}$$

qui exprime la constance de l'invariant $u + p/(\rho_0 c_0)$ le long des caractéristiques $dx/dt = c_0$, et dans l'utilisation des conditions aux limites pour la frontière droite.

Pour calculer les « grandes » valeurs aux frontières inférieure ($y = y_0$) et supérieure ($y = y_K$) du domaine de calcul on a recours

au système d'équations « unidimensionnel »

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c_0^2\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{7.14}$$

découlant de (7.1) par l'élimination des dérivées par rapport à x. Nous ne nous y arrêterons pas car tout le procédé est analogue à celui exposé pour la frontière gauche.

§ 8. Stabilité du schéma bidimensionnel de l'acoustique

Loi de conservation de l'énergie. Norme discrète des fonctions. Factorisation d'un schéma bidimensionnel en ceux « unidimensionnels ». Condition suffisante de stabilité du schéma en norme énergétique pour les conditions aux limites dissipatives. Démonstration de sa nécessité par la méthode de Fourier.

Pour le système d'équations (7.1) traité au paragraphe précédent on a l'identité

$$u\left(\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)+v\left(\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)+p\left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(pu)+\frac{\partial}{\partial y}(pv)=0,$$

d'où il découle que sur toute surface fermée et pour les fonctions lisses u, v, p

$$\oint\!\!\oint\left(\rho_0\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx\,dy+pu\,dy\,dt+pv\,dt\,dx=0. \tag{8.1}$$

Cette identité intégrale représente la loi de conservation de l'énergie des ondes acoustiques dans le cas de deux variables spatiales.

L'analyse de la stabilité s'appuie sur l'inégalité représentant un modèle discret de l'identité intégrale (8.1). Par analogie avec le cas unidimensionnel on définit la norme énergétique d'un vecteur fonction discret $F=\{(u, v, p)_{j-1/2,\,k-1/2}\}$ sur une couche temporelle $t=t_0$ par la formule suivante:

$$\|F\|=$$
$$=\sqrt{\sum_j h_x\sum_k h_y\left(\rho_0\frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2}+v^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2}+\frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2}\right)}. \tag{8.2}$$

On montrera que notre schéma aux différences n'accroît pas cette norme discrète en faisant un pas en temps si ce pas est limité par une condition spécifiée plus bas. C'est précisément ce qui implique la stabilité du schéma aux différences décrit.

Pour démontrer que $\| F \|$ ne croît pas on se servira de la méthode de factorisation du schéma multidimensionnel en schémas « unidimensionnels » proposée dans l'ouvrage [5]. A notre schéma aux différences correspond une certaine matrice H qui convertit un vecteur F associé à l'instant $t = t_0$ en un vecteur $\tilde{F}$ de même dimension répondant à l'instant $t = t_0 + \tau$. Cette matrice H peut être représentée sous la forme

$$H = I + \tau_x H_x + \tau_y H_y =$$
$$= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y}\right) I + \frac{\tau}{\tau_x}(I + \tau_x H_x) + \frac{\tau}{\tau_y}(I + \tau_y H_y). \quad (8.3)$$

Ici I est une matrice unité et les matrices $I + \tau_x H_x$ et $I + \tau_y H_y$ donnent les schémas aux différences « unidimensionnels » dont le premier s'applique au vecteur $\{(u, v, p)_{j-1/2,\, k-1/2}\}$ à l'indice $k - 1/2$ fixe et le second à l'indice $j - 1/2$ fixe; τ_x et τ_y sont les « pas en temps » de ces schémas « unidimensionnels » fictifs ($\tau_x > 0$, $\tau_y > 0$).

Comme, selon la définition de la norme,

$$\| H \| \leqslant \left| 1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y} \right| \cdot \| I \| + \frac{\tau}{\tau_x} \| I + \tau_x H_x \| + \frac{\tau}{\tau_y} \| I + \tau_y H_y \|,$$

alors pour que le schéma donné par la matrice H soit stable, il suffit ae choisir son pas à partir de la condition

$$1 - \frac{\tau}{\tau_x} - \frac{\tau}{\tau_y} \geqslant 0, \quad (8.4)$$

si τ_x et τ_y assurent les inégalités

$$\| I + \tau_x H_x \| \leqslant 1, \quad \| I + \tau_y H_y \| \leqslant 1, \quad (8.5)$$

c.-à-d. la stabilité des schémas « unidimensionnels ».

Ecrivons les formules pour ces schémas « unidimensionnels » correspondant aux matrices $I + \tau_x H_x$ et $I + \tau_y H_y$. Le premier schéma est donné par les formules

$$\bar{u}^{j-1/2,\, k-1/2} = u_{j-1/2,\, k-1/2} - \frac{\tau}{\rho_0 h_x}(P_{j,\, k-1/2} - P_{j-1,\, k-1/2}),$$
$$\bar{p}^{j-1/2,\, k-1/2} = p_{j-1/2,\, k-1/2} - \frac{\tau_x}{h_x} \rho_0 c_0^2 (U_{j,\, k-1/2} - U_{j-1,\, k-1/2}), \quad (8.6)$$
$$\bar{v}^{j-1/2,\, k-1/2} = v_{j-1/2,\, k-1/2},$$

où les « grandes » valeurs sont définies par les formules (7.7), et approche le système d'équations (7.10), le second schéma par les formules

$$\bar{\bar{u}}^{j-1/2,\, k-1/2} = u_{j-1/2,\, k-1/2},$$
$$\bar{\bar{v}}^{j-1/2,\, k-1/2} = v_{j-1/2,\, k-1/2} - \frac{\tau_y}{h_y} \frac{1}{\rho_0}(P_{j-1/2,\, k} - P_{j-1/2,\, k-1}), \quad (8.7)$$
$$\bar{\bar{p}}^{j-1/2,\, k-1/2} = p_{j-1/2,\, k-1/2} - \frac{\tau_y}{h_y} \rho_0 c_0^2 (V_{j-1/2,\, k} - V_{j-1/2,\, k-1}),$$

où les « grandes » valeurs sont définies par les formules (7.8), e approche le système d'équations (7.14).

Donnons les conditions assurant la première inégalité (8.5):

$$\| I + \tau_x H_x \| \leqslant 1. \tag{8.8}$$

Le travail nécessaire pour cela a été fait au § 3 pour le problèm sans conditions aux limites et au § 6 pour le cas des conditions au limites dissipatives. D'après les transformations qui y figuren on peut immédiatement affirmer qu'à la condition

$$\tau_x \leqslant \frac{h_x}{c_0} \tag{8.9}$$

on a l'inégalité

$$\sum_j h_x \left[\rho_0 \frac{(\bar{u}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{p}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j h_x \left[\rho_0 \frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2} + \frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2} \right] -$$

$$- \tau_x (P_{J,\,k-1/2} U_{J,\,k-1/2} - P_{0,\,k-1/2} U_{0,\,k-1/2}) \tag{8.10}$$

quelle que soit la valeur de l'indice $k - 1/2$.

Supposons que les conditions aux limites sont dissipatives sur les frontières gauche et droite du domaine de calcul, i.e. en vertu de ces conditions aux limites sont vérifiées les inégalités

$$(pu)_{x=x_0} \leqslant 0, \quad (pu)_{x=x_J} \geqslant 0 \tag{8.11}$$

pour toute valeur de y ($y_0 \leqslant y \leqslant y_K$).

Alors dans la formule (8.10) on peut rejeter les derniers termes et en se servant de ce que $\bar{v}^{j-1/2,\,k-1/2} = v_{j-1/2,\,k-1/2}$ en vertu de la dernière relation (8.6) et après la sommation sur l'indice k obtenir l'inégalité

$$\sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{(\bar{u}^{j-1/2,\,k-1/2})^2 + (\bar{v}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{p}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2} + v^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2} + \frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2} \right]. \tag{8.12}$$

Ainsi donc, la condition (8.8) de stabilité d'un schéma « unidimensionnel » en coordonnée x a lieu s'il y a restriction (8.9) sur le pas τ_x et si les conditions aux limites sont dissipatives, ce qui peut être assuré par les inégalités (8.11) pour tous les u, p satisfaisant aux conditions aux limites gauches et droites.

D'une manière tout à fait analogue on peut obtenir pour le second schéma « unidimensionnel » (8.7) l'inégalité

$$\sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{(\bar{\bar{u}}^{j-1/2,\,k-1/2})^2 + (\bar{\bar{v}}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2} + \frac{(\bar{\bar{p}}^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2} + v^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2} + \frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2} \right]$$

qui signifie la stabilité du schéma « unidimensionnel » en coordonnée y s'il y a restriction sur le pas $\tau_y \leqslant h_y/c_0$ et si les conditions aux limites sur les frontières inférieure et supérieure du domaine de calcul sont dissipatives, i.e. si en vertu de ces conditions on a les inégalités

$$(pv)_{y=y_0} \leqslant 0, \quad (pv)_{y=y_K} \geqslant 0 \tag{8.13}$$

pour toute valeur de x ($x_0 \leqslant x \leqslant x_J$).

Ainsi on a montré que notre schéma aux différences pour le système d'équations de l'acoustique (7.1) à deux variables spatiales décrit au paragraphe précédent, sur un réseau rectangulaire, lorsqu'on fait un pas en temps, assure l'inégalité

$$\sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{(u^{j-1/2,\,k-1/2})^2 + (v^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2} + \frac{(p^{j-1/2,\,k-1/2})^2}{2\rho_0 c_0^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j h_x \sum_k h_y \left[\rho_0 \frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2} + v^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2} + \frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2} \right] -$$

$$- \tau \sum_k [(PU)_{J,\,k-1/2} - (PU)_{0,\,k-1/2}] -$$

$$- \tau \sum_j [(PV)_{j-1/2,\,K} - (PV)_{j-1/2,\,0}] \tag{8.14}$$

à condition que le pas en temps τ obéisse à l'inégalité (8.4), i.e.

$$\tau \left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} \right) \leqslant 1, \quad \tau_x = \frac{h_x}{c_0}, \quad \tau_y = \frac{h_y}{c_0}. \tag{8.15}$$

Notons, comme on l'a fait dans le cas unidimensionnel, que τ_x peut être envisagé comme le temps nécessaire pour que les ondes sonores engendrées par la décomposition de discontinuité à la frontière verticale de la maille $x = x_J$ atteignent la frontière opposée de la maille et y modifient les valeurs obtenues de « grandes » quantités auxiliaires. La quantité τ_y a une signification analogue.

L'inégalité (8.14) peut être considérée comme un analogue aux différences de la loi de conservation de l'énergie (8.1). Si sont vérifiées les inégalités (8.11) et (8.13) assurant les conditions aux limites

dissipatives, l'inégalité (8.14) traduit la stabilité du schéma aux différences considéré dans le sens de norme énergétique (8.2) avec la contrainte (8.15) imposée au pas en temps τ.

La contrainte (8.15) a été obtenue comme condition suffisante assurant la stabilité. Or, en utilisant la méthode de Fourier, on peut se convaincre que cette condition est également nécessaire. Pour dissiper tout doute à ce sujet et montrer que ce n'est pas là le fait d'un procédé artificiel visant à la factorisation (8.3) de notre schéma en schémas « unidimensionnels » on va entreprendre l'étude qui s'impose. Comme dans le cas unidimensionnel, l'analyse sera effectuée uniquement pour le problème sans conditions aux limites. Cherchons les solutions du système d'équations aux différences (7.9), (7.7), (7.8) sous la forme

$$\begin{bmatrix} u^{j-1/2,\ k-1/2} \\ v^{j-1/2,\ k-1/2} \\ p^{j-1/2,\ k-1/2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_{j-1/2,\ k-1/2} \\ v_{j-1/2,\ k-1/2} \\ p_{j-1/2,\ k-1/2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ p^* \end{bmatrix} e^{i(j\varphi+k\psi)}.$$

En substituant cette représentation dans les équations aux différences on aboutira au système de trois équations linéaires auxquelles doivent satisfaire u^*, v^*, p^*. Ce système est de la forme

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_x}\,\frac{e^{i\varphi}-2+e^{-i\varphi}}{2}\right] u^* + \frac{\tau}{\rho_0 h_x}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}\,p^* = 0,\\
&\left[\lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_y}\,\frac{e^{i\psi}-2+e^{-i\psi}}{2}\right] v^* + \frac{\tau}{\rho_0 h_y}\,\frac{e^{i\psi}-e^{-i\psi}}{2}\,p^* = 0,\\
&\left[\lambda - 1 - \frac{\tau c_0}{h_x}\,\frac{e^{i\varphi}-2+e^{-i\varphi}}{2} - \frac{\tau c_0}{h_y}\,\frac{e^{i\psi}-2+e^{-i\psi}}{2}\right] p^* + \\
&\qquad + \rho_0 c_0^2 \left[\frac{\tau}{h_x}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}\,u^* + \frac{\tau}{h_y}\,\frac{e^{i\psi}-e^{-i\psi}}{2}\,v^*\right] = 0.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Pour qu'il puisse être résolu il faut et il suffit que le déterminant de ce système soit nul. Il en résulte une équation cubique pour les valeurs propres de λ de l'opérateur aux différences de passage à la couche temporelle suivante. Nous ne la donnons pas parce qu'elle est fort longue. La condition nécessaire de stabilité consiste en ce que toutes les racines de cette équation doivent être soumises à la condition $|\lambda| \leqslant 1$ quelles que soient les valeurs des paramètres φ et ψ. Pour nos buts il suffit de considérer un cas particulier $\varphi = \psi = \pi$. Alors, la matrice du système (8.16) devient diagonale, et les trois racines de l'équation caractéristique pour λ se détermi-

nent immédiatement:

$$\lambda_1 = 1 - 2\frac{\tau c_0}{h_x} = 1 - 2\frac{\tau}{\tau_x},$$

$$\lambda_2 = 1 - 2\frac{\tau c_0}{h_y} = 1 - 2\frac{\tau}{\tau_y}, \qquad (8.17)$$

$$\lambda_3 = 1 - 2\frac{\tau c_0}{h_x} - 2\frac{\tau c_0}{h_y} = 1 - 2\tau\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y}\right).$$

Elles sont toutes réelles et inférieures à l'unité. Si la condition suffisante (8.15) trouvée précédemment est remplie:

$$\tau\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y}\right) \leqslant 1,$$

les trois racines (8.17) sont supérieures à -1, sinon la racine λ_3 dépasse les limites du segment $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$, rendant instable le schéma aux différences. On en conclut donc que la contrainte imposée au pas (8.15) n'est pas seulement suffisante mais qu'elle est aussi nécessaire pour que le système soit stable.

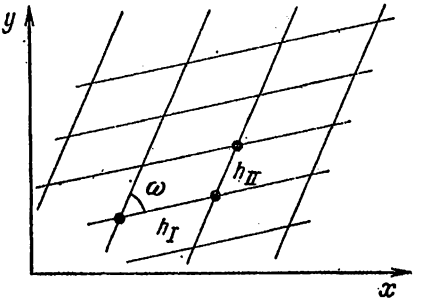


Fig. 8.1

Si le réseau aux différences n'est pas rectangulaire mais parallélogrammatique (fig. 8.1), au cours du calcul des pas admissibles des schémas « unidimensionnels » τ_x et τ_y on n'entend évidemment pas par les valeurs h_x et h_y les longueurs des côtés h_I et h_{II}, mais les hauteurs du parallélogramme représentant la maille du réseau. En tout cas, cela est en accord avec la signification physique des valeurs τ_x et τ_y envisagées ci-dessus comme les intervalles de temps pendant lesquels les ondes se formant par décomposition de discontinuités à la frontière de maille atteignent le côté opposé. C'est à G. Alalykine qu'on doit la condition nécessaire de stabilité pour un réseau parallélogrammatique qu'il a obtenue sous cette forme lors de la première élaboration du schéma. En essayant de démontrer que les conditions (8.15) sont suffisantes les auteurs de l'ouvrage [5] ont été amenés, non immédiatement d'ailleurs, à utiliser la factorisation de l'opérateur aux différences et la concavité de la norme que nous avons pratiquées plus haut.

§ 9. Schéma unidimensionnel explicite pour un système hyperbolique quelconque

Systèmes symétriques. Intégrale de l'énergie. Réduction du système à la forme canonique. Schéma aux différences. L'inégalité principale est un analogue aux différences de l'intégrale de l'énergie. Condition de stabilité. Formulation correcte des conditions aux limites. Les conditions aux limites dissipatives garantissent la stabilité du schéma pour un pas suffisamment petit. Construction du schéma pour un système hyperbolique asymétrique. Modification du schéma au cas des coefficients variables.

Le caractère simple et suggestif de l'algorithme de construction du schéma aux différences, que nous avons décrit sur les exemples des équations de l'acoustique, incite tout naturellement à appliquer ce dernier au cas d'un système linéaire hyperbolique d'équations différentielles du premier ordre. Nous le ferons pour le cas des systèmes symétriques.

La théorie des équations hyperboliques (voir p. ex. [130]), nous apprend que le système d'équations

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=Qu+f \tag{9.1}$$

est dit *t-hyperbolique* (d'après Friedrichs [128]) si les matrices A, B, C sont symétriques *) et si la matrice A est en outre définie positive.

Les éléments des matrices carrées A, B, C de dimensions m^* sont supposés être des fonctions suffisamment lisses de x, y, t. (S'ils dépendent, en outre, de u, le système est appelé quasi linéaire.) La matrice Q n'est pas supposée symétrique. Ses éléments peuvent dépendre de x, y, t tout comme les composantes du vecteur fonction f.

Pour les systèmes t-hyperboliques symétriques il est possible d'établir une identité importante qui se trouve à la base de construction de la théorie de ces systèmes. En multipliant scalairement les équations (9.1) par un vecteur $2u$ et en effectuant des transformations simples qui mettent en jeu la symétrie des matrices A, B, C on peut obtenir l'identité suivante vérifiée pour toute solution de (9.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu,\ u)=(Du,\ u)+2(f,\ u), \tag{9.2}$$

où $(u,\ v)$ est le produit scalaire de u par v,

$$D=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-(Q+Q^*),$$

Q^* étant la transposée de Q. Après l'intégration sur un domaine arbitraire Ω, sphère homéomorphe dans un espace tridimensionnel (x, y, t) intérieure au domaine d'existence de la solution u, suivie de la transformation de l'intégrale de volume du premier membre de (9.2) en intégrale sur la surface Γ limitant le domaine Ω on arrive

*) Hermitiennes dans le cas complexe.

à l'identité intégrale

$$\oint_{\Gamma}([\zeta A+\xi B+\eta C]\,u,\ u)\,d\Gamma=$$

$$=\int\int_{\Omega}\int[(Du,\ u)+2(f,\ u)]\,d\Omega, \qquad (9.3)$$

où (ξ, η, ζ) est le vecteur unité de la normale extérieure à la surface Γ. Nous ne donnons pas une déduction plus détaillée des égalités (9.2) et (9.3). On peut la trouver par exemple dans le § 9 du livre [130]. L'identité obtenue (9.3) dite *intégrale de l'énergie* pour le système symétrique (9.1) est appelée à jouer, sous une forme aux différences, un rôle essentiel dans la justification de la stabilité du schéma dont la construction sera décrite.

Dans le présent paragraphe nous allons traiter le cas unidimensionnel où les équations (9.1) dépendent de t et d'une variable spatiale x. Pour rendre l'exposé plus simple nous supposerons que les matrices A et B sont constantes et le second membre du système est nul:

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (9.4)$$

Alors la forme différentielle de l'intégrale de l'énergie (9.2) s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au,\ u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu,\ u)=0, \qquad (9.5)$$

et la loi de conservation de l'énergie (9.3)

$$\oint_{\Gamma}(Au,\ u)\,dx-(Bu,\ u)\,dt=0, \qquad (9.6)$$

où Γ est un contour fermé arbitraire dans le plan (x, t).

Considérons la transformation du vecteur fonction u de la forme $u=\Lambda v$ avec une matrice non dégénérée Λ. Le système (9.4) peut alors être récrit sous la forme suivante:

$$\Lambda^*A\Lambda\frac{\partial v}{\partial t}+\Lambda^*B\Lambda\frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad (9.7)$$

où Λ^* est une transposée de Λ.

Comme A et B sont des matrices symétriques, A étant définie positive, alors, comme on sait par l'algèbre linéaire, on peut choisir Λ de façon que la matrice $\Lambda^*A\Lambda$ devienne unitaire et la matrice $\Lambda^*B\Lambda$ devienne diagonale, ses éléments étant notés μ_m $(m=1, \ldots, m^*)$. Remarquons que d'après la loi de l'inertie des formes quadratiques le nombre des valeurs positives et négatives parmi les quantités μ_m ne dépend que de la matrice B et est indépendant du choix de la

transformation qui la rend diagonale. Dans le cas considéré les μ_m peuvent être trouvés comme les racines d'une équation caractéristique

$$\det \| \mu A + B \| = 0. \tag{9.8}$$

Quant à la matrice Λ, elle peut être construite de la façon suivante. La transformation $u = Hv_1$ avec la matrice orthogonale H dont les colonnes sont les vecteurs propres normés de la matrice A amène la matrice A à la forme diagonale $A_1 = H^*AH$, les éléments λ_m étant disposés suivant la diagonale principale. λ_m sont les valeurs propres de A, i.e. les racines de l'équation $\det \| A - \lambda I \| = 0$, tous les $\lambda_m > 0$, la matrice A étant définie positive. En même temps la matrice B se transforme en une matrice $B_1 = H^*BH$. Ensuite, la substitution $v_1 = Dv_2$ avec la matrice diagonale dont les éléments sont $1/\sqrt{\lambda_m}$ transforme A_1 en $D^*A_1D = I$, où I est une matrice unité, et B_1 en une matrice $B_2 = D^*B_1D$. Enfin la transformation $v_2 = Kv$ avec la matrice orthogonale K composée des coordonnées des vecteurs propres de la matrice B_2 laissera inchangée la matrice unité I et changera la matrice B_2 en matrice diagonale $M = K^*B_2K$ dont les éléments μ_m se trouvent sur la diagonale principale. Ainsi pour la matrice recherchée Λ on peut prendre $\Lambda = HDK$. Il découle de ce qui précède que dans sa construction il y a un arbitraire lié au choix de la base orthogonale constituée par les vecteurs propres dans le sous-espace invariant qui correspond aux valeurs multiples μ_m si celles-ci existent.

Le système d'équations canonique obtenu pour le vecteur fonction v

$$\frac{\partial v}{\partial t} + M\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9.9}$$

si on le considère sans conditions aux limites, se décompose en m^* équations indépendantes par rapport aux composantes isolées $v^{(m)}$:

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} + \mu_m \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = 0. \tag{9.10}$$

Les composantes $v^{(m)}$ sont appelées invariants riemanniens et elles sont constantes le long des caractéristiques $dx/dt = \mu_m$. Cette circonstance rend plus simple la description de la construction du schéma aux différences que nous allons aborder maintenant.

Comme d'habitude, nous commençons par donner les nœuds du réseau $\{x_j\}$ supposé uniforme ($x_j - x_{j-1} = h$) et illimité dans les deux sens de l'axe des x. L'ensemble de quantités $\{u_{j-1/2}\}$ donne le vecteur fonction $u(x, t)$ sur la couche inférieure $t = t_0$ et $\{u^{j-1/2}\}$ sur la couche supérieure $t = t_0 + \tau$. Elles sont liées entre elles par les formules représentant les lois de conservation discrètes pour

l'intervalle $j - 1/2$:

$$A\frac{u^{j-1/2}-u_{j-1/2}}{\tau}+B\frac{U_j-U_{j-1}}{h}=0 \tag{9.11}$$

U_j sont de « grandes » valeurs déterminées comme la solution du problème de la décomposition de discontinuité pour le système d'équations considéré (9.4) avec les données initiales :

$$u=\begin{cases} u_{j-1/2} & \text{pour} \quad x<x_j, \\ u_{j+1/2} & \text{pour} \quad x>x_j. \end{cases} \tag{9.12}$$

Pour des raisons méthodiques il apparaît plus commode d'écrire cette solution en termes de vecteur fonction $v = \Lambda^{-1}u$ pour lequel le système d'équations a une forme canonique (9.9) avec la matrice diagonale M. Alors la formule aux différences (9.11) prend la forme

$$\frac{v^{j-1/2}-v_{j-1/2}}{\tau}+M\frac{V_j-V_{j-1}}{h}=0. \tag{9.13}$$

Les composantes du vecteur V_j sont déterminées comme suit :

$$V_j^{(m)}=\begin{cases} v_{j-1/2}^{(m)} & \text{si} \quad \mu_m>0, \\ v_{j+1/2}^{(m)} & \text{si} \quad \mu_m<0. \end{cases} \tag{9.14}$$

Si $\mu_m = 0$, les quantités $V_j^{(m)}$ peuvent être choisies arbitrairement puisqu'elles seront multipliées par μ_m dans (9.13).

Il découle des formules (9.13), (9.14) que la composante de numéro m que nous omettrons vérifie les égalités

$$v^{j-1/2}=\begin{cases} \left(1-\mu_m\frac{\tau}{h}\right)v_{j-1/2}+\mu_m\frac{\tau}{h}v_{j-3/2}, & \text{si} \quad \mu_m>0, \\ \left(1+\mu_m\frac{\tau}{h}\right)v_{j-1/2}-\mu_m\frac{\tau}{h}v_{j+1/2}, & \text{si} \quad \mu_m<0, \\ v_{j-1/2}, & \text{si} \quad \mu_m=0. \end{cases} \tag{9.15}$$

A présent on va se servir, comme au § 3, de ce que pour $0 < \nu \leqslant 1$ de l'égalité $c = (1 - \nu)\, a + \nu b$ il découle par les transformations élémentaires (3.11) l'inégalité $c^2 \leqslant (1 - \nu)\, a^2 + \nu b^2$. En définitive, on aboutit à l'inégalité

$$\frac{(v^{j-1/2})^2-(v_{j-1/2})^2}{\tau}+\mu_m\frac{V_j^2-V_{j-1}^2}{h}\leqslant 0$$

pour chaque composante si la condition $|\mu_m|\frac{\tau}{h} \leqslant 1$ est remplie. En réunissant ces inégalités pour toutes les composantes on obtient l'inégalité vectorielle suivante :

$$\frac{(v^{j-1/2},\, v^{j-1/2})-(v_{j-1/2},\, v_{j-1/2})}{\tau}+\frac{(MV_j,\, V_j)-(MV_{j-1},\, V_{j-1})}{h}\leqslant 0 \tag{9.16}$$

satisfaite si l'on impose au pas τ la restriction

$$\frac{\tau}{h} \cdot \max_m |\mu_m| \leqslant 1. \tag{9.17}$$

Avant de passer à l'exposé suivant faisons une remarque analogue à celle faite à la fin du § 3 lors de l'étude des équations de l'acoustique. En analysant attentivement la démonstration de l'inégalité (9.16) on s'aperçoit que sa déduction fait appel aux quantités $v^{(m)}_{j-3/2}$ correspondant à $\mu_m > 0$ et aux quantités $v^{(m)}_{j+1/2}$ correspondant à $\mu_m < 0$. L'inégalité (9.16) sera satisfaite pour des valeurs quelconques de ces quantités à condition que V_j soient donnés par les formules (9.14). Cette remarque nous sera utile par la suite lorsqu'il s'agira des problèmes avec les conditions aux limites.

Rappelons maintenant que $u = \Lambda v$, $\Lambda^* A \Lambda = I$, $\Lambda^* B \Lambda = M$. L'inégalité obtenue (9.16) peut être récrite sous la forme

$$\frac{(Au^{j-1/2},\ u^{j-1/2}) - (Au_{j-1/2},\ u_{j-1/2})}{\tau} + \frac{(BU_j,\ U_j) - (BU_{j-1},\ U_{j-1})}{h} \leqslant 0. \tag{9.18}$$

Elle représente l'analogue aux différences de l'intégrale de l'énergie (9.5), (9.6) pour l'intervalle du réseau $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ pendant l'intervalle de temps correspondant au passage de la couche « inférieure » à la couche « supérieure ». En sommant les inégalités (9.18) sur toutes les valeurs de l'indice j de $-\infty$ à $+\infty$ et en supposant que la somme $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} (Au_{j-1/2},\ u_{j-1/2})$ est finie pour les données initiales on arrive à la conclusion que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (Au^{j-1/2},\ u^{j-1/2}) \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} (Au_{j-1/2},\ u_{j-1/2}), \tag{9.19}$$

si la condition (9.17) est satisfaite. On a ainsi démontré la stabilité de notre schéma aux différences sans conditions aux limites lorsque le pas en temps vérifie la restriction $\frac{\tau}{h} \max_m |\mu_m| \leqslant 1$.

La condition suffisante de stabilité qu'on a obtenue est aussi nécessaire. Cela est facile à vérifier par la méthode de Fourier sur les équations scalaires (9.15) et nous ne nous y arrêterons pas.

Les quantités μ_m représentant les racines de l'équation caractéristique

$$\det \| \mu A + B \| = 0,$$

la restriction obtenue sur le pas en temps peut être encore formulée comme suit :

$$\tau/h \leqslant \xi, \tag{9.20}$$

où $\xi > 0$ est le plus grand nombre possible pour lequel les matrices $A \pm \xi B$ sont non négatives, i.e. $(Au, u) \pm \xi (Bu, u) \geqslant 0$ quel que soit le vecteur u.

Envisageons maintenant le problème mixte avec les données initiales $u(x, 0) = u_0(x)$ définies sur le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$ et avec des conditions aux limites quelconques aux extrémités gauche et droite du segment:

$$\Phi_I u(x_I, t) = g_I(t),$$
$$\Phi_{II} u(x_{II}, t) = g_{II}(t). \tag{9.21}$$

Ici Φ_I, Φ_{II} sont des matrices rectangulaires ayant respectivement m_I et m_{II} lignes; $g_I(t)$, $g_{II}(t)$ des vecteurs fonctions donnés de dimension convenable, compatibles avec les données initiales pour $t = 0$.

On sait par la théorie des équations hyperboliques (voir par exemple [130]) que pour qu'un problème soit correctement posé les conditions aux limites (9.21) peuvent être données d'une façon qui est loin d'être arbitraire. Désignons par m_+ le nombre de valeurs positives parmi les quantités μ_m décrites plus haut et par m_- le nombre de valeurs négatives (alors $m_0 = m^* - m_+ - m_-$ est évidemment le nombre de valeurs nulles). Alors, pour que le problème mixte considéré soit correct à la frontière gauche, il faut donner $m_I = m_+$ conditions aux limites indépendantes (suivant le nombre de caractéristiques « partant » de la frontière gauche) et à la frontière droite respectivement $m_{II} = m_-$ conditions aux limites indépendantes (suivant le nombre de caractéristiques qui en « partent »). Par ailleurs, on ne peut pas donner comme conditions aux limites les combinaisons des inconnues correspondant aux invariants riemanniens pour les caractéristiques « arrivant » à la frontière.

En outre, on supposera que les conditions aux limites sont dissipatives dans le sens défini au § 13 de l'ouvrage [130]: *aux points frontières tout vecteur fonction u satisfaisant aux conditions aux limites vérifie les inégalités*:

$$\begin{aligned} (Bu, u) &\leqslant) \text{ à la frontière gauche } x = x_I, \\ (Bu, u) &\geqslant 0 \text{ à la frontière droite } x = x_{II}. \end{aligned} \tag{9.22}$$

En abordant la construction du schéma aux différences nous décomposons, comme d'habitude, le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$ par les nœuds du réseau $\{x_j\}$ en J intervalles tels que $x_0 = x_I$, $x_J = x_{II}$. Pour simplifier, le réseau est supposé uniforme: $x_j - x_{j-1} = h$. Pour des raisons de méthode comme auparavant, il nous est plus commode de décrire le schéma dans les termes du vecteur fonction v. Dans les intervalles internes les équations aux différences ont déjà été écrites sous la forme des formules (9.13), (9.14). Elles doivent être complétées par des équations pour le calcul des « grandes » valeurs V_0 et V_J aux points frontières. Pour le nœud gauche $x_0 = x_I$ le système correspondant de m^* équations pour le calcul du vecteur V_0 se compose de la façon suivante. En qualité des m_+ équations correspondant aux caractéristiques « partantes » avec $\mu_m > 0$ on prend les conditions

aux limites données (écrites en composantes du vecteur fonction v). Les m_- équations avec $\mu_m < 0$ sont choisies convenablement parmi les équations (9.14) qui, pour $j = 0$, acquièrent la forme suivante :

$$V_0^{(m)} = v_{1/2}^{(m)}.$$

On procède de la même façon pour les m_0 valeurs avec $\mu_m = 0$. La construction du système d'équations pour le nœud limite droit $x = x_J$ est tout à fait analogue et nous ne la décrivons pas.

Le système d'équations en termes des composantes du vecteur fonction v est complètement décrit. Sa notation en composantes du vecteur fonction u se fait à l'aide de la transformation inverse $v = \Lambda^{-1}u$. (Notons qu'il est en principe possible de calculer les quantités $v^{j-1/2}$ sur la couche « supérieure » et c'est seulement après cela qu'on peut « reconstituer » $u^{j-1/2}$; toutefois il n'est pas obligatoire de le faire à chaque pas de calcul si ce n'est pas indispensable.)

Pour ce qui est de l'analyse de la stabilité du schéma aux différences décrit, elle est déjà préparée par les faits exposés. En sommant les inégalités (9.16) sur l'indice j on obtient

$$\sum_{j=1}^{J} (v^{j-1/2}, v^{j-1/2}) \leqslant \sum_{j=1}^{J} (v_{j-1/2}, v_{j-1/2}) + \\ + \frac{\tau}{h}[(MV_0, V_0) - (MV_J, V_J)],$$

si le pas τ satisfait toujours à la condition (9.17) ou (9.20).

Lors de la déduction de cette inégalité conformément à la remarque faite à la page 74 après la déduction de l'inégalité (9.16), pour les valeurs extrêmes $j = 1$ et $j = J$ on a utilisé des valeurs « au-delà » des limites seulement pour les caractéristiques « partant » des frontières du domaine de calcul qui restaient libres. Les relations le long de ces caractéristiques sont remplacées par les conditions aux limites dissipatives d'après lesquelles

$$(MV_0, V_0) \leqslant 0, \quad (MV_J, V_J) \geqslant 0.$$

Pour le vecteur fonction u on obtient par la sommation des inégalités (9.18)

$$\sum_{j=1}^{J} (Au^{j-1/2}, u^{j-1/2}) \leqslant \sum_{j=1}^{J} (Au_{j-1/2}, u_{j-1/2}) + \\ + \frac{\tau}{h}[(BU_0, U_0) - (BU_J, U_J)]. \qquad (9.23)$$

Comme les conditions aux limites dissipatives vérifient selon (9.22) les inégalités

$$(BU_0, U_0) \leqslant 0, \quad (BU_J, U_J) \geqslant 0, \qquad (9.24)$$

alors on a l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{J} (Au^{j-1/2}, u^{j-1/2}) \leqslant \sum_{j=1}^{J} (Au_{j-1/2}, u_{j-1/2}),$$

si le pas τ satisfait à la restriction (9.17) ou (9.20). Elle signifie précisément la stabilité du schéma pour un problème mixte au sens de la norme correspondante des fonctions discrètes.

Signalons encore un fait important. Jusque-là nous avons considéré le système d'équations

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

avec les matrices symétriques A, B et la matrice définie positive A.

L'algorithme présenté de la construction d'un schéma aux différences peut se généraliser au cas d'un système d'équations hyperboliques

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{9.25}$$

où la matrice C n'est pas symétrique (pour simplifier posons que C est constante). Pour ce faire il nous suffit de savoir établir les caractéristiques du système (9.25) ainsi que les relations sur elles. Soit λ une racine de l'équation caractéristique

$$\det \| C - \lambda I \| = 0$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$\det \| C^* - \lambda I \| = 0,$$

z étant le vecteur propre de la matrice C^* associé à cette valeur λ, i.e. $C^* z = \lambda z$. Alors $z^* C = \lambda z^*$, où z^* est un vecteur ligne que l'on appelle vecteur propre à gauche de la matrice C. Comme on le voit sans peine, en vertu de l'équation (9.25) on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(z, u) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(z, u) = 0,$$

i.e. le long de la caractéristique $dx/dt = \lambda$ on a la relation

$$(z, u) = \text{const}.$$

L'hyperbolicité du système (9.25) suppose que la matrice C^* possède un système complet de m^* vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres réelles λ (pouvant être multiples). En fait, nous avons décrit un algorithme de réduction du système (9.25) à la forme canonique

$$\frac{\partial v}{\partial t} + M\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

avec la matrice diagonale M (on parle parfois de l'écriture du système en « caractéristiques »). On y parvient en introduisant des variables auxiliaires $v = Lu$ avec la matrice L dont les lignes représentent les vecteurs propres de la matrice C^*. Cela étant, le schéma aux différences décrit peut être réalisé pour le système (9.25) par exemple sous forme d'équations

$$\frac{u^{j-1/2} - u_{j-1/2}}{\tau} + C\frac{U_j - U_{j-1}}{h} = 0 \tag{9.26}$$

pour lesquelles les « grandes » valeurs sont recherchées tout comme auparavant sur la base du système de la forme canonique.

Notons toutefois (et cela est important !) que l'argumentation de la stabilité d'un tel schéma et la discussion des questions concernant la dissipativité des conditions aux limites ne sont possibles que grâce au fait que le système (9.25) avec la matrice asymétrique C peut être symétrisé, i.e. il peut être ramené à un système symétrique du type (9.4) en multipliant par une certaine matrice symétrique définie positive et en transformant, éventuellement, le vecteur fonction cherché. En particulier, une telle symétrisation est illustrée par la réduction du système (9.25) à la forme canonique avec la matrice diagonale M. Par la suite, on reviendra plusieurs fois à ce fait.

La question de la symétrisation est déjà soulevée, quoique sous forme triviale, pour les équations de l'acoustique (1.1) qu'il faut récrire sous la forme

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ou sous la forme matricielle

$$\begin{Vmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0.$$

On verra par la suite que dans certains cas, notamment pour le système d'équations quasi linéaire de la dynamique des gaz (voir § 22), la réalisation pratique d'une telle symétrisation est loin d'être simple. La situation est simplifiée, nous venons de le constater, par le fait qu'il est possible de construire un schéma aux différences sans appliquer la symétrisation. Toutefois, en analysant l'algorithme on aura toujours en vue son éventuelle réalisation.

En conclusion, nous nous permettons quelques remarques au sujet de la généralisation de l'algorithme décrit au cas où les matrices du système (9.4) sont variables, i.e. leurs éléments représentent des fonctions de x, t. Il semble rationnel de le donner dans ce cas sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}[A(x, t)u] + \frac{\partial}{\partial x}[B(x, t)u] = Q(x, t)u + f \tag{9.27}$$

dite *de divergence*. L'exigence de l'hyperbolicité suppose qu'il peut être ramené à la forme canonique par la transformation $u - \Lambda v$ en tout point (x, t). Evidemment, la matrice Λ de passage de u aux « invariants riemanniens » v sera propre pour chaque point (x, t), comme le sont, d'ailleurs, les racines de l'équation caractéristique $\mu_m = \mu_m(x, t)$. Par conséquent, les quantités m_+, m_-, m_0 déterminant la structure des équations pour les « grandes » valeurs auxiliaires dépendront dorénavant du point (x, t). On verra apparaître dans l'équation canonique (9.9) un second membre même si l'équation primitive (9.27) était homogène :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + M(x, t)\frac{\partial v}{\partial x} = H(x, t)\, v + g(x, t); \qquad (9.28)$$

$H(x, t)$ est une matrice dont les éléments sont fonction de x, t. La présence du second membre dans l'équation (9.27) n'apporte, de toute évidence, qu'une « contribution supplémentaire » au second membre de l'équation (9.28).

Naturellement, les seconds membres dans les équations (9.27) doivent être pris en considération dans les lois de conservation discrètes (9.11). En les écrivant dans chaque intervalle du réseau on utilise les matrices propres à cet intervalle, i.e. on confère aux équations (9.11) la forme

$$(A^{j-1/2}u^{j-1/2} - A_{j-1/2}u_{j-1/2}) + \frac{\tau}{x_j - x_{j-1}}(B_j U_j - B_{j-1}U_{j-1}) = \\ = \tau(Q_{j-1/2}u_{j-1/2} + f_{j-1/2}). \qquad (9.29)$$

En calculant les « grandes » valeurs U_j le premier ordre d'approximation du schéma aux différences se conserve formellement même si l'on se sert des égalités (9.14) pour le cas homogène en y passant aux composantes du vecteur fonction $u = \Lambda v$. Dans une approche plus correcte il convient d'écrire les équations aux différences correspondantes en partant des équations (9.28). Du point de vue formel le premier ordre d'approximation se conserve également en utilisant, pour le calcul des seconds membres dans les équations (9.29), les quantités $u_{j-1/2}$ de la « couche inférieure », ce qui est le plus simple du point de vue de l'algorithme. D'ailleurs, dans certains cas il apparaît logique de calculer les seconds membres en utilisant $u^{j-1/2}$ de la couche « supérieure » ou les valeurs moyennes $\frac{1}{2}(u_{j-1/2} + u^{j-1/2})$.

§ 10. Schéma bidimensionnel explicite pour un système hyperbolique quelconque

Position d'un problème mixte avec les conditions aux limites dissipatives. Schéma aux différences sur un quadrillage. L'inégalité fondamentale est un analogue de l'intégrale d'énergie. Condition suffisante de stabilité d'un schéma sans conditions aux limites et avec les conditions aux limites dissipatives.

Condition de stabilité pour un maillage parallélogrammatique. Equations bidimensionnelles de la théorie de l'élasticité linéaire.

Soit un système symétrique (9.1) t-hyperbolique (selon Friedrichs) à deux variables spatiales x, y. Au paragraphe précédent nous en avons déjà donné la définition requise et l'intégrale d'énergie (9.3). Dans le présent paragraphe nous allons décrire la construction du schéma aux différences pour un tel système. Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les matrices A, B, C sont constantes et que le second membre du système (9.1) est nul:

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{10.1}$$

La forme différentielle de l'intégrale d'énergie (9.2) se présentera alors ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au, u)+\frac{\partial}{\partial x}(Bu, u)+\frac{\partial}{\partial y}(Cu, u)=0. \tag{10.2}$$

Pour le système (10.1) considérons un problème dont les données initiales $u(x, y, 0)=u_0(x, y)$ sont définies soit dans tout le plan x, y, soit dans un rectangle $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$, $y_I \leqslant y \leqslant y_{II}$. Dans le dernier cas l'identité intégrale (9.3) exprimant la loi de conservation de l'énergie acquiert la forme

$$\int_{x_I}^{x_{II}}\int_{y_I}^{y_{II}}[(Au, u)_{t=t_1}-(Au, u)_{t=t_0}]\,dx\,dy+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{y_I}^{y_{II}}[(Bu, u)_{x=x_{II}}-(Bu, u)_{x=x_I}]\,dy\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_I}^{x_{II}}[(Cu, u)_{y=y_{II}}-(Cu, u)_{y=y_I}]\,dx\,dt=0. \tag{10.3}$$

Aux frontières du rectangle doivent être données certaines conditions aux limites:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_I(y, t)\,u(x_I, y, t)&=\varphi_I(y, t),\\ \Phi_{II}(y, t)\,u(x_{II}, y, t)&=\varphi_{II}(y, t),\end{aligned}\right\} y_I\leqslant y\leqslant y_{II},\quad t>t_0,$$
$$\left.\begin{aligned}\Psi_I(x, t)\,u(x, y_I, t)&=\psi_I(x, t),\\ \Psi_{II}(x, t)\,u(x, y_{II}, t)&=\psi_{II}(x, t),\end{aligned}\right\} x_I\leqslant x\leqslant x_{II},\quad t>t_0; \tag{10.4}$$

Φ_I, Φ_{II}, Ψ_I, Ψ_{II} sont les matrices rectangulaires dont le nombre de lignes est égal aux nombres correspondants de valeurs propres néga-

tives ou positives des matrices $A^{-1}B$ ou $A^{-1}C$. Les conditions aux limites sont supposées dissipatives dans le sens de la définition déjà présentée au paragraphe précédent (voir également § 13 du livre [130]) : en tout point de frontière et pour tout vecteur fonction u satisfaisant aux conditions aux limites on a les inégalités

$$\begin{array}{llll} (Bu, u)\leqslant 0 & \text{pour} & x=x_{\mathrm{I}}, & (Bu, u)\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x=x_{\mathrm{II}}, \\ (Cu, u)\leqslant 0 & \text{pour} & y=y_{\mathrm{I}}, & (Cu, u)\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad y=y_{\mathrm{II}}. \end{array} \tag{10.5}$$

Soit un quadrillage défini par deux familles de droites $x = x_j$ et $y = y_k$. Pour simplifier, posons constants les pas du réseau $x_j - x_{j-1} = h_x$, $y_k - y_{k-1} = h_y$. Le vecteur fonction cherché u se détermine par l'ensemble de valeurs $\{u_{j-1/2,\ k-1/2}\}$ sur la couche inférieure, au temps $t = t_0$, et par les valeurs $\{u^{j-1/2,\ k-1/2}\}$ sur la couche supérieure, $t = t_0 + \tau$. Pour elles on écrit les équations aux différences

$$A\frac{u^{j-1/2,\ k-1/2}-u_{j-1/2,\ k-1/2}}{\tau}+B\frac{U_{j,\ k-1/2}-U_{j-1,\ k-1/2}}{h_x}+ \\ +C\frac{U_{j-1/2,\ k}-U_{j-1/2,\ k-1}}{h_y}=0 \tag{10.6}$$

pouvant être considérées comme la forme discrète des lois de conservation pour les équations (10.1). Par analogie avec ce qui avait été dit au § 7 pour l'équation de l'acoustique à deux variables spatiales, les grandeurs auxiliaires $U_{j,\ k-1/2}$ sur les arêtes « verticales » des mailles $x = x_j$ sont déterminées comme des solutions des problèmes « unidimensionnels » de décomposition de discontinuité pour le système d'équations

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{10.7}$$

avec les données initiales

$$u=\begin{cases} u_{j-1/2,\ k-1/2} & \text{pour} \quad x<x_j, \\ u_{j+1/2,\ k-1/2} & \text{pour} \quad x>x_j. \end{cases} \tag{10.8}$$

Les grandeurs auxiliaires $U_{j-1/2,\ k}$ sur les arêtes « horizontales » des mailles $y = y_k$ représentent les solutions des problèmes de décomposition de discontinuité pour un système unidimensionnel

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{10.9}$$

avec les données initiales

$$u=\begin{cases} u_{j-1/2,\ k-1/2} & \text{pour} \quad y<y_k, \\ u_{j-1/2,\ k+1/2} & \text{pour} \quad y>y_k. \end{cases} \tag{10.10}$$

Pour ce schéma aux différences a lieu l'inégalité suivante:

$$\frac{(Au^{j-1/2,\,k-1/2},\ u^{j-1/2,\,k-1/2})-(Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2})}{\tau}+$$

$$+\frac{(BU_{j,\,k-1/2},\ U_{j,\,k-1/2})-(BU_{j-1,\,k-1/2},\ U_{j-1,\,k-1/2})}{h_x}+$$

$$+\frac{(CU_{j-1/2,\,k},\ U_{j-1/2,\,k})-(CU_{j-1/2,\,k-1},\ U_{j-1/2,\,k-1})}{h_y}\leqslant 0, \quad (10.11)$$

si la quantité τ est suffisamment petite. Cette inégalité représente un analogue aux différences de la forme différentielle (10.2) pour l'intégrale et joue un rôle important dans la démonstration de la stabilité du schéma et dans les estimations des solutions. Pour sa démonstration, construisons des schémas aux différences « unidimensionnels » associés aux systèmes d'équations (10.7) et (10.9). Ecrivons pour le système (10.7) les équations aux différences de la forme

$$A\frac{\overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2}-u_{j-1/2,\,k-1/2}}{\tau_x}+B\frac{U_{j,\,k-1/2}-U_{j-1,\,k-1/2}}{h_x}=0, \quad (10.12)$$

où $U_{j,\,k-1/2}$ sont déjà définis plus haut. Selon ce qui était dit au paragraphe précédent, pour le schéma (10.12) on a l'inégalité

$$(A\overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2},\ \overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2})-(Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2})+$$

$$+\frac{\tau_x}{h_x}[(BU_{j,\,k-1/2},\ U_{j,\,k-1/2})-(BU_{j-1,\,k-1/2},\ U_{j-1,\,k-1/2})]\leqslant 0, \quad (10.13)$$

si $\tau_x/h_x \leqslant \xi$, où ξ est le plus grand nombre pour lequel la matrice $A \pm \xi B$ est non négative. De même, pour le système (10.9) on écrit les équations aux différences

$$A\frac{\overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2}-u_{j-1/2,\,k-1/2}}{\tau_y}+C\frac{U_{j-1/2,\,k}-U_{j-1/2,\,k-1}}{h_y}=0 \quad (10.14)$$

pour lesquelles a lieu une inégalité analogue

$$(A\overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2},\ \overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2})-(Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2})+$$

$$+\frac{\tau_y}{h_y}[(CU_{j-1/2,\,k},\ U_{j-1/2,\,k})-(CU_{j-1/2,\,k-1},\ U_{j-1/2,\,k-1})]\leqslant 0, \quad (10.15)$$

si $\tau_y/h_y = \eta$, où η est le plus grand nombre pour lequel la matrice $A \pm \eta C$ est non négative.

Soit θ un paramètre numérique. Choisissons dans les équations (10.12) et (10.14) les pas τ_x et τ_y tels que

$$\tau_x = \theta\xi h_x, \quad \tau_y = \theta\eta h_y.$$

Les inégalités (10.13) et (10.15) seront satisfaites si $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. En additionnant (10.12) et (10.14) on obtient une équation

$$A\left(\frac{\overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2}-u_{j-1/2,\,k-1/2}}{\theta\xi h_x}+\frac{\overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2}-u_{j-1/2,\,k-1/2}}{\theta\eta h_y}\right)+$$

$$+B\frac{U_{j,\,k-1/2}-U_{j-1,\,k-1/2}}{h_x}+C\frac{U_{j-1/2,\,k}-U_{j-1/2,\,k-1}}{h_y}=0.$$

Elle se transforme en l'équation (10.6) qui nous est nécessaire, si l'on pose

$$u^{j-1/2,\,k-1/2}=\frac{\tau}{\theta\xi h_x}\overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2}+\frac{\tau}{\theta\eta h_y}\overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2} \quad (10.16)$$

à condition que

$$\frac{\tau}{\theta\xi h_x}+\frac{\tau}{\theta\eta h_y}=1. \quad (10.17)$$

Par conséquent, on peut effectivement trouver le paramètre $0 \leqslant \theta \leqslant$ $\leqslant 1$ si l'on impose au pas la restriction

$$\tau\left(\frac{1}{\tau_x}+\frac{1}{\tau_y}\right)\leqslant 1, \quad \tau_x=\xi h_x, \quad \tau_y=\eta h_y. \quad (10.18)$$

Les quantités τ_x, τ_y représentent les valeurs maximales du pas en temps pour lesquelles sont stables les schémas « unidimensionnels » (10.12) et (10.14). Par ailleurs, il découle de (10.16) et de (10.17) que

$$(Au^{j-1/2,\,k-1/2},\ u^{j-1/2,\,k-1/2})\leqslant\frac{\tau}{\theta\xi h_x}(A\overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2},\ \overline{u}^{j-1/2,\,k-1/2})+$$

$$+\frac{\tau}{\theta\eta h_y}(A\overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2},\ \overline{\overline{u}}^{j-1/2,\,k-1/2}).$$

En appliquant ensuite les inégalités (10.13) et (10.5) on parvient à l'inégalité à établir (10.11) qui est ainsi démontrée à condition que le pas τ soit soumis à la restriction (10.18).

Si le schéma aux différences est considéré sur un maillage illimité remplissant tout le plan, la sommation des inégalités (10.11) sur toutes les mailles du réseau conduit à

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(Au^{j-1/2,\,k-1/2},\ u^{j-1/2,\,k-1/2})\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2}) \quad (10.19)$$

à condition que la somme figurant dans le second membre soit bornée pour les données initiales. L'inégalité obtenue (10.19) signifie la stabilité du schéma aux différences décrit dans le sens de la norme énergétique correspondante des fonctions discrètes, si τ vérifie la condition (10.18).

Si le domaine de calcul est un rectangle

$$x_{\mathrm{I}}\leqslant x\leqslant x_{\mathrm{II}}, \quad y_{\mathrm{I}}\leqslant y\leqslant y_{\mathrm{II}}$$

et les nœuds du maillage aux différences sont choisis tels que

$$x_0 = x_{\mathrm{I}},\quad x_J = x_{\mathrm{II}},\quad y_0 = y_{\mathrm{I}},\quad y_K = y_{\mathrm{II}},$$

alors en sommant les inégalités (10.11) sur toutes les mailles du réseau on aboutit au résultat suivant:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Au^{j-1/2,\,k-1/2},\ u^{j-1/2,\,k-1/2}) - \\ -\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2}) \leqslant \\ \leqslant \frac{\tau}{h_x}\sum_{k=1}^{K}[(BU_{0,\,k-1/2},\ U_{0,\,k-1/2}) - (BU_{J,\,k-1/2},\ U_{J,\,k-1/2})] + \\ + \frac{\tau}{h_y}\sum_{j=1}^{J}[(CU_{j-1/2,\,0},\ U_{j-1/2,\,0}) - (CU_{j-1/2,\,K},\ U_{j-1/2,\,K})]. \qquad (10.20)$$

Cette inégalité représente un analogue aux différences de l'intégrale d'énergie (10.3) pour le système symétrique (10.1). Les conditions

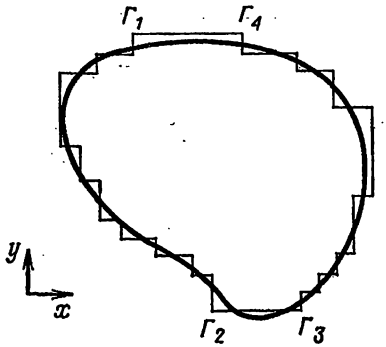


Fig. 10.1

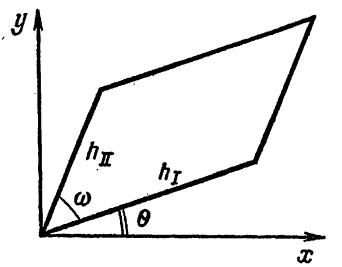


Fig. 10.2

aux limites (10.5) étant dissipatives, le second membre de l'inégalité (10.20) est négatif et, par conséquent, le schéma aux différences pour un problème mixte est stable à condition que la contrainte (10.18) sur le pas en temps τ ait lieu.

La démonstration de la stabilité donnée ici peut être étendue au cas d'un domaine plus compliqué qu'un rectangle. Soit par exemple un maillage aux différences remplissant sur le plan x, y le domaine représenté sur la figure 10.1. En faisant la somme (10.11) sur toutes

ses mailles on obtient une inégalité de la forme

$$\sum_{j,\,k} (Au^{j-1/2,\,k-1/2},\ u^{j-1/2,\,k-1/2}) - \sum_{j,\,k} (Au_{j-1/2,\,k-1/2},\ u_{j-1/2,\,k-1/2}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau}{h_x} \sum_{j}^{\mathrm{I}} \xi_j (BU_{j,\,k-1/2},\ U_{j,\,k-1/2}) +$$

$$+ \frac{\tau}{h_y} \sum_{k}^{\mathrm{II}} \eta_k (CU_{j-1/2,\,k},\ U_{j-1/2,\,k}). \qquad (10.21)$$

La première somme (Σ^{I}) dans le second membre de cette inégalité s'étend aux arêtes « verticales » des mailles $x = x_j$ situées sur le contour extérieur du domaine découpé par le maillage et la seconde somme (Σ^{II}) aux arêtes « horizontales » des mailles $y = y_k$ situées sur le contour extérieur. Les quantités ξ_j et η_k sont égales à ± 1 en fonction de l'orientation de la normale extérieure au domaine (sur la figure 10.1 par exemple $\xi_j = +1$ sur le contour « gauche » $\Gamma_1\Gamma_2$; $\xi_j = -1$ sur le contour « droit » $\Gamma_3\Gamma_4$; $\eta_k = 1$ sur le contour « inférieur » $\Gamma_2\Gamma_3$; $\eta_k = -1$ sur le contour « supérieur » $\Gamma_4\Gamma_1$). Lorsque les conditions aux limites sont dissipatives, le second membre de l'inégalité (10.21) est négatif et, par conséquent, le schéma aux différences pour le problème mixte correspondant est stable (bien entendu, la restriction (10.18) sur le pas en temps τ étant toujours en vigueur).

Par la suite, lors de la résolution des problèmes bidimensionnels de la dynamique des gaz on utilisera non seulement des quadrillages mais également des maillages dont les mailles représentent des quadrilatères de forme quelconque. Il nous semble intéressant, à ce propos, d'obtenir le critère de stabilité pour les maillages de formes plus générales. Cela s'avère possible avec un maillage régulier constitué par des parallélogrammes (voir fig. 8.1.). On va donc aborder cette question.

Notons tout d'abord que la transformation tangentielle des variables indépendantes

$$\bar{x} = \gamma_{11}x + \gamma_{12}y, \quad \bar{y} = \gamma_{21}x + \gamma_{22}y, \qquad (10.22)$$

les coefficients étant convenablement choisis, permet de transformer un quadrillage droit régulier en un quadrillage carré de côtés $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = 1$. En particulier, pour une maille du réseau représenté sur la figure 10.2 cette transformation est de la forme

$$\bar{x} = \frac{x \sin(\omega+\theta) - y\cos(\omega+\theta)}{h_{\mathrm{I}} \sin\omega},$$

$$\bar{y} = \frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega}. \qquad (10.23)$$

Le système initial (10.1) est ramené par transformation (10.22) à la forme

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+\overline{B}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}+\overline{C}\frac{\partial u}{\partial \bar{y}}=0, \tag{10.24}$$

où

$$\overline{B}=\gamma_{11}B+\gamma_{12}C, \quad \overline{C}=\gamma_{21}B+\gamma_{22}C, \tag{10.25}$$

si bien que le système (10.24) est également symétrique.

Avant de considérer le cas d'un système hyperbolique symétrique général prenons à titre d'exemple le système (7.1) des équations non stationnaires de l'acoustique à deux variables spatiales. Après la multiplication par ρ_0 de ses deux premières équations et par $1/(\rho_0 c_0^2)$ de la troisième il acquiert la forme matricielle de (10.1), les matrices des coefficients étant

$$A=\left\|\begin{matrix}\rho_0 & 0 & 0\\ 0 & \rho_0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|, \quad C=\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\|, \tag{10.26}$$

i.e. il devient symétrique. Cela étant, la construction du schéma aux différences et l'analyse de sa stabilité effectuées aux §§ 7, 8 deviennent un cas particulier de l'algorithme général qu'on vient de décrire. Il nous a paru logique d'exposer préalablement ces questions pour les équations de l'acoustique afin de donner une illustration « suggestive » de plusieurs notions dont nous nous servirons par la suite.

Les valeurs propres de la matrice $\gamma_1 B+\gamma_2 C-\mu A$ pour des valeurs quelconques γ_1 et γ_2 peuvent être calculées comme des racines de l'équation caractéristique

$$\left|\begin{matrix}-\mu\rho_0 & 0 & \gamma_1\\ 0 & -\mu\rho_0 & \gamma_2\\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\frac{1}{\rho_0 c_0^2}\mu\end{matrix}\right|=0.$$

Leurs valeurs sont

$$\mu_{1,2}=\pm c_0\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}, \quad \mu_3=0.$$

De sorte que pour les équations de l'acoustique les matrices $A\pm\overline{\xi}\overline{B}$ et $A\pm\overline{\eta}\overline{C}$, où $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont donnés par les formules (10.25), seront non négatives pour les valeurs $\overline{\xi}$ et $\overline{\eta}$ définies par les égalités

$$\overline{\xi}=\frac{1}{c_0\sqrt{\gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2}}, \quad \overline{\eta}=\frac{1}{c_0\sqrt{\gamma_{21}^2+\gamma_{22}^2}}. \tag{10.27}$$

Le schéma aux différences décrit pour le système d'équations (10.24) sur un réseau carré aux pas $\Delta\bar{x}=\Delta\bar{y}=1$ sera stable à con-

dition que le pas en temps τ satisfasse à la condition

$$\tau\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)\leqslant 1.$$

Compte tenu des formules (10.27) elle se met sous la forme

$$\tau c_0\left(\sqrt{\gamma_{11}^2+\gamma_{12}^2}+\sqrt{\gamma_{21}^2+\gamma_{22}^2}\right)\leqslant 1. \tag{10.28}$$

Mettons-y selon les formules (10.23) les valeurs

$$\gamma_{11}=\frac{\sin(\omega+\theta)}{h_{\mathrm{I}}\sin\omega},\qquad \gamma_{12}=-\frac{\cos(\omega+\theta)}{h_{\mathrm{I}}\sin\omega},$$

$$\gamma_{21}=-\frac{\sin\theta}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega},\qquad \gamma_{22}=\frac{\cos\theta}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega}.$$

Il en découle que pour un maillage parallélogrammatique, dont la maille est représentée sur la figure 10.2, notre schéma aux différences sera stable si le pas satisfait à la contrainte

$$\tau\left(\frac{c_0}{h_{\mathrm{I}}\sin\omega}+\frac{c_0}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega}\right)\leqslant 1. \tag{10.29}$$

La condition suffisante obtenue pour les équations de l'acoustique coïncide donc avec la condition nécessaire indiquée à la fin du § 8 qui stipule que dans le cas du maillage parallélogrammatique il faut prendre lors du calcul des pas unidimensionnels τ_x et τ_y les hauteurs $h_{\mathrm{I}}\sin\omega$ et $h_{\mathrm{II}}\sin\omega$ du parallélogramme au lieu des longueurs de ses côtés.

Envisageons à présent le cas d'un système hyperbolique symétrique quelconque.

Signalons avant tout que les matrices $A\pm\xi B$ et $A\pm\eta C$ étant positives pour certaines valeurs $\xi>0$, $\eta>0$ la matrice $A\pm\zeta(\gamma_1 B+\gamma_2 C)$ le sera obligatoirement pour la valeur de ζ tirée de la formule

$$\frac{1}{\zeta}=\frac{|\gamma_1|}{\xi}+\frac{|\gamma_2|}{\eta}.$$

Cette assertion découle de l'identité

$$A\pm\zeta(\gamma_1 B+\gamma_2 C)=\left[1-\zeta\left(\frac{|\gamma_1|}{\xi}+\frac{|\gamma_2|}{\eta}\right)\right]A+$$

$$+\zeta\frac{|\gamma_1|}{\xi}(A\pm\xi B\operatorname{sign}\gamma_1)+\zeta\frac{|\gamma_2|}{\eta}(A\pm\eta C\operatorname{sign}\gamma_2),$$

où

$$\operatorname{sign}\gamma=\begin{cases}1 \text{ si } \gamma>0,\\ -1 \text{ si } \gamma<0.\end{cases}$$

En l'appliquant aux matrices $\overline{B}$, $\overline{C}$ données par les formules (10.25) on trouve que les valeurs maximales $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ pour lesquelles les matrices $A\pm\overline{\xi B}$ et $A\pm\overline{\eta C}$ sont non négatives sont déterminées à

partir des égalités

$$\frac{1}{\xi} = \frac{|\gamma_{11}|}{\xi} + \frac{|\gamma_{12}|}{\eta}, \quad \frac{1}{\eta} = \frac{|\gamma_{21}|}{\xi} + \frac{|\gamma_{22}|}{\eta}. \tag{10.30}$$

Comme on l'a déjà montré plus haut, la condition suffisante de stabilité du schéma aux différences pour le système d'équations (10.24) sur un réseau carré aux pas $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = 1$ a la forme

$$\tau\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right) \leqslant 1$$

et compte tenu des formules (10.30) elle se transforme en

$$\tau\left[\frac{|\gamma_{11}|+|\gamma_{21}|}{\xi} + \frac{|\gamma_{12}|+|\gamma_{22}|}{\eta}\right] \leqslant 1.$$

En y substituant les valeurs concrètes des coefficients de transformation (10.23) nous obtenons que pour le maillage parallélogrammatique dont la maille est représentée sur la figure 10.2, le schéma aux différences associé à un système symétrique quelconque (10.1) sera stable si le pas τ est soumis à la restriction

$$\tau\left[\frac{1}{\xi}\left(\frac{|\sin(\omega+\theta)|}{h_{\mathrm{I}}\sin\omega} + \frac{|\sin\theta|}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega}\right) + \frac{1}{\eta}\left(\frac{|\cos(\omega+\theta)|}{h_{\mathrm{I}}\sin\omega} + \frac{|\cos\theta|}{h_{\mathrm{II}}\sin\omega}\right)\right] \leqslant 1.$$

Sous une forme moins précise mais plus maniable cette condition peut s'écrire

$$\tau\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{1}{h_{\mathrm{I}}} + \frac{1}{h_{\mathrm{II}}}\right)\frac{1}{\sin\omega} \leqslant 1.$$

La condition suffisante obtenue est un peu plus rigoureuse que le critère (10.29) pour les équations de l'acoustique. Ceci est lié aux estimations (10.30) pour les nombres propres des matrices $A \pm \overline{\xi B}$ et $A \pm \overline{\eta C}$. Dans chaque cas concret ces estimations peuvent, semble-t-il, être améliorées comme le montre la comparaison des formules (10.27) et (10.30) pour les équations de l'acoustique.

Faisons quelques observations sommaires sur les questions liées à la construction d'un schéma au cas où les éléments des matrices A, B, C dans les équations (10.1) sont fonction de x, y, t. L'algorithme de factorisation du schéma en schémas « unidimensionnels » ramène la solution de ces questions au niveau « unidimensionnel », ce qui fait entrer en jeu les remarques présentées à ce sujet à la fin du paragraphe précédent. Cela concerne en premier lieu la forme divergente des équations

$$\frac{\partial}{\partial t}[Au] + \frac{\partial}{\partial x}[Bu] + \frac{\partial}{\partial y}[Cu] = Qu + f. \tag{10.31}$$

La présence des seconds membres dans ces équations doit être prise en compte lors de la construction des équations aux différences qui leur sont associées et analogues à (10.6).

Si la matrice $Q \neq 0$, la façon la plus simple de calculer le second membre du point de vue de l'algorithme consiste à utiliser les valeurs $\{u_{j-1/2,\ k-1/2}\}$ de la couche « inférieure » bien que dans certains cas il semble plus logique de se servir des valeurs $u^{j-1/2,\ k-1/2}$ de la couche « supérieure » ou des valeurs $\frac{1}{2}(u_{j-1/2,\ k-1/2} + u^{j-1/2,\ k-1/2})$. Dans les équations aux différences « unidimensionnelles » (10.12) et (10.14) pour les systèmes correspondants (10.7) et (10.9) sous forme divergente on peut ne pas tenir compte du second membre dans le système (10.31). On peut vérifier que cela n'empêche pas d'obtenir le schéma aux différences du premier ordre d'approximation sur les solutions lisses.

Signalons ensuite que l'algorithme de construction du schéma aux différences que l'on a proposé peut également être réalisé dans le cas où les matrices du système d'équations traité ne sont pas symétriques. Dans ce cas aussi l'algorithme de factorisation permet de ramener les questions soulevées au niveau des problèmes « unidimensionnels ». En ce qui concerne la démonstration de la stabilité, l'estimation des solutions aux différences, le caractère dissipatif des conditions aux limites, on n'y parvient que pour le système qui peut être symétrisé, c'est-à-dire qui se ramène au système symétrique (10.1) grâce à la multiplication par une certaine matrice symétrique définie positive et, éventuellement, par le passage de u aux nouvelles fonctions cherchées v. La possibilité d'une telle symétrisation est toujours sous-entendue dans ce qui suit.

En particulier, le système (7.1) d'équations non stationnaires de l'acoustique à deux variables spatiales peut être symétrisé si l'on multiplie les deux premières équations par ρ_0 et la troisième par $\frac{1}{\rho_0 c_0^2}$. Sous forme matricielle, il se présente comme (10.26).

Les équations bidimensionnelles de la théorie linéaire de l'élasticité représentent un exemple plus compliqué. En termes des composantes u, v du vecteur déplacement et des composantes σ_{11}, σ_{22}, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ du tenseur des contraintes elles sont de la forme

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}, \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}, \\
\sigma_{11} &= \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\sigma_{22} &= \rho (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\sigma_{12} &= \frac{1}{2} \rho b^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{10.32}$$

Ici ρ est la densité du milieu, a et b sont les vitesses de propagation des ondes élastiques longitudinales et transversales.

Prenons comme fonctions inconnues les composantes du vecteur vitesse de déplacement:

$$\hat{u}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \hat{v}=\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Le système (10.32) peut alors être transormé en système d'équations du premier ordre

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y},\\
&\rho\frac{\partial\hat{v}}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y},\\
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial t}=\rho a^2\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\rho(a^2-2b^2)\frac{\partial\hat{v}}{\partial y},\\
&\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial t}=\rho(a^2-2b^2)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial\hat{v}}{\partial y},\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial t}=\frac{1}{2}\rho b^2\left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}+\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{10.33}$$

En y remplaçant la troisième et la quatrième équation par leurs combinaisons linéaires

$$\frac{\partial(\alpha\sigma_{11}+\beta\sigma_{22})}{\partial t}-\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\beta\sigma_{11}+\alpha\sigma_{22})}{\partial t}-\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}=0,$$

où

$$\alpha=\frac{a^2}{4\rho b^2(a^2+b^2)}, \quad \beta=-\frac{a^2-2b^2}{4\rho b^2(a^2+b^2)},$$

et en divisant la dernière équation par $\frac{1}{2}\rho b^2$, ce système se transforme en système symétrique. On peut trouver la symétrisation décrite (dans des notations un peu différentes) au § 11 de l'ouvrage [130]. Le schéma aux différences que nous avons décrit a été appliqué à la solution numérique des divers problèmes de la théorie de l'élasticité linéaire traduits par le système (10.33) en géométrie plane ainsi qu'à la solution des problèmes de géométrie cylindrique et des problèmes liés à la prise en compte des contraintes de température, qui font apparaître dans les équations (10.33) les seconds membres correspondants. A ce sujet le lecteur est renvoyé aux ouvrages [106], [107].

Pour conclure ce paragraphe notons que la construction proposée du schéma aux différences se généralise automatiquement au cas de

trois variables spatiales:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_0 u)+\frac{\partial}{\partial x}(A_1 u)+\frac{\partial}{\partial y}(A_2 u)+\frac{\partial}{\partial z}(A_3 u)=F \qquad (10.34)$$

et conduit à la condition de stabilité généralisant le critère (10.18):

$$\tau\left(\frac{1}{\tau_x}+\frac{1}{\tau_y}+\frac{1}{\tau_z}\right)\leqslant 1, \qquad (10.35)$$

qui est assez suggestive sans démonstration.

Les schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques envisagés jusqu'ici se montraient commodes par le fait qu'on n'avait aucune difficulté à résoudre le système d'équations aux différences associé. On peut résoudre ces équations en passant successivement d'une couche temporelle à la suivante, tout point du schéma aux différences pouvant être calculé de façon indépendante. Cela faisant, on arrive à écrire des formules explicites permettant le calcul des grandeurs à la couche « supérieure » en temps ou bien pour le calcul de celles-ci dans chaque intervalle du maillage on doit résoudre les systèmes de m^* équations algébriques, où m^* est le nombre d'équations différentielles dans le système initial. Ces schémas ont été appelés schémas *explicites.*

Toutefois, les schémas explicites présentent un défaut essentiel. Ils n'admettent que le calcul avec un pas en temps soumis à une certaine restriction. Si celle-ci n'a plus lieu, le schéma devient instable, et le calcul impossible.

Dans les cas où cette restriction sur le pas en temps n'est pas imposée par l'essentiel du problème on essaie tout naturellement de s'en débarrasser. On y parvient avec les schémas aux différences *implicites.*

§ 11. Schémas aux différences implicites

Construction générale des schémas implicites fondés sur les lois de conservation intégrales (méthode de prédiction-correction). Schéma implicite pour une équation modèle la plus simple. Analyse de la stabilité par la méthode de Fourier. Moyennage de lissage. Réalisation des conditions aux limites. Généralisation du schéma au système d'équations à une variable spatiale. Balayage comme méthode de résolution des équations sur la couche intermédiaire. Généralisation du schéma au cas de deux variables spatiales.

A la différence des schémas explicites, l'application d'un schéma implicite à l'ensemble des grandeurs sur une couche temporelle considérée consiste à écrire un système d'équations aux différences qui est ensuite résolu par telle ou telle méthode. L'algorithme pour sa solution s'appuie en règle générale sur la particularité de ce schéma liée au fait que chacune de ses équations « renferme » un petit nombre d'inconnues associées à quelques points « voisins » du maillage aux différences.

Par exemple, dans le cas d'une variable spatiale on applique souvent les équations aux différences « à trois points » dont la solution s'obtient par une méthode de balayage très simple et efficace (voir par exemple, [133]). Tout se complique notablement dans le cas de deux variables spatiales ou plus.

Les schémas implicites dont nous ne donnons ici qu'un aperçu succinct, tout comme les schémas explicites auxquels on accorde beaucoup plus d'attention, sont fondés sur les lois de conservation intégrales. Le passage de l'état à l'instant t_0 à l'état à l'instant $t_0 + \tau$ se divise en deux étapes: le calcul des grandeurs auxiliaires sur la couche « intermédiaire » d'après le schéma implicite (dans le cas d'un schéma explicite leur rôle était tenu par des « grandes » valeurs déterminées à partir des décompositions de discontinuités) et, ensuite, le calcul des grandeurs sur la couche supérieure conformément aux lois de conservation sous forme discrète (« correction ») comme dans le cas du schéma explicite. Ce procédé est appelé *prédiction-correction*. Il importe de noter que lors de sa réalisation on n'a pas à s'occuper des lois de conservation pour le calcul de la couche intermédiaire (prédicteur), leur réalisation pour le schéma résultant étant assurée par la seconde étape (correcteur).

Il faut toutefois se garder de penser que la prédiction peut être représentée par tout schéma aux différences implicite pour les équations différentielles en question, la correction étant réalisée d'après le schéma explicite. Notre but est d'obtenir un schéma résultant prédicteur-correcteur stable pour τ quelconque. Ainsi donc, les exigences de stabilité et d'approximation (et, éventuellement, certaines autres) nous incitent à choisir le schéma implicite avec un grand soin.

L'un de ces schémas pour les problèmes unidimensionnels de la dynamique des gaz a été exposé en détail dans [2]. Nous en remettons à plus tard la brève description pour nous occuper à présent de la construction d'un autre schéma aux différences implicite de structure voisine mais qui, sous certains rapports, se montre plus adéquat à nos buts.

Essayons tout d'abord de décrire notre schéma implicite sur l'exemple de l'équation différentielle la plus simple

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (11.1)$$

à coefficient constant a et d'un maillage régulier à pas h en coordonnée x.

Soit $u_{j-1/2}$ la valeur de la fonction $u(x, t)$ dans l'intervalle entre les nœuds du maillage x_{j-1} et x_j sur la couche « inférieure » en temps $t = t_0$. Le calcul des nouvelles valeurs $\{u^{j-1/2}\}$ sur la couche « supérieure » $t = t_0 + \tau$ consiste dans ce qui suit. On calcule d'abord les valeurs « préalables » $\bar{U}_j$ sur la couche intermédiaire à partir des

équations aux différences

$$\frac{\overline{U}_j - \frac{1}{2}(u_{j-1/2} + u_{j+1/2})}{\omega\tau} + a\frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h} - \\ - \omega\tau a^2 \frac{\overline{U}_{j+1} - 2\overline{U}_j + \overline{U}_{j-1}}{h^2} = 0; \quad (11.2)$$

ici ω est un paramètre constant caractérisant le fait que la couche intermédiaire est associée à l'instant $t_0 + \omega\tau$. On utilisera l'équation (11.2) aussi bien pour $a < 0$ que pour $a > 0$.

Cela étant, les grandeurs $\overline{U}_j$ calculées à partir d'un système d'équations aux différences implicite (11.2) sont soumises au lissage:

$$U_j = (1-\alpha)\overline{U}_j + \frac{\alpha}{2}(\overline{U}_{j-1} + \overline{U}_{j+1}), \quad (11.3)$$

où α est un paramètre numérique (on obtiendra plus bas une restriction concernant ses valeurs, $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5$).

Enfin, on effectue le calcul de nouvelles valeurs $u^{j-1/2}$ à l'aide de la formule

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} a (U_j - U_{j-1}) \quad (11.4)$$

représentant la « loi de conservation » pour l'équation (11.1) dans l'intervalle du maillage $j - 1/2$.

Avant de passer à l'étude des propriétés du schéma décrit faisons une remarque méthodique au sujet de l'origine de l'équation (11.2) pour la couche intermédiaire. Envisageons provisoirement sur la couche intermédiaire non seulement les grandeurs $\overline{U}_j$ aux indices entiers, mais aussi les grandeurs $\overline{U}_{j-1/2}$. Pour ces dernières on écrit « naturellement » l'équation dans l'intervalle $j - 1/2$

$$\frac{\overline{U}_{j-1/2} - u_{j-1/2}}{\omega\tau} + a\frac{\overline{U}_j - \overline{U}_{j-1}}{h} = 0. \quad (11.5)$$

En recourant à une équation analogue dans l'intervalle $j + 1/2$:

$$\frac{\overline{U}_{j+1/2} - u_{j+1/2}}{\omega\tau} + a\frac{\overline{U}_{j+1} - \overline{U}_j}{h} = 0, \quad (11.6)$$

on obtient, par « interpolation » de ces deux équations, une équation pour le nœud de numéro j:

$$\frac{\overline{U}_j - \frac{1}{2}(u_{j-1/2} + u_{j+1/2})}{\omega\tau} + a\frac{\overline{U}_{j+1/2} - \overline{U}_{j-1/2}}{h} = 0. \quad (11.7)$$

En éliminant de l'équation (11.7) les grandeurs $\overline{U}_{j-1/2}$ et $\overline{U}_{j+1/2}$ à l'aide des équations (11.5), (11.6) nous obtenons précisément l'équation (11.2) écrite plus haut qui relie les trois valeurs voisines $\overline{U}_{j-1}$, $\overline{U}_j$ et $\overline{U}_{j+1}$ aux indices entiers. Par ailleurs, les grandeurs

$\{\bar{U}_{j-1/2}\}$ ne figuraient que lors de l'« établissement » de l'équation (11.2) et, comme le montre la description du schéma (11.2) à (11.4), elles ne prennent pas part au calcul.

Sans soulever pour le moment la question des conditions aux limites, abordons l'étude des propriétés du schéma proposé en analysant des conditions qui permettraient d'espérer sa stabilité pour toute valeur de τ. Procédons par la méthode de Fourier. Donnons-nous les valeurs de $u_{j-1/2}$ sous la forme

$$u_{j-1/2} = e^{i(j-1/2)\varphi},$$

où φ est un paramètre ($0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$), i l'unité imaginaire, et suivons leurs transformations par les opérateurs de différences définis par les formules (11.2) à (11.4).

La valeur propre $\bar{\lambda}$ d'un opérateur de différences implicite associé au système (11.2) est déterminée à partir de l'égalité

$$\bar{\lambda} - \frac{e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}}{2} + \omega\nu a\,(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}) - \omega^2\nu^2 a^2\,(e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi})\,\bar{\lambda} = 0,$$

où $\nu = a\tau/h$ est le nombre de Courant. Il s'ensuit que

$$\bar{\lambda} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - 2i\omega\nu\sin\frac{\varphi}{2}}{1 + 4\omega^2\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

En considérant ensuite le lissage (11.3) et le « correcteur » (11.4) on trouve que la valeur propre λ de l'opérateur de différences de passage des quantités $\{u_{j-1/2}\}$ aux quantités $\{u^{j-1/2}\}$ se définit par la formule

$$\lambda = 1 - i2\nu\sin\frac{\varphi}{2}\left(1 - 2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\cos\frac{\varphi}{2} - 2i\omega\nu\sin\frac{\varphi}{2}}{1 + 4\omega^2\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

soit, après des transformations simples,

$$\lambda = \frac{1 - 4\nu^2\omega\left(1 - \omega - 2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2} - i\nu\left(1 - 2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi}{1 + 4\omega^2\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \quad (11.8)$$

Pour analyser la stabilité considérons la quantité $1 - |\lambda|^2$ à laquelle on peut conférer la forme

$$1 - |\lambda|^2 = \frac{4\nu^2\left(1 - 2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(2\omega - 1 + 2\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1 + 4\omega^2\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

D'où $1 - |\lambda|^2 \geqslant 0$ quel que soit φ si, et seulement si, sont satisfaites les conditions

$$\omega \geqslant 0{,}5, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5, \quad (11.9)$$

et cela quel que soit ν. Ainsi si les conditions (11.9) sont satisfaites, on peut escompter la stabilité du schéma implicite décrit (11.2) à (11.4) quel que soit le pas en temps.

Il apparaît naturel de prendre pour ω soit $\omega = 0{,}5$, soit $\omega = 1$. Si $\omega = 0{,}5$, i.e. la couche intermédiaire se rapporte à l'instant $t = t_0 + \tau/2$, il découle de la formule (11.8) que la partie réelle du nombre complexe

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{1+\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(4\alpha\sin^2\frac{\varphi}{2}-1\right)}{1+\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (11.10)$$

Lorsque $\alpha = 0$, i.e. lorsqu'il n'y a pas d'opérateur de lissage (11.3), on a $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pour les valeurs de φ telles que $\nu \sin(\varphi/2) > 1$. Par conséquent, on observera des oscillations d'« harmoniques élevés » de la solution aux différences (quoique s'amortissant dans le temps puisque $|\lambda| \leqslant 1$). C'est précisément pour lutter contre ce phénomène qu'on introduit l'opérateur de lissage. Ainsi par exemple pour $\alpha = 0{,}25$ on peut voir avec la formule (11.10) que $\operatorname{Re}\lambda < 0$ uniquement dans le cas où $\nu \sin\varphi > 2$, i.e. pour $\nu \leqslant 2$ il ne se réalise point et pour $\nu > 2$ il se réalise seulement dans la bande de fréquences au voisinage de $\varphi = \pi/2$.

Si $\omega = 1$, i.e. la couche intermédiaire correspond au temps $t_0 + \tau$ il découle de la formule (11.8) que

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{1+8\alpha\nu^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}{1+4\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Par conséquent, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ pour toutes les valeurs de φ et cela sans lissage (pour $\alpha = 0$). Il arrive toutefois que même dans ce cas le lissage peut se montrer utile étant donné que nous n'avons considéré qu'une équation modèle (11.1) des plus simples et un schéma aux différences sur un maillage régulier et sans conditions aux limites.

Faisons maintenant quelques remarques qui nous seront utiles par la suite pour établir les conditions de stabilité des schémas bidimensionnels.

Le calcul des quantités $\{u^{j-1/2}\}$ d'après les quantités $\{u_{j-1/2}\}$ et selon le procédé décrit comporte les détails suivants. On calcule d'abord $\{U_j\}$; cette opération représente une transformation linéaire de $\{u_{j-1/2}\}$ par un certain opérateur que nous désignons symboliquement par $\mathscr{R}(\omega\tau)$ pour souligner sa dépendance du paramètre $\omega\tau$:

$$\{U_j\} = \mathscr{R}(\omega\tau)\{u_{j-1/2}\}.$$

La correction d'après les formules (11.4)

$$u^{j-1/2} = u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h} a (U_j - U_{j-1})$$

sera représentée symboliquement sous la forme d'une égalité opératorielle

$$\{u^{j-1/2}\} = I \{u_{j-1/2}\} - \frac{\tau}{h} \Delta \{U_j\} = \left[I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R} (\omega\tau) \right] \{u_{j-1/2}\}.$$

Ici I est l'opérateur unité, Δ l'opérateur de différence. Il découle de l'étude effectuée que si l'on définit la norme de la fonction discrète à l'aide de formule

$$\| \{u^{j-1/2}\} \| = \sqrt{\sum_j (u^{j-1/2})^2},$$

on peut tirer de notre étude par la méthode de Fourier l'inégalité suivante pour la norme de l'opérateur $I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R} (\omega\tau)$:

$$\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R} (\omega\tau) \| \leqslant 1,$$

si seulement $\omega \geqslant 1/2$. En effet, en passant aux transformations de Fourier

$$\hat{u} (\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j{}' u^{j-1/2} e^{i(j-1/2)\varphi},$$

$$u (\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j u_{j-1/2} e^{i(j-1/2)\varphi}$$

et en utilisant l'égalité de Parseval

$$\int_0^{2\pi} | \hat{u} (\varphi) |^2 d\varphi = \sum_j | u^{j-1/2} |^2,$$

$$\int_0^{2\pi} | u (\varphi) |^2 d\varphi = \sum_j | u_{j-1/2} |^2$$

et le fait que

$$\hat{u} (\varphi) = \lambda \left(\varphi, \ \omega, \ \frac{\tau}{h} \right) u (\varphi),$$

on conclut aisément que

$$\left\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R} (\omega\tau) \right\| = \max_\varphi \left| \lambda \left(\varphi, \ \omega, \ \frac{\tau}{h} \right) \right| \leqslant 1$$

à la condition que $\omega \geqslant 1/2$. C'est précisément l'inégalité $\| I - \frac{\tau}{h} \Delta \mathcal{R} (\omega\tau) \| \leqslant 1$ et la condition $\omega \geqslant 1/2$ qu'on utilisera par la suite dans l'étude des schémas bidimensionnels.

Si l'on résout pour l'équation (11.1) un problème aux limites sur le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$, la formulation des conditions aux limites dépend du signe du coefficient a.

Si $a > 0$, il convient de donner $u(x_I, t) = g_I(t)$ sans poser la condition aux limites sur la frontière droite. Si $a < 0$, alors au contraire il faut poser $u(x_{II}, t) = g_{II}(t)$ tandis qu'il n'y a pas de condition aux limites sur la frontière gauche.

Comment réaliser les conditions aux limites dans le schéma implicite décrit? Commençons par le système (11.2) sur la couche intermédiaire. Les équations pour les nœuds « intérieurs » sont écrites. Pour en tirer un système fermé il faut les compléter par deux équations supplémentaires. Dans le cas $a < 0$ l'une d'elles sera l'équation $\overline{U}_J = g_{II}(t_0 + \omega\tau)$ en conformité avec la condition aux limites $u(x_{II}, t) = g_{II}(t)$. La seconde équation est écrite au nœud $x_0 = x_I$ et comme on n'y pose aucune condition aux limites, elle représente une approximation de l'équation initiale (11.1) de la forme suivante:

$$\frac{\frac{1}{2}(\overline{U}_0 + \overline{U}_1) - u_{1/2}}{\omega\tau} + a\frac{\overline{U}_1 - \overline{U}_0}{h} = 0. \qquad (11.11)$$

Dans le cas où $a > 0$ il convient évidemment d'utiliser à l'extrémité gauche $x_0 = x_I$ la condition aux limites donnée en posant $\overline{U}_0 = g_I(t_0 + \omega\tau)$ et à l'extrémité droite l'équation analogue à (11.11):

$$\frac{\frac{1}{2}(\overline{U}_J + \overline{U}_{J-1}) - u_{J-1/2}}{\omega\tau} + a\frac{\overline{U}_J - \overline{U}_{J-1}}{h} = 0.$$

S'il y a lissage des grandeurs $\overline{U}_j$ tirées du système d'équations sur la couche intermédiaire, on laissera les valeurs extrêmes sans changement: $U_0 = \overline{U}_0$, $U_J = \overline{U}_J$ et pour les autres valeurs on se servira de la formule (11.3).

La stabilité du schéma proposé fut soumise à une vérification méticuleuse par calcul expérimental pour les diverses valeurs du paramètre $\nu = a\tau/h$. Ce travail a été fait avec le concours de Mme L. Pliner.

C'est là que nous terminons la description du schéma aux différences pour l'équation scalaire (11.1) et abordons son application à la résolution numérique d'un problème aux limites pour un système hyperbolique d'équations différentielles avec la matrice des coefficients constante

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (11.12)$$

sur le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$, dont la position faisait l'objet d'études détaillées au § 9. (La matrice A est supposée unitaire. La matrice B n'est pas supposée symétrique.)

Consacrons-nous pour l'instant à la construction du système d'équations sur la couche intermédiaire, analogue à (11.2) dans le cas d'une seule équation (11.1). Après la réduction du système (11.12) à la forme canonique à l'aide d'« invariants riemanniens » v pour chaque composante du vecteur fonction v on obtient une équation scalaire

$$\frac{\partial v^{(m)}}{\partial t} + \mu_m \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = 0 \quad (m = 1, \ldots, m^*).$$

Cela permet en chacun des nœuds « intérieurs » du maillage d'écrire les équations analogues à (11.2) séparément pour chacune des composantes $v^{(m)}$.

La forme de ces équations étant la même quel que soit le signe de μ_m, on peut les remplacer immédiatement par un système d'équations équivalent pour les composantes du vecteur u. Sous forme matricielle il a l'aspect

$$\frac{\overline{U}_j - \frac{1}{2}(u_{j-1/2} + u_{j+1/2})}{\omega\tau} + B\frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{h} - \omega\tau B^2 \frac{\overline{U}_{j+1} - 2\overline{U}_j + \overline{U}_{j-1}}{h^2} = 0. \tag{11.13}$$

L'ensemble d'équations obtenu doit être complété par m^* équations au nœud limite gauche $x_0 = x_I$ et par m^* équations au nœud $x_J = x_{II}$. Or, pour la position du problème au nœud $x_0 = x_I$ on n'a donné que m_+ conditions aux limites indépendantes et au nœud $x_J = x_{II}$ on n'a donné que m_- conditions aux limites indépendantes. Elles sont supposées données sous la forme des relations (9.21) reliant les composantes du vecteur fonction u.

L'ensemble de m^* équations pour le nœud gauche $x_0 = x_I$ se compose de m_+ relations aux limites données complétées par les équations écrites par analogie avec l'équation (11.5) pour chacun des « invariants riemanniens » $v^{(m)}$ attaché à la caractéristique « aboutissant » à la frontière gauche :

$$\frac{\frac{1}{2}(\overline{V}_0^{(m)} + \overline{V}_1^{(m)}) - v_{1/2}^{(m)}}{\omega\tau} + \mu_m \frac{\overline{V}_1^{(m)} - \overline{V}_0^{(m)}}{h} = 0, \tag{11.14}$$

$$\text{si } \mu_m \leqslant 0.$$

On y a inclu aussi le cas $\mu_m = 0$.

Ces équations sont à récrire en termes de composantes du vecteur fonction u à l'aide de la transformation inverse $v = \Lambda^{-1} u$.

De manière analogue on compose m^* équations pour le nœud droit $x_J = x_{II}$. Le système d'équations aux différences obtenu

pour la couche intermédiaire a la structure suivante:

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}_0\overline{U}_0-\mathscr{B}_0\overline{U}_1=f_0,\\ &\mathscr{A}_j\overline{U}_{j-1}-\mathscr{B}_j\overline{U}_j+\mathscr{C}_j\overline{U}_{j+1}=f_j \quad (j=1,\ \ldots,\ J-1),\\ &-\mathscr{B}_J\overline{U}_{J-1}+\mathscr{C}_J\overline{U}_J=f_J, \end{aligned} \tag{11.15}$$

où $\mathscr{A}_j$, $\mathscr{B}_j$, $\mathscr{C}_j$ sont des matrices carrées d'ordre m^*, f_j des vecteurs de même dimension m^*.

Sa solution peut être obtenue par la méthode de balayage. La variante scalaire du balayage à trois points est décrite, par exemple, dans [133]. Pour compléter l'exposé décrivons-le pour le cas vectoriel en question. Tout d'abord par le balayage direct on calcule successivement les matrices de balayage $\mathscr{L}_{j-1/2}$ et les vecteurs $K_{j-1/2}$. Pour les valeurs de départ on prend

$$\mathscr{L}_{1/2}=\mathscr{A}_0^{-1}\mathscr{B}_0, \quad K_{1/2}=\mathscr{A}_0^{-1}f_0.$$

Ensuite on raisonne par récurrence

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{j+1/2}&=(\mathscr{B}_j-\mathscr{A}_j\mathscr{L}_{j-1/2})^{-1}\mathscr{C}_j,\\ K_{j+1/2}&=(\mathscr{B}_j-\mathscr{A}_j\mathscr{L}_{j-1/2})^{-1}(\mathscr{C}_jK_{j-1/2}-f_j) \end{aligned}$$

pour $j=1,\ \ldots,\ J-1$. Une fois la matrice $\mathscr{L}_{J-1/2}$ et le vecteur $K_{J-1/2}$ calculés, on détermine le vecteur cherché $\overline{U}_J$ sur la frontière droite d'après la formule

$$\overline{U}_J=(\mathscr{C}_J-\mathscr{B}_j\mathscr{L}_{J-1/2})^{-1}(f_J+\mathscr{B}_JK_{J-1/2}).$$

Ensuite par le balayage inverse on détermine les vecteurs cherchés $\overline{U}_j$ par récurrence

$$\overline{U}_{j-1}=\mathscr{L}_{j-1/2}\overline{U}_j+K_{j-1/2}$$

pour les valeurs $j=J,\ J-1,\ \ldots,\ 1$.

On peut trouver la description de la méthode de balayage par exemple dans les ouvrages [133], [88] et nous ne nous y arrêtons pas.

Une fois les grandeurs $\overline{U}_j$ de la couche intermédiaire déterminées, le lissage (suivi de la correction) peut se faire indépendamment pour chacune des composantes du vecteur fonction u. Pour les valeurs extrêmes $j=0$ et $j=J$ les vecteurs $\overline{U}_0$, $\overline{U}_j$ sont laissés inchangés: $U_0=\overline{U}_0$, $U_J=\overline{U}_J$.

Notons que dans le cas où le schéma est considéré sans conditions aux limites sur un maillage illimité il découle de la méthode même de sa construction qu'il se décompose en des schémas indépendants pour chaque invariant riemannien $v^{(m)}$, $m=1,\ \ldots,\ m^*$.

Si bien que la stabilité du schéma sans conditions aux limites décrit sur chaque pas en temps τ découle directement de l'étude faite ci-dessus pour l'équation modèle (11.1).

Tout comme pour les équations scalaires la détermination de $u^{j-1/2}$ d'après $u_{j-1/2}$ peut se représenter sous la forme d'un opérateur composé $I - \frac{\tau}{h} B\,\Delta\mathscr{R}\,(\omega\tau)$, où $\mathscr{R}\,(\omega\tau)$ est un opérateur de calcul de U_j dépendant du paramètre $\omega\tau$, Δ l'opérateur de différence

$$\Delta U_j = U_j - U_{j-1},$$

B la matrice des coefficients de $\frac{\partial}{\partial x}$ dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Le résultat de l'étude de la stabilité du problème sans conditions aux limites qu'on vient de décrire peut être mis, comme dans le cas scalaire, sous la forme d'une inégalité symbolique

$$\left\| I - \frac{\tau}{h} B\Delta\mathscr{R}\,(\omega\tau) \right\| \leqslant 1, \qquad (11.16)$$

si seulement $\omega \geqslant 1/2$. Une telle factorisation est violée s'il y a les conditions aux limites (excepté le cas où comme conditions aux limites on se donne les invariants riemanniens pour les caractéristiques « partantes » ; alors, on peut toujours résoudre le problème indépendamment pour chaque invariant). L'étude de la stabilité nécessite un essai numérique comme dans le cas scalaire. Si les éléments de la matrice B sont fonction de x et de t, les remarques que nous avons faites au § 9 au sujet du schéma explicite entrent en jeu. Nous ne voyons aucun obstacle de principe pour généraliser le schéma implicite décrit au cas des coefficients variables. En ce qui concerne les modifications concrètes nécessaires lors de la construction du schéma, nous les exposerons au § 21 directement pour le cas plus compliqué du système quasi linéaire d'équations hyperboliques.

Comme nous l'avons dit plus haut, un autre schéma implicite pour les équations hyperboliques a été proposé dans le livre [2] ; il avait servi pour l'intégration numérique du système d'équations quasi linéaires de la dynamique des gaz unidimensionnelle. Ici nous ne donnerons pas sa description et son étude. A la différence du schéma que nous venons d'exposer, dans le schéma de [2] les valeurs de la fonction sur les couches « inférieure » et « supérieure » sont données aux nœuds du maillage avec les numéros entiers j, et sur la couche intermédiaire aux points « demi-entiers » $j - 1/2$. Quelques différences ont alors surgi lors de la réalisation concrète de ces deux schémas, étant donné leurs « interactions » différentes avec les frontières du domaine de calcul. Par ailleurs, les principes de construction du schéma implicite sont les mêmes pour les deux schémas. Nous avons préféré le schéma décrit précédemment pour l'unique raison qu'il s'appuie sur le même maillage que les schémas explicites exposés dans le présent livre. Cette circonstance facilite l'exposé et permet une orientation plus aisée dans le choix pratique d'un schéma explicite ou implicite, selon la nécessité ou le désir, lors de la résolution des problèmes concrets.

En conclusion, nous allons brièvement traiter la question de l'utilisation des schémas aux différences implicites pour les problèmes à deux variables spatiales sur l'exemple du système d'équations hyperbolique linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f, \tag{11.17}$$

où $u = u(x, y, t)$ est le vecteur fonction cherché à m^* composantes, B, C sont les matrices symétriques carrées d'ordre m^*, f le vecteur fonction donné.

La symétrie des matrices B, C assure la validité de l'intégrale d'énergie dont la forme différentielle est

$$\frac{\partial (u, u)}{\partial t} + \frac{\partial (Bu, u)}{\partial x} + \frac{\partial (Cu, u)}{\partial y} = 2(f, u).$$

Une telle hypothèse s'avère commode dans l'étude de la stabilité. Les résultats ci-dessous s'étendent sans peine aux systèmes symétriques de la forme

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$A = A^*, \quad B = B^*, \quad C = C^*, \quad (Au, u) > 0$$

et aux systèmes qui s'y ramènent en remplaçant les équations par leurs combinaisons linéaires. Le système (11.17) est considéré dans un domaine rectangulaire sur lequel on construit le même quadrillage que dans le cas des équations de l'acoustique à deux variables spatiales du § 7. Le schéma implicite ne s'applique qu'au calcul de la couche intermédiaire et ensuite les valeurs obtenues (après le moyennage de lissage) participent à la correction s'appuyant sur les lois de conservation intégrales. En écrivant les équations implicites pour les valeurs de la couche intermédiaire on doit réfléchir dès le début sur la manière d'aborder la solution du système d'équations établi, car dans le cas bidimensionnel ce problème est bien plus compliqué que dans le cas unidimensionnel. La factorisation du système d'équations sur la couche intermédiaire en des systèmes « unidimensionnels » est une des manières de s'en sortir. Pour ce faire introduisons-y deux ensembles de grandeurs auxiliaires: $\{U_{j, k-1/2}\}$ et $\{U_{j-1/2, k}\}$ analogues aux « grandes » valeurs du schéma explicite. Pour déterminer le premier ensemble de grandeurs $\{U_{j, k-1/2}\}$ on compose des systèmes d'équations « unidimensionnels » à indice k fixe pour un système d'équations homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Ce procédé ne différant en rien de celui décrit plus haut pour le cas unidimensionnel, nous ne nous y arrêtons pas de même que nous laissons de côté la description de la solution des équations obtenues, suivie du moyennage de lissage. De façon tout à fait analogue on

compose et on résout les équations implicites pour les grandeurs du second ensemble $\{U_{j-1/2,\ k}\}$. Pour l'indice j fixe on les compose pour un système d'équations homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

on les résout ensuite de la même façon qu'au cas unidimensionnel et on les soumet au moyennage de lissage. Après cela on effectue la correction d'après les formules

$$u^{j-1/2,\ k-1/2} = u_{j-1/2,\ k-1/2} - \frac{\tau}{h_x} B[U_{j,\ k-1/2} - U_{j-1,\ k-1/2}] -$$

$$- \frac{\tau}{h_y} C[U_{j-1/2,\ k} - U_{j-1/2,\ k-1}]$$

que l'on peut envisager comme les lois de conservation aux différences pour les équations (11.17). Si les coefficients sont variables, il convient au préalable de mettre les équations (11.17) sous la forme de divergence

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Bu] + \frac{\partial}{\partial y}[Cu] = Qu + f.$$

Dans l'écriture des équations aux différences pour la correction les matrices des coefficients seront propres dans chaque intervalle du maillage, comme il a déjà été dit à la fin du paragraphe précédent.

Arrêtons-nous sur l'étude de la stabilité du schéma implicite décrit dans le cas bidimensionnel (dans un problème sans conditions aux limites). Sous forme symbolique le schéma construit peut être représenté comme opérateur

$$I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathcal{R}(\omega\tau) - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(\omega\tau),$$

où $\mathcal{R}(\omega\tau)$, $Q(\omega\tau)$ sont les opérateurs « unidimensionnels » de calcul des grandeurs $\{U_{j,\ k-1/2}\}$, $\{U_{j-1/2,\ k}\}$ respectivement. La démonstration de la stabilité s'appuie sur la même méthode de «factorisation » que dans le cas du schéma explicite.

En effet, dans l'analyse des schémas unidimensionnels nous avons établi les inégalités

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathcal{R}(\omega\tau) \right\| \leqslant 1,$$
$$\left\| I - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(\omega\tau) \right\| \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad \tau \geqslant 0,\ \omega \geqslant \frac{1}{2}$$

(la seconde inégalité ne différant de la première que par la substitution de y à x et par les notations). Remplaçons dans ces inégalités τ par 2τ:

$$\left\| I - \frac{2\tau}{h_x} B\Delta_x \mathcal{R}(2\omega\tau) \right\| \leqslant 1,$$
$$\left\| I - \frac{2\tau}{h_y} C\Delta_y Q(2\omega\tau) \right\| \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad \tau \geqslant 0,\ \omega \geqslant \frac{1}{2}.$$

Il découle des inégalités obtenues que

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(2\omega\tau) - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(2\omega\tau) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{2}\left[I - \frac{2\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(2\omega\tau) \right] + \frac{1}{2}\left[I - \frac{2\tau}{h_y} C\Delta_y Q(2\omega\tau) \right] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left\| I - \frac{2\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(2\omega\tau) \right\| + \frac{1}{2} \left\| I - \frac{2\tau}{h_y} C\Delta_y Q(2\omega\tau) \right\| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

En définitive,

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(2\omega\tau) - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(2\omega\tau) \right\| \leqslant 1,$$

à condition que $\tau \geqslant 0$, $\omega \geqslant 1/2$. Il est plus commode d'écrire cette inégalité sous la forme suivante, en remplaçant 2ω par ω:

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(\omega\tau) - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(\omega\tau) \right\| \leqslant 1,$$

à condition que $\tau \geqslant 0$, $\omega \geqslant 1$.

La stabilité est établie mais pour la démontrer nous avons dû imposer à ω une restriction plus sévère $\omega \geqslant 1$ que dans le cas unidimensionnel où nous avons posé $\omega \geqslant 1/2$. En règle générale, en effectuant les calculs bidimensionnels d'après le schéma implicite nous avons utilisé la valeur de $\omega = 1$.

En modifiant légèrement la démonstration effectuée on peut établir une condition de stabilité un peu plus générale :

$$\left\| I - \frac{\tau}{h_x} B\Delta_x \mathscr{R}(\omega_1\tau) - \frac{\tau}{h_y} C\Delta_y Q(\omega_2\tau) \right\| \leqslant 1,$$

à condition que $\tau \geqslant 0$, $\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \geqslant 2$. Son application permet d'utiliser lors des balayages « unidimensionnels » en x et en y les coefficients de réserve distincts ω_1 et ω_2.

CHAPITRE II

SYSTÈMES HYPERBOLIQUES QUASI LINÉAIRES À DEUX VARIABLES

§ 12. Dynamique des gaz instationnaire unidimensionnelle

Système d'équations instationnaires de la dynamique des gaz à une variable spatiale. Equation d'état. Lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Relations aux discontinuités. Loi de conservation de l'entropie sur les solutions lisses et d'accroissement sur les ondes de choc. Conditions de Bethe-Weyl pour l'équation d'état. Notion de solution généralisée.

Le système d'équations différentielles décrivant un écoulement gazeux fonction du temps t et d'une coordonnée cartésienne x a la forme

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+\rho u^{2}\right)}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial \rho\left(\varepsilon+u^{2}/2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho u\left(\varepsilon+u^{2}/2\right)+p u\right]}{\partial x}=0.\end{gathered} \tag{12.1}$$

Ici ρ est la densité, p la pression, ε l'énergie interne de l'unité de masse de gaz, u la vitesse ayant le sens de l'axe des x. Le système (12.1) est un cas particulier des équations instationnaires de la dynamique des gaz pour les écoulements spatiaux (22.16) qui seront écrites au § 22.

Le système (12.1) renferme quatre fonctions cherchées ρ, u, p, ε. Pour cette raison il doit être complété par une autre équation. Comme on le sait, parmi les grandeurs thermodynamiques décrivant l'état du gaz on ne peut choisir que deux grandeurs indépendantes, les autres étant calculées à l'aide de l'*équation* dite *d'état*. En particulier, si l'équation d'état est donnée sous la forme da la relation

$$\varepsilon = \varepsilon\,(V,\ S), \tag{12.2}$$

où S est l'entropie, $V = 1/\rho$ le volume spécifique, alors en appliquant l'identité thermodynamique

$$d\varepsilon + p\,dV = T\,dS \tag{12.3}$$

on peut calculer la pression p et la température absolue T à l'aide des paramètres V, S d'après les formules

$$p = p(V, S) = -\frac{\partial \varepsilon (V, S)}{\partial V}, \qquad T = T(V, S) = \frac{\partial \varepsilon (V, S)}{\partial S}. \tag{12.4}$$

S'il faut calculer la pression p d'après les grandeurs données ρ, ε, on peut le faire en deux étapes: d'abord, on trouve $S = S(V, \varepsilon)$ à partir de l'équation implicite (12.2) et, ensuite, en appliquant la formule $p = -\frac{\partial \varepsilon(V, S)}{\partial V}$ on détermine p. On peut donc en conclure que la relation

$$p = p(\rho, \varepsilon) \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \varepsilon(p, \rho) \tag{12.5}$$

se calcule aisément. Qui plus est, si l'équation d'état peut être donnée sous la forme (12.5), le système d'équations (12.1) est complet sans qu'on ait recours à l'entropie S, si bien que l'algorithme de calcul peut être décrit en termes de grandeurs ρ, p, ε, les autres grandeurs thermodynamiques n'étant à déterminer qu'en cas de nécessité (pour l'analyse et l'interprétation des résultats de calcul, etc.). Par la suite nous supposerons que l'équation d'état est donnée précisément sous cette forme.

Pour certaines équations d'état très simples cette dépendance n'est pas bien compliquée en elle-même. Ainsi, pour un gaz parfait elle a la forme

$$p = (\varkappa - 1)\rho\varepsilon, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{p}{(\varkappa - 1)\rho}. \tag{12.6}$$

La quantité $\varkappa$ est appelée *indice de l'adiabatique*. Pour un tel gaz

$$\varepsilon = \frac{1}{\varkappa - 1}\rho^{\varkappa - 1}\sigma(S), \qquad p = \rho^{\varkappa}\sigma(S), \qquad \sigma(S) = e^{S/c_V}. \tag{12.7}$$

Dans ce qui suit nous utiliserons parfois au lieu de l'entropie S telle ou telle fonction d'entropie $\sigma(S)$. La quantité c_V est dite chaleur spécifique à volume constant.

L'équation binôme d'état, généralisation triviale de l'équation d'état du gaz parfait, a la forme

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p - c_0^2(\rho - \rho_0)}{(\varkappa - 1)\rho}, \tag{12.8}$$

où les quantités ρ_0, c_0 sont des constantes. La pression s'exprime en fonction de la densité et de l'entropie de la façon suivante:

$$p = \sigma(S) \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa} - \frac{\rho_0 c_0^2}{\varkappa}. \tag{12.9}$$

Cette équation d'état peut s'appliquer à l'étude des phénomènes ayant lieu dans l'eau et aussi dans les métaux à des pressions éle-

vées. Signalons qu'on obtient l'équation d'état du gaz parfait comme cas particulier de l'équation binôme, en y posant $c_0 = 0$, $\rho_0 = 1$.

Si $\rho = \rho(x, t)$, $u = u(x, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ sont des fonctions lisses, solutions des équations de la dynamique des gaz (12.1), pour tout sous-domaine Ω de frontière Γ du domaine de définition de la solution on a les égalités

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right] dx\,dt = \oint_\Gamma \rho\,dx - \rho u\,dt = 0,$$

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p+\rho u^2)}{\partial x}\right] dx\,dt = \oint_\Gamma \rho u\,dx - (p+\rho u^2)\,dt = 0,$$

$$\iint_\Omega \left\{\frac{\partial \rho (\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x}\right\} dx\,dt =$$

$$= \oint_\Gamma \rho (\varepsilon + u^2/2)\,dx - [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]\,dt = 0.$$

Les identités intégrales

$$\oint_\Gamma \rho\,dx - \rho u\,dt = 0,$$

$$\oint_\Gamma \rho u\,dx - (p+\rho u^2)\,dt = 0, \qquad (12.10)$$

$$\oint_\Gamma \rho (\varepsilon + u^2/2)\,dx - [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]\,dt = 0$$

sont les expressions mathématiques des lois fondamentales de la physique: lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Il est naturel d'admettre qu'elles doivent être valables non seulement pour toutes les fonctions suffisamment lisses $\rho(x, t)$, $u(x, t)$, $p(x, t)$, $\varepsilon(x, t)$ décrivant les écoulements gazeux réels, mais pour toutes les fonctions de ce genre.

Dans les flux réels on rencontre des surfaces sur lesquelles les grandeurs physiques varient par sauts. Ce sont les ondes de choc et les discontinuités de contact. Les lois de conservation intégrales (12.10) fournissent des relations qui lient les grandeurs des deux côtés de la discontinuité. Ces relations sont appelées conditions aux ondes de choc.

Soit une discontinuité se propageant à la vitesse $\frac{dx}{dt} = D$. Représentons la trajectoire qu'elle décrit sur le plan x, t (fig. 12.1) et envisageons le contour (représenté sur cette figure en pointillé) qui adhère presque à la ligne de discontinuité dont il entoure une certaine portion. Il découle des lois de conservation écrites pour ce con-

tour que le long de la ligne de discontinuité

$$\int [\rho]\, dx - [\rho u]\, dt = \int ([\rho]\, D - [\rho u])\, dt = 0,$$

$$\int [\rho u]\, dx - [p + \rho u^2]\, dt = \int ([\rho u]\, D - [p + \rho u^2])\, dt = 0, \tag{12.11}$$

$$\int [\rho (\varepsilon + u^2/2)]\, dx - [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]\, dt =$$
$$= \int \{[\rho (\varepsilon + u^2/2)]\, D - [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]\}\, dt = 0,$$

où les intégrales sont prises sur une portion quelconque de la discontinuité. Les crochets indiquent la différence des valeurs des deux côtés de la discontinuité.

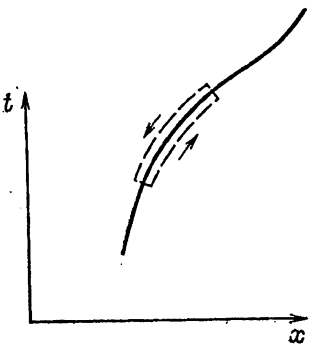


Fig. 12.1

Le domaine d'intégration étant arbitraire, on a en chaque point de discontinuité les relations (conditions aux ondes de choc)

$$\begin{aligned} [\rho]\, D - [\rho u] &= 0, \\ [\rho u]\, D - [p + \rho u^2] &= 0, \\ [\rho (\varepsilon + u^2/2)]\, D - [\rho u (\varepsilon + & \\ + u^2/2) + pu] &= 0. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Il est intéressant de noter le fait important que les lois de conservation valables sur les solutions lisses ne le sont pas toutes sur les solutions discontinues. En voici un exemple très instructif.

Si l'on multiplie les équations de la dynamique des gaz (12.1) et l'équation d'état $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$ respectivement par les facteurs $-\frac{\varepsilon + \rho\varepsilon_\rho - u^2/2}{\varepsilon_S}$, $-\frac{u}{\varepsilon_S}$, $\frac{1}{\varepsilon_S}$ et si on les additionne ensuite, on a

$$-\frac{\varepsilon + \rho\varepsilon_\rho - u^2/2}{\varepsilon_S}\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right\} - \frac{u}{\varepsilon_S}\left\{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_S}\left\{\frac{\partial \rho (\varepsilon + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (\varepsilon + u^2/2) + pu]}{\partial x}\right\} \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S}{\partial x} = 0. \tag{12.13}$$

Si $\rho(x, t)$, $S(x, t)$, $u(x, t)$ sont les fonctions lisses, il s'ensuit que le long de tout contour Γ

$$\oint_\Gamma \rho S\, dx - \rho u S\, dt = 0. \tag{12.14}$$

C'est la loi de conservation de l'entropie valable pour les solutions lisses des équations de la dynamique des gaz.

La première théorie mathématique des ondes de choc qui fut mise en œuvre par Riemann (avant la découverte expérimentale de celles-ci) reposait sur la loi de conservation de l'entropie sur les discontinuités. Par ailleurs, il ne put pas tenir compte de la loi de conservation de l'énergie. Cette erreur bien connue de Riemann fut corrigée par Rankine et Hugoniot. Il s'est avéré que la loi de conservation de l'entropie n'est pas valable sur les discontinuités. Lorsqu'un élément de matière traverse la discontinuité, son entropie croît. Au lieu de la loi de conservation de l'entropie (12.14) il faut admettre la loi de son accroissement *)

$$\oint_{\Gamma} \rho S\, dx - \rho\, uS\, dt \leqslant 0 \qquad (12.15)$$

(on suppose que l'intégration dans l'intégrale de contour s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre). Le contour Γ peut maintenant être supposé quelconque (il peut également comprendre les portions de la discontinuité).

Ainsi donc, sur toutes les fonctions continues par morceaux $\rho\,(x, t)$, $u\,(x, t)$, $S\,(x, t)$ décrivant les écoulements des gaz, pour tout contour doivent être vérifiées les conditions intégrales (12.10) et (12.15).

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage intéressant de B. Rojdestvenski [93] qui donne au § 5 la forme générale de toutes les lois de conservation possibles valables pour les solutions lisses des équations de la dynamique des gaz.

A l'heure actuelle on peut considérer comme établi (bien qu'il n'en existe pas de démonstration mathématique rigoureuse) le fait que toutes les fonctions satisfaisant aux conditions intégrales (12.10) qui expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie et à la condition (12.15) de la non-décroissance de l'entropie se définissent univoquement par leurs valeurs initiales pour $t = 0$ à condition que l'équation d'état ne soit pas trop « extravagante ». Plus précisément, cette assertion consiste dans ce qui suit. La fonction $\varepsilon = \varepsilon\,(V, S)$ dite potentiel thermodynamique, car la pression p et la température absolue T s'en déduisent par dérivation (12.4), doit être fonction convexe de ses arguments. Pour que la fonction $\varepsilon = \varepsilon\,(V, S)$ soit convexe il faut que la matrice de ses dérivées secondes soit définie positive, i.e. soient remplies les conditions

$$\varepsilon_{VV} > 0, \quad \varepsilon_{VV}\varepsilon_{SS} - \varepsilon_{VS}^2 > 0. \qquad (12.16)$$

*) Le souci de rigueur nous inciterait à user le terme de « non-décroissance » de l'entropie. Néanmoins nous avons cru possible de ne pas y faire attention.

En outre, la fonction $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$ doit satisfaire aux restrictions supplémentaires proposées par Bethe et Weyl dans l'ouvrage [163]:

$$\varepsilon_{VS} < 0, \quad \varepsilon_{VVV} < 0. \tag{12.17}$$

Dans les ouvrages [24], [25], lors de l'étude du problème de la décomposition d'une discontinuité initiale dans un gaz qui ne vérifie pas les conditions de Bethe-Weyl, on a montré que la solution du problème de Cauchy n'est pas unique. Par la dérivation directe on peut se convaincre que les équations d'état du gaz parfait (12.7) présentées plus haut et l'équation d'état binôme (12.8) à (12.9) satisfont aux inégalités de Bethe-Weyl.

Ces considérations nous amènent à l'idée déjà émise sous une forme légèrement différente par J. von Neumann, qu'en élaborant un schéma de calcul pour les équations de la dynamique des gaz il faut approximer non les équations différentielles de la dynamique des gaz applicables uniquement dans les domaines où les fonctions décrivant les écoulements sont lisses, mais les égalités intégrales (12.10) et l'inégalité d'entropie (12.15). J. von Neumann [148] proposait de calculer les équations en introduisant artificiellement une viscosité qui étale les discontinuités, les lois de conservation et la condition d'accroissement d'entropie étant satisfaites. Il s'est avéré, en fait, qu'il n'est pas nécessaire d'introduire exprès une viscosité dans les équations. L'approximation discrète aux différences des fonctions qui décrivent les champs des grandeurs physiques conduit automatiquement à un étalement, à un lissage des discontinuités à peu près analogues à ceux obtenus grâce à l'introduction de la viscosité artificielle de J. von Neumann.

On dit d'habitude que les fonctions satisfaisant aux égalités intégrales et à l'inégalité pour l'entropie sont les solutions généralisées des équations de la dynamique des gaz. Signalons que si l'on se limite aux lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie seulement sans avoir recours, pour la détermination de la solution généralisée, à la loi d'accroissement d'entropie, alors le problème de la reconstitution de la solution d'après l'état initial du milieu à $t = 0$ peut avoir une solution non unique (même si l'on a l'équation d'état du gaz parfait la plus simple). On rencontrera cette situation dans le problème de la décomposition de discontinuité pour les équations non linéaires de la dynamique des gaz. L'exemple correspondant sera traité à la fin du paragraphe suivant.

§ 13. Le problème de la décomposition de discontinuité

Position du problème. Description schématique des configurations possibles. Réduction à l'équation algébrique pour la pression sur la discontinuité de contact. Méthode d'itération pour sa solution. Propriétés de l'équation et application de la méthode des tangentes de Newton. Calcul des grandeurs décrivant

la configuration engendrée par décomposition de discontinuité. Exemple d'une solution non univoque du problème de la décomposition de discontinuité abstraction faite de la loi d'accroissement d'entropie.

Dans ce paragraphe nous allons construire une solution généralisée pour un problème important qui joue un rôle essentiel dans la construction du schéma aux différences et, en outre, présente un intérêt particulier pour l'analyse pratique des situations rencontrées au cours des calculs gazodynamiques. Il s'agit du problème de la décomposition de discontinuité.

Soit un milieu (gaz, liquide, métal) dont les grandeurs thermodynamiques : pression p, densité ρ, énergie interne de l'unité de masse ε, suivent l'équation d'état binôme

$$\varepsilon = \frac{p + \varkappa p_0}{(\varkappa - 1)\rho} - \frac{c_0^2}{\varkappa - 1}, \tag{13.1}$$

où $p_0 = \frac{1}{\varkappa}\rho_0 c_0^2$; $\varkappa$, ρ_0, c_0 sont des grandeurs constantes *). Le gaz parfait en est un cas particulier ($c_0 = 0$). Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$ pour le demi-espace de gauche $x < 0$ le milieu se caractérise par des paramètres de valeurs p_{I}, ρ_{I}, u_{I}, et pour le demi-espace de droite $x > 0$, par les paramètres de valeurs p_{II}, ρ_{II}, u_{II}. Ici u est la composante du vecteur vitesse dans le sens de la coordonnée x (ses autres composantes étant nulles).

Ainsi, par exemple, si l'on met en contact deux masses de gaz comprimées à des pressions différentes en retirant la paroi séparatrice, la surface de leur contact sera la surface de discontinuité dans la distribution initiale de la pression. Il est essentiel de noter que les sauts à la discontinuité peuvent être tout à fait arbitraires. Par ailleurs, on sait que certaines relations (12.12) du paragraphe précédent doivent être vérifiées sur la surface des discontinuités qui peuvent exister en tant que des formations stables. Il est donc évident qu'au cas où la discontinuité initiale ne vérifie pas ces conditions nécessaires, elle ne peut exister comme telle et doit se décomposer en plusieurs discontinuités s'éloignant les unes des autres avec le temps. Une étude générale de la question du comportement de la décomposition de discontinuité a été faite par N. Kotchine et elle figure dans tous les traités sérieux de mécanique des milieux continus (voir, par exemple, § 93 de l'ouvrage [137]). L'image automodèle de l'écoulement engendré sur le plan x, t est schématisée par une des cinq configurations possibles sur la figure 13.1. Les quatre premières contiennent une discontinuité de contact DC figurée en pointillé

*) On pourrait également traiter le cas plus général où les constantes $\varkappa$, ρ_0, c_0 dans l'équation d'état (13.1) sont distinctes de part et d'autre de la frontière $x = 0$. Nous ne le ferons pas par souci d'alléger l'exposé de complications techniques inutiles.

sur laquelle la densité subit un saut tandis que la pression et la composante transversale de la vitesse sont continues. Désignons les valeurs égales constantes de celles-ci dans les domaines situés à gauche et à droite de la discontinuité de contact par P et U et les valeurs différentes de la densité et donc de l'énergie interne, par

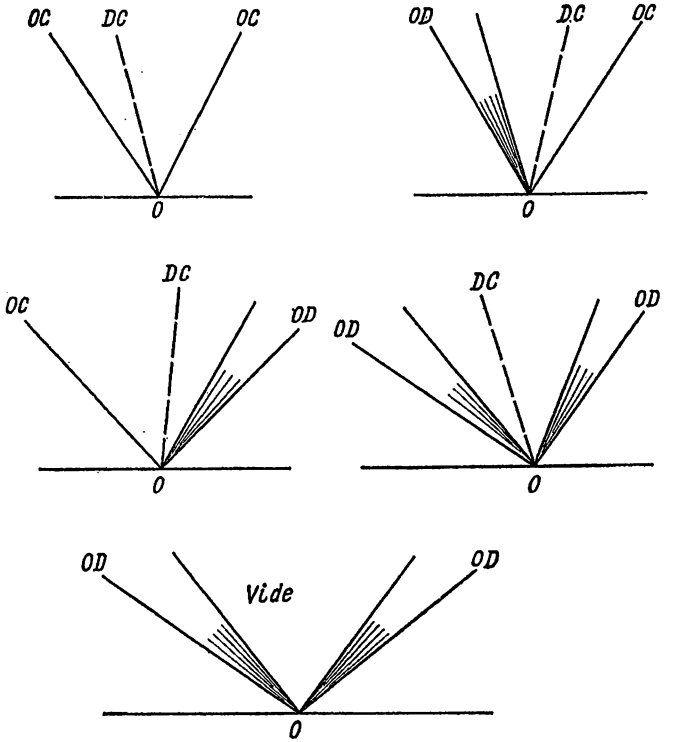


Fig. 13.1

R_{I}, E_{I} pour le domaine gauche et par R_{II}, E_{II} pour le domaine droit. A leur tour, ces domaines sont séparés des domaines non perturbés aux paramètres (p_{I}, ρ_{I}, u_{I}) à gauche et (p_{II}, ρ_{II}, u_{II}) à droite soit par une onde de choc OC, soit par une onde de détente OD que pour abréger nous convenons d'appeler « droite » et « gauche ». La dernière configuration représente le cas limite où à la suite d'un « éparpillement » il se forme un domaine du vide où la densité tombe jusqu'à la valeur $\rho = 0$ dans les deux ondes de détente contiguës au domaine du vide à gauche et à droite. Passons à l'étude mathématique du problème. Comme on l'a déjà noté, sur l'onde de choc doivent être vraies les rélations (12.12) entre la vitesse de l'onde de choc D

et les grandeurs en amont et en aval du front de celle-ci. Comme corollaire il en découle aisément l'égalité (voir, par exemple [137], § 82):

$$E-\varepsilon-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)(p+P)=0,$$

où (p, ρ, ε) sont des grandeurs en amont de l'onde de choc, (P, R, E) en aval du front de l'onde de choc. En éliminant ε et E à l'aide de l'équation d'état (13.1) on obtient l'adiabatique d'Hugoniot

$$R=\rho\,\frac{(\varkappa+1)(P+p_0)+(\varkappa-1)(p+p_0)}{(\varkappa-1)(P+p_0)+(\varkappa+1)(p+p_0)}. \tag{13.2}$$

En introduisant, comme on le fait dans l'ouvrage [29], la vitesse massique

$$a_{\mathrm{I}}=\rho_{\mathrm{I}}(u_{\mathrm{I}}-D_{\mathrm{I}})=R_{\mathrm{I}}(U-D_{\mathrm{I}}),$$

des relations (12.12) écrites pour l'onde de choc de gauche (si elle l'est) on a

$$U-u_{\mathrm{I}}+\frac{P-p_{\mathrm{I}}}{a_{\mathrm{I}}}=0, \tag{13.3}$$

$$a_{\mathrm{I}}=\sqrt{\rho_{\mathrm{I}}\left[\frac{\varkappa+1}{2}(P+p_0)+\frac{\varkappa-1}{2}(p_{\mathrm{I}}+p_0)\right]}. \tag{13.4}$$

D'une manière analogue, pour l'onde de choc de droite (si c'est une onde de choc), après avoir introduit la vitesse massique

$$a_{\mathrm{II}}=\rho_{\mathrm{II}}(D_{\mathrm{II}}-u_{\mathrm{II}})=R_{\mathrm{II}}(D_{\mathrm{II}}-U)$$

des mêmes relations (12.12) on obtient

$$U-u_{\mathrm{II}}-\frac{P-p_{\mathrm{II}}}{a_{\mathrm{II}}}=0, \tag{13.5}$$

$$a_{\mathrm{II}}=\sqrt{\rho_{\mathrm{II}}\left[\frac{\varkappa+1}{2}(P+p_0)+\frac{\varkappa-1}{2}(p_{\mathrm{II}}+p_0)\right]}. \tag{13.6}$$

Dans le cas de l'onde de détente au lieu des relations (12.12) il faut se servir des conditions de continuité des invariants de Riemann

$$[u]\pm\frac{2}{\varkappa-1}[c]=0, \quad [\sigma(S)]=0, \tag{13.7}$$

où c est la vitesse du son, S l'entropie. Les crochets indiquent la différence entre les valeurs constantes des grandeurs correspondantes dans les domaines se trouvant à gauche et à droite de l'onde de détente. Le signe « plus » dans la première équation (13.7) est pris pour l'onde de détente de gauche, le signe « moins » pour celle de droite. Pour l'équation d'état binôme (13.1), les grandeurs c, $\sigma(S)$ sont déterminées à l'aide des formules

$$c=\sqrt{\varkappa\frac{p+p_0}{\rho}}, \quad \sigma(S)=\frac{\varkappa(p+p_0)}{\rho^{\varkappa}}, \tag{13.8}$$

ce qui permet d'écrire les relations (13.7) pour l'onde de détente de gauche sous la forme

$$U-u_{\mathrm{I}}-\frac{2}{\varkappa-1}c_{\mathrm{I}}\left[1-\left(\frac{P+p_0}{p_{\mathrm{I}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right]=0, \tag{13.9}$$

et pour l'onde de détente de droite sous la forme

$$U-u_{\mathrm{II}}+\frac{2}{\varkappa-1}c_{\mathrm{II}}\left[1-\left(\frac{P+p_0}{p_{\mathrm{II}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right]=0. \tag{13.10}$$

Le système de relations (13.3) à (13.6), (13.9) à (13.10) est tout à fait analogue à ceux de l'ouvrage [29] utilisés lors de la construction du processus itératif pour le calcul de la décomposition de discontinuité au sein d'un gaz parfait. Dans ce but on peut conférer aux relations (13.9) et (13.10) en cas d'ondes de détente la même forme que dans le cas des ondes de choc (13.3), (13.5):

$$U-u_{\mathrm{I}}+\frac{P-p_{\mathrm{I}}}{a_{\mathrm{I}}}=0 \quad \text{pour l'onde de gauche,}$$

$$U-u_{\mathrm{II}}-\frac{P-p_{\mathrm{II}}}{a_{\mathrm{II}}}=0 \quad \text{pour l'onde de droite,}$$

si l'on introduit les vitesses de masse conventionnelles à l'aide des formules

$$a_{\mathrm{I}}=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\rho_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{I}}\frac{1-\dfrac{P+p_0}{p_{\mathrm{I}}+p_0}}{1-\left(\dfrac{P+p_0}{p_{\mathrm{I}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}}, \tag{13.11}$$

$$a_{\mathrm{II}}=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\rho_{\mathrm{II}}c_{\mathrm{II}}\frac{1-\dfrac{P+p_0}{p_{\mathrm{II}}+p_0}}{1-\left(\dfrac{P+p_0}{p_{\mathrm{II}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}}. \tag{13.12}$$

Cela étant, le processus itératif est construit de la façon suivante. Soit $P^{(i-1)}$ une approximation obtenue pour la grandeur P (pour la première itération $P^{(0)}$ est donnée). Calculons alors la quantité $a_{\mathrm{I}}^{(i-1)}=a_{\mathrm{I}}(P^{(i-1)})$ d'après la formule (13.4) si $P^{(i-1)}\geqslant p_{\mathrm{I}}$, ou d'après (13.11) si $P^{(i-1)}<p_{\mathrm{I}}$, et la quantité $a_{\mathrm{II}}^{(i-1)}=a_{\mathrm{II}}(P^{(i-1)})$ d'après la formule (13.6) si $P^{(i-1)}\geqslant p_{\mathrm{II}}$, ou d'après (13.12), si $P^{(i-1)}<p_{\mathrm{II}}$. La nouvelle approximation $P^{(i)}$ est ensuite déterminée à partir de la formule

$$P^{(i)}=\varphi(P^{(i-1)})=\frac{a_{\mathrm{II}}^{(i-1)}p_{\mathrm{I}}+a_{\mathrm{I}}^{(i-1)}p_{\mathrm{II}}+a_{\mathrm{I}}^{(i-1)}a_{\mathrm{II}}^{(i-1)}(u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}})}{a_{\mathrm{I}}^{(i-1)}+a_{\mathrm{II}}^{(i-1)}} \tag{13.13}$$

qui pour les valeurs a_{I}, a_{II} connues est un corollaire du système de deux équations linéaires (13.3) et (13.5) pour les grandeurs P et U.

La grandeur U peut s'obtenir par la formule

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}} \tag{13.14}$$

une fois le processus itératif ramené à la convergence. Une étude détaillée montre que le processus converge si de trop fortes ondes de détente ne se forment pas par décomposition. Pour le faire converger dans tous les cas on propose, dans l'ouvrage [29], de mener l'itération suivant les formules légèrement modifiées:

$$P^{(i)} = \frac{\alpha_{i-1} P^{(i-1)} + \varphi(P^{(i-1)})}{1 + \alpha_{i-1}},$$

$$\alpha_{i-1} = \begin{cases} \dfrac{\varkappa - 1}{3\varkappa} \dfrac{1 - z_{i-1}}{z_{i-1}^{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \left(1 - z_{i-1}^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right)} - 1 \\ \text{si cette expression est supérieure à zéro,} \\ 0 \text{ dans le cas contraire,} \end{cases}$$

$$z_{i-1} = \frac{P^{(i-1)} + p_0}{(p_I + p_0) + (p_{II} + p_0)}.$$

Comme la résolution du problème de la décomposition de discontinuité sera une opération élémentaire de masse lors de l'intégration numérique des problèmes instationnaires de la dynamique des gaz par la méthode des différences décrite dans ce livre, il nous semble opportun de décrire, pour elle, un autre algorithme utilisant la méthode des tangentes de Newton et assurant une convergence très rapide du processus itératif.

En éliminant entre les relations obtenues (13.3), (13.5) la vitesse de discontinuité de contact U on obtient l'équation suivante pour la pression P:

$$F(P) \equiv f(P, p_I, \rho_I) + f(P, p_{II}, \rho_{II}) = u_I - u_{II}, \tag{13.15}$$

où pour les valeurs $k = \mathrm{I}, \mathrm{II}$

$$f(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \dfrac{P - p_k}{\rho_k c_k \sqrt{\dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa} \pi_k + \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa}}} & \text{si} \quad P \geqslant p_k, \\ \dfrac{2}{\varkappa - 1} c_k \left(\pi_k^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} - 1\right) & \text{si} \quad P < p_k, \end{cases} \tag{13.16}$$

$$\pi_k = \frac{P + p_0}{p_k + p_0}, \qquad c_k = \sqrt{\varkappa \frac{p_k + p_0}{\rho_k}}.$$

Calculons les dérivées première et seconde de la fonction $f(P, p_k, \rho_k)$ par rapport à la variable P :

$$f'(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \dfrac{(\varkappa+1)\pi_k + (3\varkappa-1)}{4\varkappa\rho_k c_k \sqrt{\left(\dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa}\pi_k + \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right)^3}} & \text{si } P \geqslant p_k, \\ \dfrac{1}{\varkappa(P+p_0)}\, c_k \pi_k^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} & \text{si } P < p_k, \end{cases} \tag{13.17}$$

$$f''(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} -\dfrac{(\varkappa+1)[(\varkappa+1)\pi_k + (7\varkappa-1)]}{16\varkappa\rho_k^2 c_k^3 \sqrt{\left(\dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa}\pi_k + \dfrac{\varkappa-1}{2\varkappa}\right)^5}} & \text{si } P > p_k, \\ -\dfrac{\varkappa+1}{2\varkappa^2(P+p_0)^2}\, c_k \pi_k^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} & \text{si } P < p_k. \end{cases} \tag{13.18}$$

Si bien que pour tous les $P > -p_0$ on aura

$$f'(P, p_k, \rho_k) > 0, \; f''(P, p_k, \rho_k) < 0, \tag{13.19}$$

c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (13.15) est une fonction convexe monotonement croissante de l'argument P. Comme pour $P = p_k$ il découle de la formule (13.17) que

$$\lim_{P \to p_k - 0} f'(P, p_k, \rho_k) = \lim_{P \to p_k + 0} f'(P, p_k, \rho_k) = \frac{1}{\rho_k c_k}, \tag{13.20}$$

sa dérivée première est continue. Pour le cas général où $p_I \neq p_{II} \neq -p_0$, le graphique de la fonction $F(P)$ est représenté sur la figure 13.2. Pour simplifier les considérations ultérieures nous supposons que

$$p_I \leqslant p_{II}. \tag{13.21}$$

Cela ne restreint pas la généralité, car dans le cas contraire on peut changer le sens de l'axe des x, i.e. permuter les signes des vitesses u_I, u_{II}, permuter les indices I, II pour les paramètres initiaux et inverser l'opération une fois le calcul effectué.

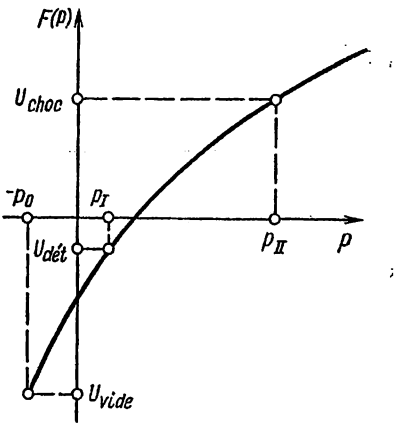


Fig. 13.2

Les valeurs de la fonction $F(P)$ aux points $P = -p_0$, p_I, p_{II} permettent encore avant la résolution de l'équation (13.15) de déterminer laquelle des configurations de la figure 13.1 se forme lors de

la décomposition de discontinuité. En voici les valeurs :

$$F(p_{II}) = U_{choc} = \frac{p_{II} - p_I}{\sqrt{\rho_I \left[\frac{\varkappa+1}{2}(p_{II}+p_0) + \frac{\varkappa-1}{2}(p_I+p_0)\right]}},$$

$$F(p_I) = U_{dét} = -\frac{2c_{II}}{\varkappa-1}\left[1 - \left(\frac{p_I+p_0}{p_{II}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right], \tag{13.22}$$

$$F(-p_0) = U_{vide} = -\frac{2c_I}{\varkappa-1} - \frac{2c_{II}}{\varkappa-1}.$$

On déduit aisément du graphique de la fonction $F(P)$ qu'en fonction de la valeur $u_I - u_{II}$, les situations suivantes sont possibles :

1° $u_I - u_{II} > U_{choc}$. Alors $P > p_{II}$ et donc $P > p_I$. A gauche et à droite se propagent les ondes de choc.

2° $U_{dét} < u_I - u_{II} < U_{choc}$. Alors $p_I < P < p_{II}$. A gauche : l'onde de choc, à droite : l'onde de détente.

3° $U_{vide} < u_I - u_{II} < U_{dét}$. Alors $-p_0 < P < p_I$ et deux ondes de détente se forment.

4° $u_I - u_{II} < U_{vide}$. Il se crée un domaine du vide où il convient de poser $P = -p_0$, $R = 0$. Il est inutile d'essayer de résoudre l'équation (13.15), celle-ci n'ayant pas de racine réelle.

Nous avons omis les cas limites où $u_I - u_{II}$ est égal à l'un des nombres U_{choc}, $U_{dét}$, U_{vide} en raison de leur évidence.

Ainsi donc, l'équation (13.15) a toujours une racine unique si la condition

$$u_I - u_{II} \geqslant U_{vide} = -\frac{2}{\varkappa-1}(c_I + c_{II}) \tag{13.23}$$

est satisfaite.

En ce qui concerne l'algorithme itératif utilisé pour sa détermination, il nous semble que l'application de la méthode des tangentes de Newton convient le mieux, la fonction $F(P)$ étant monotone et convexe.

Si $P^{(i-1)}$ est une valeur approchée de la racine obtenue, on pose

$$P^{(i)} = P^{(i-1)} - \frac{f(P^{(i-1)}, p_I, \rho_I) + f(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II}) - (u_I - u_{II})}{f'(P^{(i-1)}, p_I, \rho_I) + f(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II})}. \tag{13.24}$$

Les fonctions et les dérivées qui y figurent sont définies ci-dessus par les formules (13.16) et (13.17).

Comme la fonction $F(P)$ est convexe vers le haut, car $F''(P) < 0$, l'approximation initiale $P^{(0)}$ doit être choisie telle que soit vérifiée la condition

$$F(P^{(0)}) < u_I - u_{II}. \tag{13.25}$$

S'il en est ainsi, les approximations successives convergent vers la racine cherchée par le bas, en croissant de façon monotone.

Le cours de calcul approché nous apprend que d'après la vitesse de convergence la méthode de Newton est un processus itératif du second ordre, autrement dit la décroissance de l'erreur de la racine cherchée P^* est régie par

$$P^{(i)} - P^* = \frac{1}{2} \frac{F''(\widetilde{P})}{F'(P^{(i-1)})} [P^{(i-1)} - P^*]^2,$$

où $\widetilde{P}$ est un point sur le segment $[P^{(i-1)}, P^{(i)}]$, ce qui fait converger le processus extrêmement vite.

En guise d'algorithme possible de calcul de l'approximation initiale $P^{(0)}$ on peut recommander la « décomposition sonore de discontinuité ». Au lieu de l'équation non linéaire (13.15) on considère dans ce cas le résultat de sa linéarisation :

$$\frac{P - p_I}{\rho_I c_I} + \frac{P - p_{II}}{\rho_{II} c_{II}} = u_I - u_{II},$$

d'où l'on tire

$$P^{(0)} = \frac{p_I \rho_{II} c_{II} + p_{II} \rho_I c_I + (u_I - u_{II}) \rho_I c_I \rho_{II} c_{II}}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}}. \qquad (13.26)$$

Il est curieux de noter que la formule (13.26) fournit l'approximation par le bas pour la racine cherchée P^*, i.e. qu'elle vérifie la condition « souhaitable » (13.25) mentionnée plus haut. Nous ne donnons pas ici les raisonnements simples mais un peu fastidieux qui le confirment, en laissant au lecteur le soin de s'en occuper.

Ce n'est pas par hasard qu'on a mis l'accent sur le problème du choix de l'approximation initiale. Le fait est que les bonnes formules approchées qui assurent une précision suffisante à des fins pratiques permettent de réduire sensiblement le volume du travail pour le calcul de la décomposition de discontinuité. Cela concerne surtout le cas « commun » qu'on rencontrera souvent par la suite, où les grandeurs (p_I, ρ_I, u_I) diffèrent peu de $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$. Dans ce cas même l'« approximation sonore » (13.26) sans aucun procédé itératif se trouverait largement suffisante.

On obtient des résultats probants, surtout dans le cas de deux ondes de choc, en remplaçant l'équation (13.15) ayant ici la forme

$$\frac{P - p_I}{\sqrt{\rho_I \left(\frac{\varkappa+1}{2} P + \frac{\varkappa-1}{2} p_I + \varkappa p_0 \right)}} + \frac{P - p_{II}}{\sqrt{\rho_{II} \left(\frac{\varkappa+1}{2} P + \frac{\varkappa-1}{2} p_{II} + \varkappa p_0 \right)}} = u_I - u_{II}, \qquad (13.27)$$

par l'équation « approchée »

$$\frac{P-p_{\mathrm{I}}}{\sqrt{\theta_{\mathrm{I}}\rho_{\mathrm{I}}(P+p_0)}}+\frac{P-p_{\mathrm{II}}}{\sqrt{\theta_{\mathrm{II}}\rho_{\mathrm{II}}(P+p_0)}}=u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}},$$

où θ_{I}, θ_{II} sont des constantes. A son tour elle se réduit à l'équation quadratique pour P et l'on en prendra la plus grande racine comme solution approchée de (13.27). En ce qui concerne les quantités θ_{I}, θ_{II}, on pourrait recommander de poser $\theta_{\mathrm{I}}=\theta_{\mathrm{II}}=(\varkappa+1)/2$ si l'on s'attend à $P\gg p_{\mathrm{II}}>p_{\mathrm{I}}$, ou $\theta_{\mathrm{I}}=\theta_{\mathrm{II}}=\varkappa$ si $P\approx p_{\mathrm{II}}\approx p_{\mathrm{I}}$, etc.

Une autre variante de calcul approché d'une décomposition de discontinuité est donnée dans l'ouvrage [89].

Notons enfin que les combinaisons fortuites des données d'entrée pour lesquelles est vérifiée l'une des inégalités

$$|u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}}-U_{\text{choc}}|<\delta,\quad |u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}}-U_{\text{dét}}|<\delta,$$
$$|u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}}-U_{\text{vide}}|<\delta,$$

où U_{choc}, $U_{\text{dét}}$, U_{vide} sont déterminées plus haut d'après les formules (13.22), δ la mesure de précision prévue, permettent immédiatement de poser $P^*\approx p_{\mathrm{II}}$, $P^*\approx p_{\mathrm{I}}$, $P^*\approx -p_0$ respectivement. Le cas où lors de la décomposition de discontinuité se forment deux ondes de détente est plus intéressant. L'équation (13.15) prend alors la forme

$$-\frac{2}{\varkappa-1}c_{\mathrm{I}}\left[1-\left(\frac{P+p_0}{p_{\mathrm{I}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right]-$$
$$-\frac{2}{\varkappa-1}c_{\mathrm{II}}\left[1-\left(\frac{P+p_0}{p_{\mathrm{II}}+p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right]=u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}},\quad (13.28)$$

si bien que sa solution P^* se détermine immédiatement d'après la formule

$$P^*=(p_{\mathrm{I}}+p_0)\left[\frac{u_{\mathrm{I}}-u_{\mathrm{II}}-U_{\text{vide}}}{U_{\text{dét}}-U_{\text{vide}}}\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}-p_0.\quad (13.29)$$

Pour achever la description de l'algorithme de la solution du problème de la décomposition de discontinuité il nous reste à donner les formules pour les autres grandeurs décrivant les configurations possibles indiquées sur la figure 13.1. Elles peuvent toutes être trouvées dès qu'on a calculé la pression P sur la discontinuité de contact. Nous avons déjà donné la formule (13.14) pour la vitesse U de la discontinuité de contact:

$$U=\frac{a_{\mathrm{I}}u_{\mathrm{I}}+a_{\mathrm{II}}u_{\mathrm{II}}+p_{\mathrm{I}}-p_{\mathrm{II}}}{a_{\mathrm{I}}+a_{\mathrm{II}}}$$

Ici a_I, a_{II} sont des vitesses massiques calculées lors de la dernière itération.

Si l'onde de gauche est une onde de choc, sa vitesse est

$$D_I = u_I - \frac{a_I}{\rho_I}, \tag{13.30}$$

la densité R_I étant déterminée d'après l'adiabatique d'Hugoniot (13.2):

$$R_I = \rho_I \frac{(\varkappa+1)(P+p_0)+(\varkappa-1)(p_I+p_0)}{(\varkappa-1)(P+p_0)+(\varkappa+1)(p_I+p_0)} = \frac{\rho_I a_I}{a_I - \rho_I(u_I - U)}.$$

Si l'onde de gauche est une onde de détente, les vitesses des caractéristiques extrêmes qui la limitent se calculent par

$$D_I = u_I - c_I, \quad D_I^* = U - c_I^*,$$

où $c_I^* = c_I + \frac{\varkappa-1}{2}(u_I - U)$, et la densité R_I dans le domaine situé à gauche de la discontinuité de contact par la formule

$$R_I = \varkappa \frac{P+p_0}{(c_I^*)^2}$$

Des formules analogues sont écrites pour l'onde de droite. Si celle-ci est une onde de choc, alors

$$D_{II} = u_{II} + \frac{a_{II}}{\rho_{II}}, \quad R_{II} = \frac{\rho_{II} a_{II}}{a_{II} + \rho_{II}(u_{II} - U)},$$

si elle est une onde de détente,

$$D_{II} = u_{II} + c_{II}, \quad c_{II}^* = c_{II} - \frac{\varkappa-1}{2}(u_{II} - U),$$

$$D_{II}^* = U + c_{II}^*, \quad R_{II} = \varkappa \frac{P+p_0}{(c_{II}^*)^2}.$$

Ainsi nous avons donné une description complète de l'algorithme permettant de construire la solution généralisée du problème gazodynamique de la décomposition d'une discontinuité initiale. L'unicité de la solution de ce problème, on l'a déjà indiqué dans le paragraphe précédent, s'obtient à l'aide de la loi d'accroissement d'entropie. Sinon on ne peut garantir l'unicité. Etant donné l'importance de principe de cette situation, faisons l'étude détaillée d'un exemple qui s'y rapporte.

Pour plus de simplicité prenons des paramètres d'entrée du problème de la décomposition de discontinuité (p_I, ρ_I, u_I), (p_{II}, ρ_{II}, u_{II}) qui satisfont aux conditions de symétrie par rapport à la frontière de séparation: $p_I = p_{II}$, $\rho_I = \rho_{II}$, $u_I = -u_{II}$.

Soit, en outre, $p_0 = 0$. Alors, $c_I = c_{II} = c$, $U_{\text{dét}} = 0$, $U_{\text{vide}} = -\frac{2c}{\varkappa - 1}$. Si la condition

$$-\frac{2c}{\varkappa-1} < \frac{1}{2}(u_I - u_{II}) < 0$$

est vérifiée, alors la décomposition de discontinuité donne naissance à deux ondes de détente séparées par un domaine où $U = 0$ et P^* est donnée par la formule (13.29).

Maintenant, essayons de chercher la solution de ce problème sous la forme d'une configuration à deux ondes de choc. Alors, il convient de déterminer la pression P dans le domaine qui les sépare à partir de l'équation (13.27) qui pour les valeurs données des paramètres d'entrée prend la forme

$$P - p_I = \frac{u_I - u_{II}}{2} \sqrt{\rho_I \left(\frac{\varkappa+1}{2} P + \frac{\varkappa-1}{2} p_I\right)}. \qquad (13.31)$$

En élevant au carré on obtient l'équation

$$(P - p_I)^2 = \rho_I \left(\frac{u_I - u_{II}}{2}\right)^2 \left(\frac{\varkappa+1}{2} P + \frac{\varkappa-1}{2} p_I\right), \qquad (13.32)$$

ayant obligatoirement deux racines réelles. Si l'on pose la condition supplémentaire

$$\frac{\varkappa-1}{2} \rho_I \left(\frac{u_I - u_{II}}{2}\right)^2 < p_I, \qquad (13.33)$$

une de ces racines, celle qui est positive et inférieure à p_I, fournit la solution de l'équation (13.31). La seconde racine est supérieure à p_I, donc elle est superflue et résulte du passage de l'équation (13.31) à (13.32).

Ainsi donc, à côté de la configuration de décomposition de discontinuité avec ondes de détente décrite on a construit une autre solution avec ondes de choc.

Elle satisfera aux lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie (prises en compte lors de la construction de l'algorithme). Mais elle ne satisfera pas à la loi d'accroissement d'entropie!

En effet, calculons pour la valeur obtenue $P < p_I$ la valeur R d'après l'adiabatique d'Hugoniot (13.2) et considérons le rapport de la quantité $\sigma = P/R^\varkappa$ en aval du front de l'onde de choc à la quantité $\sigma_I = p_I/\rho_I^\varkappa$ en amont du front. Rappelons que $\sigma = \sigma(S)$ est une fonction de l'entropie telle que sa dérivée $\sigma'(S) > 0$, comme il découle de la formule (12.7),

$$\frac{\sigma}{\sigma_I} = \frac{P}{p_I}\left(\frac{R}{\rho_I}\right)^{-\varkappa} = (1+\theta)\left(\frac{1+\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\theta}{1+\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\theta}\right)^\varkappa = g(\theta),$$

où $\theta = P/p_I - 1$. On a évidemment $-1 < \theta < 0$ si $P < p_I$. Par dérivation directe on peut s'assurer sans peine que

$$\frac{dg}{d\theta} = \frac{\varkappa^2 - 1}{4\varkappa^2} \cdot \frac{\theta^2}{\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\theta\right)\left(1 + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\theta\right)(1+\theta)} g(\theta).$$

Il découle de ces formules d'une part que pour des θ petits la grandeur $g(\theta) = O(\theta^3)$, i.e. pour une onde de choc faible le saut d'entropie est un petit de troisième ordre par rapport au saut de pression (voir, par exemple, § 83 de [137]). D'autre part, comme $g(0) = 1$, $\frac{dg}{d\theta} \geqslant 0$, il vient que $g(\theta) < 1$ pour $\theta < 0$, i.e. $S < s_I$ pour $P < p_I$ comme on l'a indiqué auparavant. La solution correspondante est parfois appelée onde de choc de détente (à la différence des ondes de choc réelles qui sont les ondes de choc de compression). On nie l'existence de ces ondes, car elles sont en contradiction avec la loi d'accroissement de l'entropie.

Ainsi donc, il a suffi d'envisager le problème de la décomposition de discontinuité pour nous convaincre que pour assurer l'unicité de la solution il faut appliquer non seulement les lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie (dont découlent les relations algébriques sur les ondes utilisées précédemment), mais aussi la loi d'accroissement de l'entropie sur les discontinuités.

§ 14. Schéma pour les problèmes unidimensionnels de la dynamique des gaz

Description générale du schéma. Lois de conservation aux différences dans le cas de la géométrie « plane ». Utilisation des maillages flottants et modification correspondante du schéma aux différences. Géométrie à symétrie axiale, forme différentielle et forme aux différences des lois de conservation. Equations de la dynamique des gaz sous forme d'approximation quasi unidimensionnelle.

En partant des principes qu'on a exposés dans le ch. I sur les exemples des systèmes d'équations hyperboliques linéaires, nous entreprendrons de construire le schéma aux différences pour les équations instationnaires de la dynamique des gaz (12.1) dépendant d'une variable spatiale x sur la base des lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie qui ont la forme des identités intégrales (12.10) complétées par l'équation d'état $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$.

Supposons qu'à l'instant initial $t = t_0$ le gaz est réparti en couches par l'intermédiaire des nœuds du maillage de coordonnées x_j. Les longueurs des intervalles $x_j - x_{j-1} = h_{j-1/2}$ peuvent en général être différentes. Les grandeurs u, ρ, p, $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ sont constantes à l'intérieur de chaque couche et pour une couche de numéro $j - 1/2$ intercalée entre les nœuds x_{j-1} et x_j leurs valeurs sont notées $(u, \rho, p, \varepsilon)_{j-1/2}$. Comme les vitesses et les pressions dans les couches voisi-

nes $j - 1/2$, $j + 1/2$ peuvent être inégales, une décomposition de discontinuité peut se produire à la frontière entre celles-ci, i.e. au point $x = x_j$. Il découle alors des résultats du paragraphe précédent que la variation des grandeurs physiques lors de cette décomposition sera décrite par une solution automodèle des équations de la dynamique des gaz de la forme

$$u = u(\xi),\ \rho = \rho(\xi),\ p = p(\xi),\ \varepsilon = \varepsilon(\xi),$$

où la variable automodèle $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0}$. On voit avec ces formules que les valeurs u, ρ, p, ε au point $x = x_j$ restent égales à certaines constantes que nous notons respectivement U_j, R_j, P_j, E_j (« grandes » quantités) jusqu'à ce que les ondes engendrées par la décomposition des discontinuités aux nœuds voisins $x = x_{j-1}$ et $x = x_{j+1}$ arrivent au point $x = x_j$. Pour cette raison nous considérerons le processus étudié pendant un intervalle de temps τ suffisamment petit, pour que les valeurs U_j, R_j, P_j, E_j dans tous les nœuds j puissent être considérées comme invariables.

La distribution des grandeurs u, ρ, p, ε suivant la coordonnée x à l'instant $t = t_0 + \tau$ construite à l'aide de l'algorithme de calcul de la décomposition des discontinuités dans tous les nœuds x_j sera fort compliquée. Comme dans le § 2 pour les équations de l'acoustique, nous la remplaçons par la distribution continue par morceaux qui s'obtient si à l'intérieur de chaque intervalle $j - 1/2$ on suppose la densité massique ρ, les densités d'impulsion ρu et d'énergie totale $\rho(\varepsilon + u^2/2)$ égales à leurs valeurs moyennes sur l'intervalle. Les nouvelles valeurs des grandeurs ainsi obtenues seront désignées, à l'instant $t_0 + \tau$, par $(u, \rho, p, \varepsilon)^{j-1/2}$. Les lois de conservation appliquées à la maille du réseau $j - 1/2$ pendant le temps de t_0 à $t_0 + \tau$ permettent d'établir les équations pour les valeurs moyennes $(u, \rho, p, \varepsilon)^{j-1/2}$, sans utiliser la distribution sur la couche à $t = t_0 + \tau$, sous la forme

$$\begin{gathered}
[\rho^{j-1/2} - \rho_{j-1/2}](x_j - x_{j-1}) + \tau[\mathscr{M}_j - \mathscr{M}_{j-1}] = 0, \\
[(\rho u)^{j-1/2} - (\rho u)_{j-1/2}](x_j - x_{j-1}) + \tau[\mathscr{J}_j - \mathscr{J}_{j-1}] = 0, \qquad (14.1) \\
\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)^{j-1/2} - \rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right)_{j-1/2}\right](x_j - x_{j-1}) + \tau[\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_{j-1}] = 0,
\end{gathered}$$

où sont introduites les notations

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_j &= (RU)_j, \\
\mathscr{J}_j &= (P + RU^2)_j, \qquad (14.2) \\
\mathscr{E}_j &= \left[RU\left(E + \frac{U^2}{2}\right) + PU\right]_j
\end{aligned}$$

pour les grandeurs traduisant le flux massique, les flux d'impulsion

et d'énergie par unité de longueur de l'arête latérale de la maille rectangulaire du maillage dans le plan des variables x, t. En les complétant par l'équation d'état

$$\varepsilon^{j-1/2} = \varepsilon(p^{j-1/2}, \rho^{j-1/2}),$$

il devient possible d'écrire les formules pour le calcul des grandeurs $(u, \rho, p, \varepsilon)^{j-1/2}$. On peut admettre qu'elles décrivent de façon approchée l'état du gaz à l'instant $t_0 + \tau$. Si on les prend pour l'état initial et si on refait le calcul d'après le schéma décrit, on parviendra à progresser dans le temps d'une valeur $\bar{\tau}$ (en général différente de τ), obtenant ainsi l'état approché du gaz à l'instant $t_0 + \tau + \bar{\tau}$, etc.

On peut vérifier que pour les fonctions lisses le schéma aux différences décrit fournit une approximation du premier ordre des équations différentielles de la dynamique des gaz (12.1). La stabilité du schéma assurée par le calcul à pas en temps satisfaisant au critère correspondant et le fait que le schéma se base sur les lois de conservation nous autorisent à espérer que les solutions approchées fournies par ce schéma aux différences seront voisines des solutions généralisées des équations de la dynamique des gaz même si ces solutions généralisées contiennent des discontinuités (ondes de choc).

Jusqu'ici nous avons décrit le schéma aux différences dans l'hypothèse que les nœuds du maillage sont immobiles. Or, il est indubitable qu'en dégageant au cours du calcul des frontières intéressantes du point de vue physique (ondes de choc, discontinuités de contact, frontières des ondes de détente, frontières entre des milieux différents, etc.) on peut notablement améliorer la qualité du calcul. C'est effectivement le cas avec le schéma aux différences décrit si l'on sait effectuer le calcul avec les maillages flottants. Pour cela il suffit d'introduire certaines modifications dans le calcul des « grandes » valeurs et dans les formules de calcul des flux. C'est ce que nous allons faire.

Supposons qu'à l'instant $t = t_0$ les frontières du domaine de calcul aient pour coordonnées $x_0 = x_{\rm I}$, $x_J = x_{\rm II}$. Des conditions aux limites, on le verra plus tard, on peut tirer les vitesses des frontières $W_{\rm I}^*$ et $W_{\rm II}^*$. Leur nouvelle position à l'instant $t_0 + \tau$ se calcule à l'aide des formules

$$\bar{x}_{\rm I} = x_{\rm I} + \tau W_{\rm I}^*, \quad \bar{x}_{\rm II} = x_{\rm II} + \tau W_{\rm II}^*.$$

Si l'on conserve la même loi de répartition des nœuds du maillage à l'intérieur du domaine de calcul *) que sur la couche

*) Cela n'est pas obligatoire, la loi de répartition pouvant se modifier au cours du calcul. Le procédé le plus simple consiste à la varier « doucement », de pas à pas.

Toutefois, on peut procéder à la reconstruction radicale en éliminant, par exemple, les nœuds du maillage ou en intercalant de nouveaux. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [2].

$t = t_0$, leurs nouvelles coordonnées à l'instant $t_0 + \tau$ seront

$$x^j = \bar{x}_I + \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{x_{II} - x_I}(x_j - x_I).$$

Nous supposons que dans l'intervalle de temps de t_0 à $t_0 + \tau$ le nœud du maillage de numéro j se déplace à la vitesse constante $W_j^* = (x^j - x_j)/\tau$. Pour tenir compte de cette circonstance, lors du calcul des « grandes » valeurs $(U, R, P, E)_j$, une fois le calcul de la décomposition de discontinuité correspondante effectué, il faut, pour fixer les « grandes » valeurs, voir par laquelle des zones passe le rayon $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0} = W_j^*$ traduisant le mouvement du nœud j.

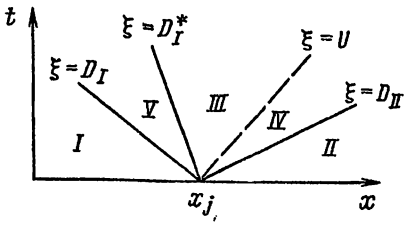


Fig. 14.1

Par exemple, dans le cas de la configuration représentée sur la figure 14.1 on aura ceci:

1° Si $W_j^* \leqslant D_I$, alors $(U, P, R)_j = (u, p, \rho)_{j-1/2}$ du domaine I.

2° Si $W_j^* \geqslant D_{II}$, alors $(U, P, R)_j = (u, p, \rho)_{j+1/2}$ du domaine II.

3° Si $D_I^* \leqslant W_j^* \leqslant U$, alors $(U, P, R)_j = (U, P, R_I)$ pour le domaine III situé entre la discontinuité de contact et l'onde de détente de gauche.

4° Si $U \leqslant W_j^* = D_{II}$, alors $(U, P, R)_j = (U, P, R_{II})$ correspondant au domaine IV situé entre la discontinuité de contact et l'onde de choc de droite.

5° Si $D_I < W_j^* < D_I^*$, le rayon passe par la zone V occupée par l'onde de détente. Comme une onde de détente doit vérifier les relations (13.7) on obtient les formules suivantes pour les « grandes » valeurs sur le rayon:

$$\begin{aligned} c_j^* &= \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}(u_{j-1/2} - W_j^*) + \frac{2}{\varkappa + 1} c_{j-1/2}, \\ U_j &= W_j^* + c_j^*, \\ P_j &= (p_{j-1/2} + p_0)\left(\frac{c_j^*}{c_{j-1/2}}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} - p_0, \\ R_j &= \frac{\varkappa (P_j + p_0)}{(c_j^*)^2}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

On peut traiter de la même manière les autres configurations engendrées par la décomposition de discontinuité (voir fig. 13.1).

Le mouvement des nœuds du réseau doit être pris en considération non seulement pour le calcul de « grandes » quantités mais dans les formules (14.1) représentant sous la forme aux différences les

lois de conservation (12.10) pour l'intervalle du réseau de numéro $j - 1/2$ dans l'intervalle de temps t_0, $t_0 + \tau$. On vérifie sans peine qu'au cas où le point x_j se déplace à la vitesse W_j^*, dans les formules (14.1) le flux massique $\mathscr{M}_j$, les flux d'impulsion $\mathscr{J}_j$ et d'énergie $\mathscr{E}_j$ doivent être remplacés par les valeurs

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_j &= [R(U-W^*)]_j, \\ \mathscr{J}_j &= [P + RU(U-W^*)]_j = P_j + \mathscr{M}_j U_j, \\ \mathscr{E}_j &= \left[R\left(E+\frac{U^2}{2}\right)(U-W^*)+PU\right]_j = \left(E+\frac{U^2}{2}\right)_j \mathscr{M}_j + P_j U_j. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Les modifications analogues sont à opérer sur les flux pour le nœud de numéro $j - 1$. C'est là toutes les modifications apportées par l'introduction des réseaux flottants.

Il convient de noter que lors du calcul des problèmes physiques concrets il est pratiquement impossible de dégager les discontinuités naissantes, les interactions entre elles et avec les frontières du domaine. La plupart d'entre elles sont étalées par le schéma aux différences au cours du calcul de « shock-capturing ». Néanmoins la mise en relief des principales frontières même pour un assez petit nombre d'intervalles du réseau permet d'obtenir des résultats fort probants. Nous pouvons recommander au lecteur intéressé l'ouvrage [38] qui traite notamment de cette question.

Arrêtons-nous sur la question de l'application des principes de construction d'un schéma aux différences que nous avons envisagés au calcul des écoulements gazodynamiques instationnaires à symétrie axiale représentés par des fonctions ne dépendant que de la distance à l'axe de symétrie r et du temps t. Les lois correspondantes de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie ont la forme

$$\oint_\Gamma a\,r\,dr - b\,r\,dt = \int\int_\Omega f\,dr\,dt, \tag{14.5}$$

où sont introduites les notations pour les vecteurs colonnes:

$$a = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) v + pv \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.6}$$

Les quantités ρ, p, ε conservent leur ancienne signification et la quantité v est une composante radiale du vecteur vitesse (ses deux

autres composantes — le long de l'axe de symétrie et selon l'angle de rotation — étant posées nulles). L'intégration dans (14.5) est effectuée sur un contour fermé quelconque Γ entourant le domaine Ω sur le plan des variables r, t.

Décomposons le gaz en couches comme précédemment suivant la coordonnée r par les nœuds r_j en posant constantes les quantités $(v, p, \rho, \varepsilon)_{j-1/2}$ à l'intérieur de la couche $r_{j-1} < r < r_j$. Nous pouvons donc écrire pour les lois de conservation (14.5) une forme aux différences analogue à (14.1):

$$(a^{j-1/2} - a_{j-1/2}) \frac{r_j^2 - r_{j-1}^2}{2} + \tau (B_j - B_{j-1}) \frac{r_j + r_{j-1}}{2} = \\ = f_{j-1/2} \tau (r_j - r_{j-1}). \quad (14.7)$$

Ici $\boldsymbol{B}$ est un vecteur colonne composé de flux analogues à (14.4):

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathscr{M} \\ \mathscr{J} \\ \mathscr{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(V - W^*) \\ P + V\mathscr{M} \\ \mathscr{M}\left(E + \frac{V^2}{2}\right) + PV \end{bmatrix}, \quad (14.8)$$

W^* est la vitesse de mouvement d'un nœud du réseau. Les « grandes » quantités nécessaires pour le calcul des flux sont à déterminer de la même façon que dans le cas plan. En calculant le second membre on peut utiliser, pour simplifier, la valeur $p_{j-1/2}$ de la couche « inférieure ».

Pour les lois de conservation (14.5) on peut écrire, en s'appuyant sur les règles usuelles du calcul variationnel, les équations différentielles correspondantes auxquelles doivent satisfaire les solutions lisses

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{a} r) + \frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{b} r) = \boldsymbol{f}, \quad (14.9)$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$ sont définis par (14.6).

Ces équations représentent un cas particulier des équations de la dynamique des gaz écrites au § 22. Le système d'équations (14.9) est équivalent à celui de la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial r} = \frac{1}{r}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{b}). \quad (14.10)$$

Certains auteurs préfèrent un schéma aux différences s'appuyant sur les égalités intégrales valables pour (14.10):

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{a}\, dr - \boldsymbol{b}\, dt = \int\int_\Omega \frac{1}{r}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{b})\, dr\, dt.$$

Les équations aux différences associées ont la forme

$$(a^{j-1/2}-a_{j-1/2})(r_j-r_{j-1})+\tau(B_j-B_{j-1})=$$
$$=\tau\frac{2}{r_j+r_{j-1}}(f_{j-1/2}-b_{j-1/2})(r_j-r_{j-1}), \quad (14.11)$$

si pour le calcul du second membre on utilise les valeurs de la couche « inférieure ».

En comparant les équations aux différences (14.11) avec les équations (14.7) qui, après la simplification par $\frac{1}{2}(r_j + r_{j-1})$, se ramènent à la forme

$$(a^{j-1/2}-a_{j-1/2})(r_j-r_{j-1})+\tau(B_j-B_{j-1})=$$
$$=\tau f_{j-1/2}\frac{1}{r_j+r_{j-1}}(r_j-r_{j-1}), \quad (14.12)$$

on s'aperçoit qu'elles diffèrent uniquement par les seconds membres. La préférence que l'on accorde au schéma (14.11) par rapport à (14.7) ou à (14.12) s'explique d'habitude par la comparaison des résultats numériques qui dans le voisinage de l'axe de symétrie (i.e. pour des r petits) s'avèrent, semble-t-il, plus précis dans le cas du schéma (14.11). On peut en convenir.

En guise de contre-argument en faveur du schéma (14.7) on peut indiquer le fait suivant. S'il y a dans les équations un second membre sous forme aux différences, on ne parvient habituellement pas à satisfaire rigoureusement à la loi de conservation intégrale dans tout le domaine de calcul. Pour cette raison, dans le schéma (14.7) sous forme aux différences les lois de conservation de la masse et de l'énergie dans le domaine de calcul sont rigoureusement vraies et celle de l'impulsion suivant la direction axiale n'est qu'approximativement vraie. Par ailleurs, dans le schéma (14.11) les trois lois de conservation sont satisfaites approximativement.

Notons en conclusion que les équations envisagées pour les symétries plane et cylindrique représentent des cas particuliers des équations unidimensionnelles plus générales de la dynamique des gaz qui sous forme intégrale s'écrivent

$$\oint_{\Gamma} Q(r)[a\,dr-b\,dt]=\int\int_{\Omega} fQ'(r)\,dr\,dt. \quad (14.13)$$

Les équations différentielles correspondantes

$$\frac{\partial}{\partial t}[Q(r)a]+\frac{\partial}{\partial r}[Q(r)b]=fQ'(r) \quad (14.14)$$

sont habituellement appelées équations de la dynamique des gaz en approximation « quasi unidimensionnelle », les écoulements gazeux unidimensionnels pouvant être considérés comme des écoulements dans un tube à parois rigides; $Q(r)$ est l'aire de la section transver-

sale d'un tel tube. Dans les problèmes plans $Q(r) = 1$, dans les problèmes cylindriques $Q(r) = r$, dans les problèmes sphériques $Q(r) = r^2$. Le schéma aux différences que nous avons décrit se généralise de façon évidente au cas des équations découlant des lois de conservation (14.13).

Qui plus est, par analogie avec ce qui a été dit, on peut construire un schéma aux différences explicite pour un système arbitraire quasi linéaire d'équations hyperboliques à deux variables en s'appuyant sur l'ensemble correspondant des lois de conservation intégrales. Au § 18 on verra notamment que cela sera valable pour les équations du type hyperbolique décrivant les écoulements gazeux stationnaires dépendant de deux variables spatiales à condition que l'écoulement soit supersonique par rapport à l'une de ces variables.

§ 15. Conditions aux limites pour les problèmes unidimensionnels

Le système d'équations aux différences nécessite que soient donnés le flux massique, les flux d'impulsion et d'énergie à travers les frontières. Modification du problème de la décomposition de discontinuité en tant que mode de réalisation des conditions aux limites en cas de: 1° paroi imperméable, 2° onde de choc extérieure, 3° frontière libre. Réalisation des conditions aux limites en régime supersonique en amont (4°) ou en aval (5°) du flux gazeux. Organisation du calcul sur les frontières internes entre les domaines de calcul.

Le paragraphe précédent était consacré au schéma aux différences pour le calcul des problèmes instationnaires de dynamique des gaz à une variable spatiale dans l'hypothèse que le maillage $\{x_j\}$ s'étend indéfiniment dans les deux sens de l'axe des x. Or, le plus souvent le domaine de calcul des problèmes pratiques est fini.

Soit, à l'instant initial $t = t_0$, le segment $x_{\mathrm{I}} \leqslant x \leqslant x_{\mathrm{II}}$. Divisons-le en J couches par les nœuds de réseau x_j; $j = 0, 1, \ldots, J$ dont les nœuds extrêmes coïncident avec les extrémités du segment: $x_0 = x_{\mathrm{I}}$, $x_J = x_{\mathrm{II}}$.

L'algorithme décrit nous permet d'effectuer le calcul pour les intervalles « intérieurs » du réseau $j - 1/2 = 1, \ldots, J - 2$. Quant au calcul pour les deux intervalles extrêmes il doit être complété conformément aux formules (14.1) et (14.4) par les règles du calcul des grandeurs

$$\mathscr{M}_0 = R_0 (U_0 - W_0^*), \quad \mathscr{J}_0 = P_0 + U_0 \mathscr{M}_0,$$
$$\mathscr{E}_0 = \left(E + \frac{U^2}{2}\right)_0 \mathscr{M}_0 + P_0 U_0 \tag{15.1}$$

pour l'extrémité de gauche du domaine de calcul $x = x_{\mathrm{I}}$ et des grandeurs analogues $\mathscr{M}_J$, $\mathscr{J}_J$, $\mathscr{E}_J$ pour l'extrémité de droite du domaine $x = x_{\mathrm{II}}$. On les appellera dans ce qui suit flux limite massique et flux limites d'impulsion et d'énergie.

Il est indubitable que le calcul des grandeurs envisagées nécessite des données supplémentaires. Celles-ci sont habituellement formulées sous la forme des conditions aux limites, dont la forme découle du contenu concret du problème physique à résoudre. Au cours du calcul il faut donc nous assurer que non seulement les équations de la dynamique des gaz mais aussi les conditions aux limites associées aux extrémités de gauche et de droite du segment sont vérifiées (de manière approchée). Notre but n'est pas de décrire des formules « universelles » valables pour tous les cas mais d'étudier quelques situations typiques.

Prenons, pour fixer les idées, la frontière de gauche du segment.

1° Supposons que la frontière de gauche est une paroi immobile impénétrable pour le gaz. A ces conditions on peut évidemment poser que $U_0 = W_0^* = 0$. Pour le calcul des flux limites (15.1) il ne nous manque donc que la grandeur P_0. Pour établir sa formule de calcul imaginons le problème auxiliaire de la décomposition de discontinuité traité au § 13 pour lequel en tant que grandeurs de droite $(u_{II}, p_{II}, \rho_{II})$ on a choisi les valeurs actuelles $(u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2})$ pour l'intervalle de réseau contigu à l'extrémité de gauche du domaine de calcul, et en tant que grandeurs de gauche (u_I, p_I, ρ_I) les valeurs $(-u_{1/2}, p_{1/2}, \rho_{1/2})$ ne différant de celles de droite que par le signe de la vitesse u. Il est évident qu'une telle décomposition de discontinuité se traduira par une image géométrique symétrique par rapport au point $x = x_0$. En particulier, la condition $U = U_0 = 0$ sera satisfaite et on obtiendra une certaine valeur pour la pression P sur la discontinuité de contact, valeur qui est précisément P_0 cherché.

On aurait pu arrêter là la considération du cas de la paroi immobile *). Or, étant donné le caractère symétrique du problème auxiliaire de la décomposition de discontinuité nous sommes en droit d'écrire les formules explicites permettant de le résoudre.

Si $u_{1/2} < 0$, il se forme deux ondes de choc. Cela étant, l'équation (13.27) pour la pression P se met alors sous la forme

$$\frac{P - p_{1/2}}{\sqrt{\rho_{1/2}\left(\frac{\varkappa+1}{2}P + \frac{\varkappa-1}{2}p_{1/2} + \varkappa p_0\right)}} = -u_{1/2}.$$

Elle se réduit à l'équation quadratique; comme P_0 il convient de prendre sa plus grande racine.

Si $u_{1/2} > 0$, il se crée deux ondes de détente si bien que la pression P_0 peut être directement calculée à l'aide de l'équation (13.28):

$$P_0 = (p_{1/2} + p_0)\left(1 - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_{1/2}}{c_{1/2}}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} - p_0.$$

*) Cette technique d'utilisation d'un sous-programme pour le calcul de la décomposition de discontinuité peut s'appliquer à la réalisation pratique de l'algorithme sur ordinateur.

Signalons qu'on pourrait tout aussi bien traiter le cas où la paroi impénétrable n'est pas immobile mais se déplace à une vitesse donnée W_I^* le long de l'axe des x. Il suffit seulement de remplacer dans les formules écrites la valeur $u_{1/2}$ par la vitesse du gaz par rapport à la paroi de valeur $u_{1/2} - W_I^*$, ce qui revient à passer à un système de coordonnées animé de la vitesse W_I^* dans lequel la paroi deviendra immobile. Naturellement, en calculant les flux (15.1) il faut poser $W_0^* = W_I^*$. La vitesse W_I^* peut encore dépendre du temps t; dans ce cas à chaque pas du calcul il faudra en calculer la nouvelle valeur.

2° Supposons que la frontière de gauche est une onde de choc se déplaçant dans le milieu dont les valeurs de la pression p^*, de la densité ρ^*, de la vitesse u^* sont données. Il est logique de traiter le problème de la décomposition de discontinuité pour lequel les grandeurs de gauche (u_I, p_I, ρ_I) sont posées égales aux valeurs (u^*, p^*, ρ^*) et les grandeurs de droite (u_{II}, p_{II}, ρ_{II}) égales aux valeurs ($u_{1/2}$, $p_{1/2}$, $\rho_{1/2}$). Après avoir calculé la configuration correspondante d'après l'algorithme du § 13 on doit obtenir une onde de choc comme onde de gauche adjacente au flux extérieur dont l'état est caractérisé par les paramètres (u^*, p^*, ρ^*). Sa vitesse, désignée au § 13 par D_I et calculée d'après la formule (13.30), est nommée vitesse de mouvement de la frontière de gauche $W_0^* = W_I^*$. Comme grandeurs U_0, P_0, R_0 nécessaires au calcul des flux limites (15.1) on peut donner soit les quantités (u^*, p^*, ρ^*), soit les quantités (U, P, R_I) calculées pour la décomposition de discontinuité. Elles doivent conduire aux mêmes valeurs des flux (15.1) en vertu des relations sur l'onde de choc de gauche. Notons que les paramètres u^*, p^*, ρ^* du milieu à travers lequel se propage l'onde de choc peuvent ne pas être constants mais dépendre de la coordonnée x ou du temps t ou des deux variables x, t. Cela se traduira par la nécessité d'effectuer à chaque pas le calcul des nouvelles valeurs u^*, p^*, ρ^* en fonction de la position actuelle de l'onde de choc.

3° Supposons que la pression $p = p^*$ soit donnée comme condition aux limites sur la frontière de gauche. (Si $p^* = 0$, on dit que la frontière est libre.) Envisageons un problème modèle unidimensionnel demi-infini : à la frontière $x = x_0$ du milieu caractérisé par les paramètres $u_{1/2}$, $p_{1/2}$, $\rho_{1/2}$ pour $x > x_0$ est appliquée une pression $p(x_0, t) = p^*$. Par analogie avec le problème de la décomposition de discontinuité on peut lui associer la solution automodèle du type suivant.

A droite de la frontière se trouve un domaine adjacent avec les valeurs constantes de la pression $P_0 = p^*$, de la densité R_0 et de la vitesse U_0. Si $p^* > p_{1/2}$, ce domaine est séparé par une onde de choc du milieu de droite dont l'état se caractérise par les paramètres $u_{1/2}$, $p_{1/2}$, $\rho_{1/2}$. Des relations (13.5), (13.6) sur cette onde de choc « de droite » découle que la valeur U_0 peut être calculée à l'aide des for-

mules

$$U = u_{1/2} + \frac{p^* - p_{1/2}}{a_{1/2}},$$

$$a_{1/2} = \sqrt{\rho_{1/2}\left[\frac{\varkappa+1}{2}(p^* + p_0) + \frac{\varkappa-1}{2}(p_{1/2} + p_0)\right]}.$$

Si $p^* < p_{1/2}$, l'onde « de droite » sera une onde de détente. Des relations sur cette onde découle la formule (13.10) pour la valeur U_0:

$$U_0 = u_{1/2} - \frac{2}{\varkappa-1} c_{1/2}\left[1 - \left(\frac{p^* + p_0}{p_{1/2} + p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right].$$

Dans les deux cas la vitesse de mouvement de la frontière gauche W_1^* est posée égale à U_0.

Signalons que pour le type de condition aux limites décrit la remarque faite plus haut sur la modification du calcul au cas où p^* dépend de x et de t reste également valable.

4° La situation la plus simple du point de vue de calcul s'observe quand à travers la frontière de gauche immobile ($W_0^* = 0$) du domaine de calcul « s'introduit » un flux gazeux de paramètres u^*, p^*, ρ^* qui est supersonique, i.e.

$$u^* > c^* = \sqrt{\varkappa \frac{p^* + p_0}{\rho^*}}.$$

Dans ce cas les « grandes » quantités s'écrivent évidemment

$$U_0 = u^*, \quad P_0 = p^*, \quad R_0 = \rho^*.$$

5° Le type de frontière à considérer suivant se rapporte au cas où l'on peut se dispenser de poser sur la frontière quelque condition aux limites que ce soit. Il s'agit de la situation dans laquelle le flux gazeux « s'écoule » à travers la frontière du domaine à la vitesse supersonique. La réalisation pratique s'effectue ainsi: on introduit un intervalle fictif adjacent à la frontière du côté extérieur du domaine de calcul et dans lequel les paramètres soit sont reportés de l'intervalle limitrophe, soit sont linéairement extrapolés sur les deux intervalles adjacents à la frontière. Si le flux est supersonique, alors en résolvant le problème de décomposition de discontinuité on ne tiendra tout simplement pas compte de ces quantités. Toutefois, même si cette condition n'est plus remplie, on peut s'attendre, dans bon nombre de cas, à des résultats satisfaisants (par exemple, si l'on calcule un problème de l'établissement tandis que le défaut n'a lieu qu'au stade initial du processus, ou si la frontière est mise « suffisamment loin » de sorte qu'elle n'influe pratiquement pas sur la partie du domaine de calcul qui présente un intérêt particulier dans le calcul, etc.). Il convient seulement de souligner la nécessité de se montrer plus attentif et d'effectuer un contrôle plus rigoureux dans ce genre de situations.

Bien entendu les types de conditions aux limites considérés ne constituent pas toutes les situations pratiquement possibles. Toutefois, il nous semble en avoir donné suffisamment pour que le lecteur puisse s'orienter dans la bonne voie dans tout cas concret. Nous n'allons pas non plus considérer ici les conditions aux limites sur la frontière de droite. Elles conduisent, naturellement, exactement aux mêmes formules que celles sur la frontière de gauche dont elles diffèrent seulement par certains des signes et l'utilisation des quantités $(u, p, \rho)_{J-1/2}$ au lieu des $(u, p, \rho)_{1/2}$.

Pour conclure ce paragraphe arrêtons-nous encore sur une question importante concernant les opérations de calcul sur les frontières intérieures séparant divers domaines de calcul du problème. De telles frontières apparaissent, nous l'avons déjà indiqué au § 14, lors de la mise en relief, pendant le calcul, des ondes de choc, des discontinuités de contact, des frontières entre milieux distincts, etc., ayant un intérêt particulier du point de vue physique. En les particularisant on pourrait notablement améliorer la qualité du calcul.

L'application du problème de la décomposition de discontinuité permet aisément d'inclure le calcul des frontières intérieures dans le schéma aux différences décrit. Comme données d'entrée pour l'algorithme décrit au § 13, il faut donner les valeurs correspondantes des paramètres à l'instant actuel sur les intervalles de deux domaines de calcul adjacents à la frontière considérée à droite et à gauche. (S'il s'agit de la frontière entre deux milieux distincts, il convient également de donner les paramètres correspondants décrivant leurs équations d'état. L'algorithme décrit au § 13 peut être généralisé de façon naturelle par exemple au cas des équations d'état binômes différant par les paramètres $\varkappa$, ρ_0, c_0.)

Le calcul de la décomposition de discontinuité aboutira à une des configurations présentées au § 13 (voir fig. 13.1). Comme frontière intérieure on adopte une des lignes caractéristiques de cette configuration, en partant du contenu physique du problème. Ainsi, s'il s'agit d'une frontière de contact ou d'une frontière entre deux milieux, la frontière intérieure s'identifie à la discontinuité de contact dans la configuration obtenue. Si la frontière considérée entre les domaines de calcul représente une onde de choc mise en relief par le calcul, il faut alors préciser quelle onde on a en vue: celle « de droite » ou celle « de gauche ». (Les dénominations conventionnelles des ondes « de droite » et « de gauche » ont été introduites à la page 111 au § 13. Conformément à la formule (13.30) la vitesse de l'onde « de gauche » est égale à $D_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{I}} - a_{\mathrm{I}}/\rho_{\mathrm{I}}$, celle de l'onde « de droite » $D_{\mathrm{II}} = u_{\mathrm{II}} + a_{\mathrm{II}}/\rho_{\mathrm{II}}$. Il est clair qu'on peut avoir $D_{\mathrm{I}} > 0$ ou $D_{\mathrm{II}} < 0$, de sorte qu'il est tout à fait conventionnel que de dire que l'onde « de gauche » chemine à gauche et l'onde « de droite » à droite.) Plus tard, au § 17, on va le préciser sur un exemple concret.

Une fois la frontière intérieure identifiée avec une ligne concrète catactérisant la configuration de la décomposition de discontinuité, on détermine la vitesse W^* de son mouvement pour le pas actuel, vitesse nécessaire pour le calcul de la nouvelle position du maillage, ainsi que les valeurs du flux massique, des flux d'impulsion et d'énergie nécessaires au calcul des nouvelles grandeurs gazodynamiques conformément aux lois de conservation. Signalons que la désignation des « grandes » quantités comporte quelque arbitraire tandis que les flux sont déterminés univoquement. Cette circonstance a été notée au point 2° du présent paragraphe.

§ 16. Approximation et stabilité du schéma unidimensionnel

Modèle linéarisé des équations instationnaires de la gazodynamique unidimensionnelle et du schéma aux différences. Décomposition « sonore » de la discontinuité. Condition de stabilité du modèle linéarisé du schéma sans conditions aux limites. Généralisation du critère de stabilité au schéma non linéaire. Approximation des équations linéarisées. Viscosité aux différences.

Etant donné le caractère non linéaire des équations de la dynamique des gaz (12.1) il est impossible de faire une étude de l'approximation et de la stabilité directement pour le schéma aux différences présenté aux §§ 14, 15. On se bornera à l'étude de son analogue pour un système d'équations linéaires aux coefficients constants

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{16.1}$$

sur toute la droite $-\infty < x < +\infty$ pour ne pas alourdir l'exposé par l'étude des conditions aux limites.

Ce système est obtenu par la linéarisation des équations (12.1) et l'utilisation de l'équation d'état linéarisé $p = k_1\rho + k_2\varepsilon$ à constantes k_1, k_2 reliées entre elles par

$$k_1 + \frac{p_0}{\rho_0^2} k_2 = c_0^2.$$

Le système (16.1) décrit bien les processus dans le domaine où la pression, la densité et la vitesse s'écartent peu des valeurs constantes p_0, ρ_0, u_0 et leurs dérivées sont bornées. Les quantités p, ρ, u contenues dans les équations représentent les écarts de pression, de densité et de vitesse par rapport à leurs valeurs dans l'état non perturbé.

Le schéma aux différences que nous avons décrit se transforme, après la linéarisation correspondante, en schéma pour un système linéaire (16.1) en revêtant la forme, en cas de maillage uniforme en coordonnée x à pas h,

$$\begin{aligned}
\rho^{j-1/2} &= \rho_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}[u_0 (R_j - R_{j-1}) + \rho_0 (U_j - U_{j-1})],\\
u^{j-1/2} &= u_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}\left[u_0 (U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{\rho_0}(P_j - P_{j-1})\right], \qquad (16.2)\\
p^{j-1/2} &= p_{j-1/2} - \frac{\tau}{h}[u_0 (P_j - P_{j-1}) + \rho_0 c_0^2 (U_j - U_{j-1})].
\end{aligned}$$

Les « grandes » quantités auxiliaires sont fournies par le problème linéarisé de la décomposition de discontinuité étudié au § 13. Pour le traiter notons que le système linéaire d'équations (16.1) peut être ramené à la forme canonique:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(p - c_0^2\rho) + u_0 \frac{\partial}{\partial x}(p - c_0^2\rho) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + (u_0 + c_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0, \qquad (16.3)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + (u_0 - c_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0.
\end{aligned}$$

D'où il est clair qu'il a trois caractéristiques réelles sur lesquelles sont remplies les relations

$$\begin{aligned}
&p - c_0^2\rho = \text{const le long de } \frac{dx}{dt} = u_0,\\
&u + \frac{p}{\rho_0 c_0} = \text{const le long de } \frac{dx}{dt} = u_0 + c_0, \qquad (16.4)\\
&u - \frac{p}{\rho_0 c_0} = \text{const le long de } \frac{dx}{dt} = u_0 - c_0.
\end{aligned}$$

Dans l'approximation sonore les ondes se formant au nœud $x = x_j$ peuvent être représentées sous la forme de trois discontinuités faibles se propageant avec les vitesses $D_{\mathrm{I}} = u_0 - c_0$, $W = u_0$, $D_{\mathrm{II}} = u_0 + c_0$. Elles partagent le demi-plan $\{-\infty < x < +\infty,\ t > 0\}$ en quatre zones comme l'indique la figure 16.1, par exemple. Par analogie avec ce qui était dit au § 14 à propos d'un problème non linéaire il faut traiter quatre cas différents de la nomination de « grandes » quantités.

1. Si $u_0 > c_0$, alors $(P, R, U)_j = (p, \rho, u)_{j-1/2}$.
2. Si $u_0 < -c_0$, alors $(P, R, U)_j = (p, \rho, u)_{j+1/2}$.

Si $|u_0| < c_0$, alors le calcul des « grandes » quantités nécessitera l'utilisation des relations sur les discontinuités. Pour les équations

linéaires (16.1) elles ont la forme

$$[\rho]\frac{dx}{dt}-u_0[\rho]-\rho_0[u]=0, \tag{16.5}$$

$$[u]\frac{dx}{dt}-u_0[u]-\frac{1}{\rho_0}[p]=0, \tag{16.6}$$

$$[p]\frac{dx}{dt}-u_0[p]-\rho_0 c_0^2[u]=0. \tag{16.7}$$

Remarquons que lorsque $\frac{dx}{dt}=u_0\pm c_0$, la relation (16.7) coïncide avec (16.6), et lorsque $\frac{dx}{dt}=u_0$, elle coïncide avec (16.5) si bien qu'on peut se dispenser de la considérer.

En utilisant la relation (16.6) pour $\frac{dx}{dt}=u_0+c_0$ et $\frac{dx}{dt}=u_0-c_0$ on obtient deux équations pour la détermination des grandeurs

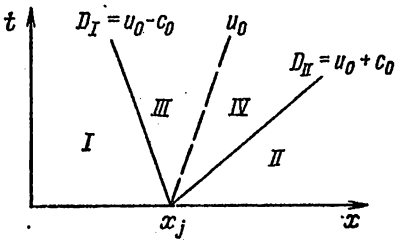


Fig. 16.1

P, U dans les domaines *III* et *IV* sur la figure 16.1:

$$(U-u_{j+1/2})c_0-\frac{1}{\rho_0}(P-p_{j+1/2})=0,$$

$$(U-u_{j-1/2})c_0+\frac{1}{\rho_0}(P-p_{j-1/2})=0.$$

Il en découle que

$$P=\frac{p_{j-1/2}+p_{j+1/2}}{2}-\rho_0 c_0\frac{u_{j+1/2}-u_{j-1/2}}{2},$$

$$U=\frac{u_{j-1/2}+u_{j+1/2}}{2}-\frac{p_{j+1/2}-p_{j-1/2}}{2\rho_0 c_0}.$$

(Rappelons que nous avons déjà rencontré ces formules au § 2 lors de la description du schéma aux différences pour l'acoustique unidimensionnelle.)

Cela étant, de la relation (16.5) sur l'onde $\frac{dx}{dt} = u_0 - c_0$ on tire la valeur R_{III} pour le domaine III:

$$R_{III} = \rho_{j-1/2} - \frac{\rho_0}{c_0}(U - u_{j-1/2}),$$

et de la relation (16.5) sur l'onde $\frac{dx}{dt} = u_0 + c_0$ la valeur R_{IV} pour le domaine IV:

$$R_{IV} = \rho_{j+1/2} + \frac{\rho_0}{c_0}(U - u_{j+1/2}).$$

Dans les deux cas qui restent, posons:

3. Si $-c_0 < u_0 < 0$, alors $P_j = P$, $U_j = U$, $R_j = R_{IV}$.

4. Si $0 < u_0 < c_0$, alors $P_j = P$, $U_j = U$, $R_j = R_{III}$.

On a ainsi achevé la construction du modèle linéarisé pour le schéma aux différences traité au § 14. Comme on le voit, il se décompose en fait en quatre schémas différents en fonction de la relation entre les quantités u_0 et c_0:

$$u_0 > c_0, \quad 0 < u_0 < c_0, \quad -c_0 < u_0 < 0, \quad u_0 < -c_0. \tag{16.8}$$

Au lieu de procéder à une étude minutieuse de la stabilité de chacun de ces schémas on peut directement se servir des résultats présentés au § 9. Remarquons que le système (16.1) peut être symétrisé ne serait-ce que par le fait qu'il peut être écrit sous la forme (16.3). Nous avons fait une étude détaillée du modèle linéarisé dans le but de prouver que le schéma aux différences qui lui est attaché est construit conformément aux recommandations du § 9. Maintenant nous pouvons donc affirmer que ce schéma aux différences (sans conditions aux limites) dans chacun des quatre cas (16.8) est stable au sens de la norme discrète

$$\|F\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\rho_0 \frac{u_{j-1/2}^2}{2} + \frac{p_{j-1/2}^2}{2\rho_0 c_0^2} + k\,(p_{j-1/2} - c_0^2 \rho_{j-1/2})^2\right] \tag{16.9}$$

si le pas en temps τ satisfait à la condition

$$\tau < \tau^* = \frac{h}{\max\,(u_0 + c_0,\ c_0 - u_0)}. \tag{16.10}$$

Le coefficient k dans la formule (16.10) peut être arbitraire. Comme il a été indiqué au § 9, la condition (16.10) est non seulement suffisante mais aussi nécessaire.

Le critère établi a une interprétation physique simple et suggestive: τ^* est le temps nécessaire à la plus rapide des ondes engendrées par la décomposition « sonore » de discontinuité au nœud de réseau x_j pour atteindre le nœud de réseau voisin x_{j-1} ou x_{j+1}.

Cela permet d'espérer que le critère obtenu peut s'appliquer au schéma aux différences décrit pour un système quasi linéaire d'équa-

tions de la dynamique des gaz, ce schéma étant pour celui-ci, nous l'avons bien souligné tout au long de ce paragraphe, un modèle linéarisé.

Notons tout de suite que dans un problème gazodynamique l'intervalle de temps admissible τ^* est différent pour chacune des valeurs même en cas de réseau uniforme ($x_j - x_{j-1} = h_{j-1/2} = h$), les vitesses de propagation des ondes, calculées par l'algorithme pour la décomposition de discontinuité traité au § 13, étant fonction des valeurs concrètes des grandeurs $(u, p, \rho)_{j-1/2}$ et $(u, p, \rho)_{j+1/2}$.

En outre, au cas de l'application des réseaux flottants il faut prendre en compte que le nœud du réseau x_j a une vitesse W_j^*, en se déplaçant « à l'encontre » de l'onde ou en la « fuyant ». Pour cette raison il est naturel de définir la valeur admissible $\tau_{j-1/2}^*$ pour chacun des intervalles de réseau $x_{j-1} < x < x_j$ par la formule

$$\tau_{j-1/2}^* = \frac{x_j - x_{j-1}}{\max\left(D_{j-1}^{II} - W_j^*;\ -D_j^I - W_{j-1}^*\right)}, \tag{16.11}$$

dans laquelle D_{j-1}^{II} et D_j^I désignent les valeurs de la vitesse de l'onde « extrême droite » si la décomposition de discontinuité a lieu au nœud x_{j-1} et de l'onde « extrême gauche » si la décomposition de discontinuité a lieu au nœud x_j.

Comme valeur admissible du pas en temps τ^* il convient de prendre la plus petite des valeurs $\tau_{j-1/2}^*$ sur tous les intervalles du réseau :

$$\tau^* = \min_j \tau_{j-1/2}^*. \tag{16.12}$$

Il faut, toutefois, tenir compte des circonstances suivantes. Premièrement, nous utilisons un critère de stabilité qui n'est justifié que pour le modèle linéarisé du problème gazodynamique. Deuxièmement, il s'avère rationnel du point de vue de l'organisation pratique du calcul de procéder au calcul des valeurs $\tau_{j-1/2}^*$ en même temps qu'au calcul des « grandes » quantités au pas actuel, la restriction obtenue sur le pas τ^* étant utilisée lors du pas suivant de calcul, i.e. avec un retard d'un pas. Enfin, il est parfois utile d'effectuer le calcul avec un pas en temps plus petit que celui autorisé par le critère décrit. De sorte que la formule finale pour le pas en temps $\tau^{(n+1/2)} = t_{n+1} - t_n$, n étant le numéro du pas, est appelée à revêtir la forme

$$\tau^{(n+1/2)} = \nu_n \tau^{*(n-1/2)}, \tag{16.13}$$

Définissons le coefficient de réserve ν_n par la formule

$$\nu_n = \begin{cases} C_2 \text{ si } \tau^{*(n-1/2)} \geqslant C_1 \tau^{*(n-3/2)}, \\ C_1 \dfrac{\tau^{*(n-1/2)}}{\tau^{*(n-3/2)}} \quad \text{au cas contraire,} \end{cases} \tag{16.14}$$

où C_1, C_2 sont des constantes, $0 < C_1 \leqslant 1$, $0 < C_2 \leqslant 1$. Ordinairement, elles sont posées proches de l'unité et peuvent être, au besoin, corrigées au cours du calcul. La pratique d'un grand nombre de calculs effectués par plusieurs auteurs suivant le schéma décrit donne à penser que le critère proposé assure la stabilité du schéma. Pour le modèle linéarisé du schéma aux différences envisagé on peut procéder à la même étude de l'approximation que celle que nous avons faite au § 3 sur l'exemple des équations de l'acoustique. En supposant que u, p, ρ sont des fonctions suffisamment lisses de x, t développons les quantités entrant dans les formules décrivant le schéma aux différences en série de Taylor. Retenons les termes du second ordre inclusivement. Comme point de « référence » on peut prendre $x = x_{j-1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1})$, $t = t_0$, par exemple.

Il a été noté plus haut que quatre variantes des formules pour le calcul de « grandes » quantités sont possibles, i.e. quatre schémas aux différences distincts répondant aux conditions (16.8). Nous n'allons pas alourdir l'exposé par des opérations simples mais fastidieuses et nous nous bornerons à en donner un résultat extrait de l'ouvrage [69]. Rappelons qu'il est possible d'éliminer les dérivées par rapport au temps t apparaissant dans les termes résiduels du développement en utilisant les équations différentielles de départ (16.1) exactement comme nous l'avons fait au § 3.

Au cas où $u_0 > c_0$ (écoulement « supersonique ») le schéma aux différences linéarisé sur les solutions des équations (16.1) donne une approximation de second ordre du système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2}\left[\alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right], \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{h}{2}\left[\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{1}{\rho_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right], \qquad (16.15) \\
&\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2}\left[\alpha \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \rho_0 c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right],
\end{aligned}$$

dans lequel les coefficients α, β sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_{\mathrm{I}} &= u_0\left(1 - \frac{\tau}{h}\frac{u_0^2 + c_0^2}{u_0}\right), \\
\beta = \beta_{\mathrm{I}} &= \rho_0\left(1 - 2u_0\frac{\tau}{h}\right).
\end{aligned} \qquad (16.16)$$

Au cas où $0 < u_0 < c_0$ (écoulement « subsonique ») le système correspondant a la même forme (16.15) mais des coefficients différents :

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha_{\mathrm{II}} &= c_0\left(1 - \frac{\tau}{h}\frac{u_0^2 + c_0^2}{c_0}\right), \\
\beta = \beta_{\mathrm{II}} &= \rho\frac{u_0}{c_0}\left(1 - 2c_0\frac{\tau}{h}\right).
\end{aligned} \qquad (16.17)$$

Pour les deux autres cas le résultat peut être écrit sur la base des deux précédents et cela sans opérations supplémentaires. Nous ne le présentons pas ici. Les seconds membres des équations (16.15) peuvent être interprétés comme la viscosité aux différences (ou termes de diffusion) du schéma linéarisé pour les équations de la dynamique des gaz. Pour $u_0 = c_0$ les formules (16.16) et (16.17) coïncident, traduisant ainsi la variation graduelle de la viscosité lorsqu'on passe par la vitesse du son. D'après l'ouvrage [140] l'introduction du terme de diffusion incluant une caractéristique du flux (vitesse du son c_0 et vitesse du flux u_0 dans notre cas) s'avère optimale au sens d'une localisation étroite du choc de compression sur le réseau aux différences au cours du calcul. Cette conclusion est aussi confirmée par les résultats de l'ouvrage [120] où on compare les calculs de l'écoulement avec onde de choc effectués à l'aide de notre schéma et du schéma de Lax [138] qui introduit dans les équations une viscosité dépourvue des caractéristiques du flux.

§ 17. Illustration du schéma unidimensionnel pour les problèmes instationnaires

Calcul de l'interaction des ondes de choc engendrées par décomposition de discontinuité et par réflexion sur la paroi rigide. Structure de la solution exacte. Résultats d'un calcul grossier avec « étalement » des discontinuités. Description de la tactique du calcul utilisant la particularisation des certaines des discontinuités.

Afin d'illustrer l'application de notre schéma aux différences aux équations unidimensionnelles instationnaires de la dynamique des gaz, considérons la résolution numérique du problème suivant. Soit à l'instant initial $t = 0$ un gaz parfait, dont l'état à gauche du point $x = 0{,}5$ est caractérisé par les paramètres $(p, \rho, u)_{\text{I}}$ et à droite par les paramètres $(p, \rho, u)_{\text{II}}$ groupés sur le *Tableau 1*. L'indice de l'adiabatique $\varkappa = 1{,}4$. Au point $x = 0$ est placée une paroi rigide « immobile », impénétrable pour le gaz. On peut calculer l'écoulement engendré du gaz en appliquant successivement l'algorithme du § 13 aux décompositions de discontinuité aux points Π_1, Π_2, Π_3, etc., notés sur la figure 17.1 où les ondes de choc rencontrent une paroi ou des discontinuités de contact.

Sur la figure 17.1 les ondes de choc sont représentées par des traits pleins, les discontinuités de contact par des traits en pointillé. Ils partagent le plan en plusieurs domaines portant les numéros *I*, *II*, *III*, etc. Dans chacun d'eux les quantités p, ρ, u sont constantes et ont les valeurs groupées au *Tableau 1*. Celui-ci donne également les valeurs de W^*_{gauche}, W^*_{dr} des vitesses des frontières de gauche et de droite de ces domaines qui représentent les vitesses des ondes de choc et des discontinuités de contact apparaissant au cours de l'interaction.

Tableau 1

	I	II	III	IV
p	2,5000	0,5000	5,0000	5,0000
ρ	1,0000	1,0000	1,6250	3,8125
u	0,0000	—2,8026	—0,9806	—0,9806
W^*_{gauche}	0,0000	—0,3328	—2,5495	—0,9806
W^*_{dr}	—2,5495	—	—0,9806	—0,3328
	V	VI	VII	VIII
p	9,3750	10,6177	10,6177	11,9989
ρ	2,5278	2,7627	6,4490	3,0147
u	0,0000	—0,2044	—0,2044	0,0000
W^*_{gauche}	0,0000	—2,4046	—0,2044	0,0000
W^*_{dr}	1,7650	—0,2044	0,9179	2,2411

Le diagramme de la figure 17.1 permet de voir directement comment se complique le tableau avec le temps. Au temps $t = 0{,}5$ on

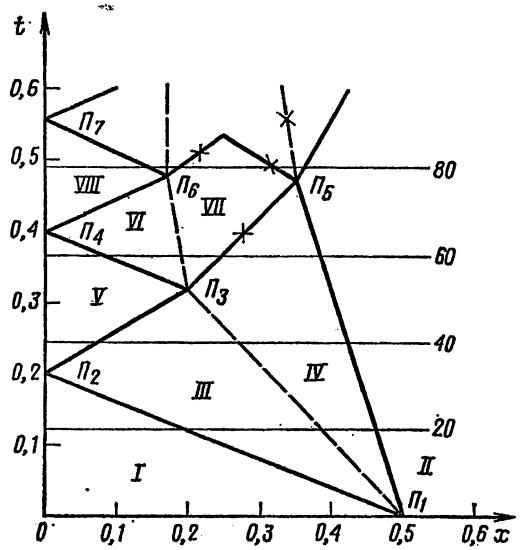


Fig. 17.1

à sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ huit portions dont les paramètres sont de valeurs différentes (dans la configuration se formant lors

de l'intersection des ondes de choc au point Π_5 l'onde de gauche est une onde de détente faible). Pour effectuer le calcul numérique de ce problème suivant le schéma aux différences des §§ 14, 15 on a pris sur le segment $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ un maillage régulier de 20 intervalles à pas $h = 0{,}025$, dans chacun desquels sont donnés les paramètres du domaine I à $t = 0$. Si les données initiales sont posées, on pourrait placer la frontière de droite du problème au point $x = 0{,}5$ en y donnant une condition aux limites du type 4° (« succion supersonique du gaz ») comme on l'a décrit au § 15. Mais pour des raisons méthodiques nous avons complété le maillage à droite par quelques intervalles de même longueur $h = 0{,}025$, en y donnant les paramètres du domaine II. Il est aisé de vérifier qu'à l'instant initial $t = 0$ la valeur admissible du pas en temps conformément au critère formulé au paragraphe précédent est définie par les mailles du domaine II :

$$\tau^* = \frac{h}{c_{II} - u_{II}} = 0{,}00687.$$

En prenant le coefficient de réserve $\nu = 0{,}9$ on obtient la valeur $\tau = 0{,}00618$. Cette valeur du pas était conservée inchangée lors

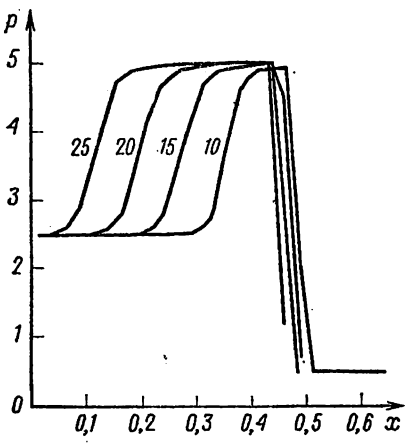


Fig. 17.2

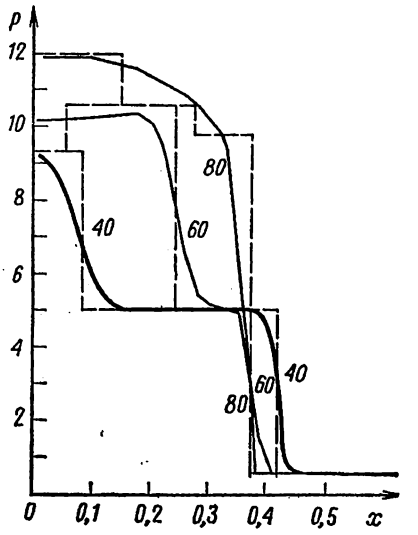


Fig. 17.3

du calcul du stade de problème que nous allons traiter. Le maillage restait immobile pendant le calcul. Toutes les discontinuités étaient « étalées ».

La figure 17.2 reproduit les diagrammes de la pression pour les instants correspondant aux 10-, 15-, 20-, 25-ièmes pas du calcul qui mettent en évidence la propagation des deux ondes de choc engen-

drées par la décomposition de discontinuité au point Π_1 et le degré de l'« étalement » au cours du calcul. Les diagrammes de la pression aux stades plus avancés du calcul (40-, 60-, 80-ièmes pas du calcul) sont représentés sur la figure 17.3. La solution exacte décrite plus haut est figurée en pointillé. Les diagrammes analogues de la densité aux 40- et 80-ièmes pas du calcul sont donnés sur la figure 17.4. Au premier abord il semblerait qu'ils sont loin d'être exacts. Il va sans dire que pour une description détaillée de la solution exacte les erreurs sont trop grandes. Toutefois, son comportement qualitatif à l'égard des valeurs maximales des paramètres gazodynamiques, par exemple, est assez bien traduit. Rappelons que quoi qu'il ne

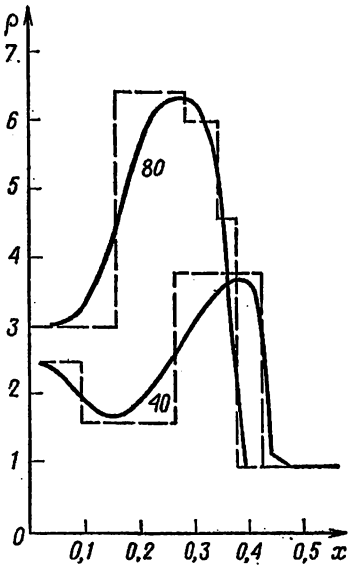


Fig. 17.4

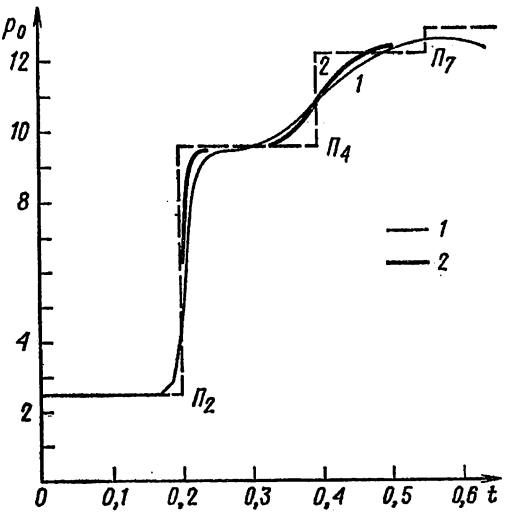


Fig. 17.5

s'agisse ici que du calcul avec 20 intervalles de réseau le 80-ième pas du calcul conduit en fait à la décomposition du domaine de calcul en 8 portions différentes séparées les unes des autres par les ondes ou les discontinuités de contact! Or, il n'est pas toujours nécessaire de mettre en évidence une structure fine de la solution exacte, on peut se contenter de données concernant la variation de pression à la paroi $x = 0$ en fonction du temps t, par exemple. Ce diagramme est représenté sur la figure 17.5 (trait plein *1*) en comparaison avec la solution exacte (trait en pointillé). Notons que la tentative de la préciser en doublant le nombre de points (le temps de calcul quadruple, car, en outre, le pas en temps τ diminue de moitié) apporte de très faibles modifications (courbe *2*, fig. 17.5).

C'est donc seulement si l'on doit connaître les détails de la structure de l'écoulement qu'on est obligé d'effectuer le calcul en particularisant au moins les discontinuités essentielles. C'est précisément dans cet esprit qu'on a exposé les méthodes de résolution des problèmes unidimensionnels de la dynamique des gaz dans l'ouvrage [2]. On effectue alors le calcul en « découpant » le problème en plusieurs domaines de calcul de nombre éventuellement variable au cours du calcul, en intercalant ou en enlevant les nœuds du réseau, etc. L'assemblage des programmes de calcul mettant en œuvre cette technique est assez compliqué. On peut y apporter des simplifications si l'on désigne dès le début un nombre déterminé de domaines visant la particularisation des discontinuités suffisamment concrètes.

Elucidons cela sur l'exemple du problème décrit. Proposons-nous d'effectuer le calcul avec trois domaines de calcul, par exemple, ce seront, au niveau du 20-ième pas, les domaines *I*, *III*, *IV* (il n'est pas nécessaire de particulariser le domaine *II*, car on peut le remplacer par la position de la condition aux limites de droite à condition que le « fond » initial dans le domaine *II* ne dépende pas de la coordonnée x). La situation au point Π_1 est analysée à l'instant $t = 0$ par calcul (appelons cela « dénouement du nœud ») et ceci nous permet de définir le mouvement des frontières séparant trois domaines de calcul. On déterminera automatiquement leur mouvement ultérieur à chaque pas de calcul en résolvant les problèmes correspondants de décomposition de discontinuité calculés à partir des valeurs prises dans les intervalles du réseau adjacents aux frontières à gauche et à droite. Il va sans dire que le calcul se fait sur les réseaux flottants.

A l'approche du temps t_2 correspondant à l'arrivée de l'onde de choc au point paroi Π_2 le domaine *I* se réduit en un point et le pas en temps tend vers zéro. C'est pourquoi sans attendre le temps t_2 nous empêchons la situation d'évoluer de la sorte en modifiant le type de la frontière entre les domaines *I* et *III* : au lieu de l'« onde de choc se propageant à gauche » qu'elle était jusque-là, cette frontière est désignée comme l'« onde de choc se propageant à droite ». Bien plus en un certain voisinage du point Π_2 le calcul de cette frontière est effectué de façon « étalée » (du fait de la reconstitution) pendant un court laps de temps, ensuite cette dernière se transformera en une onde de choc particularisée représentant la frontière entre les domaines *V* et *III*.

A l'approche du point Π_3, le domaine *III* se réduisant en un point, on procède à la même opération : la frontière entre les domaines *V* et *III* est de nouveau désignée comme l'« onde de choc se propageant à gauche » au lieu de l'« onde de choc se propageant à droite ». Son calcul pendant un temps bref est « étalé » ; ensuite elle se transformera en une onde de choc particularisée séparant les

domaines *V* et *VI*. La discontinuité de contact passera de la frontière entre les domaines *III* et *IV* à celle entre les domaines *VI* et *VII*. Quant à l'onde de choc entre les domaines *VII* et *IV* nous la « sacrifierons » en l'« étalant ». Par la suite, on peut procéder de la même façon, par exemple, avec toutes les frontières marquées d'une croix sur la figure 17.1 en restant dans le cadre de trois domaines de calcul.

La diminution du pas en temps provoquée par celle de la longueur du domaine de calcul crée certaines difficultés se traduisant par l'augmentation des calculs et par l'impossibilité d'approcher de très près des points nodaux Π_2, Π_3, etc., où s'effectue la transformation de la structure de la solution. On échappe plus facilement à cette difficulté en appliquant les schémas aux différences implicites, traités plus loin au § 21. Rappelons que la technique mentionnée exposée dans l'ouvrage [2] fait également appel au schéma implicite.

Pour conclure ce paragraphe nous nous arrêterons sur la question de l'application de l'algorithme du calcul de la décomposition de discontinuité aux problèmes instationnaires. On constate que son application devient une opération de masse qui prend la plupart du temps machine pour la résolution des problèmes unidimensionnels et un temps considérable pour les problèmes multidimensionnels. Cela explique l'attention particulière que nous lui avons accordée au § 13. Ordinairement cet algorithme s'applique à la frontière entre deux mailles voisines dans lesquelles les grandeurs diffèrent peu entre elles. Dans ce cas les formules simples pour la décomposition « sonore » de discontinuité donnent des résultats satisfaisants sans qu'on ait à recourir à l'algorithme du § 13.

Mais il n'en est pas toujours ainsi. Ceci vaut avant tout pour les nœuds frontières du réseau. Il peut aussi s'avérer que même aux nœuds intérieurs une décomposition « sonore » de discontinuité se montrerait insuffisante. Par exemple, dans le problème que nous avons traité la décomposition « sonore » de la discontinuité entre les quantités de I et II fournit au point Π_1 une valeur $P^{(0)} = 2{,}738$ selon le *Tableau* 1 au lieu de la valeur exacte $P^* = 5{,}0$. Dans ce problème, l'application des décompositions « sonores » de discontinuité amènerait une erreur un peu plus importante. Mais dans une situation analogue où il s'agirait de la collision de gaz parfaits « froids », i.e. où seraient donnés $p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}} = 0$, les formules de décomposition « sonore » de discontinuité conduiraient à $P^{(0)} = 0$. Le problème serait insoluble car l'écoulement du gaz ne pourrait avoir lieu, les vitesses de masse a_{I} et a_{II} étant nulles. L'utilisation de l'algorithme du § 13 permet aisément de résoudre ce problème tout comme le problème précédemment décrit.

Notons que dans le cas de l'équation d'état binôme (12.8) même la décomposition « sonore » de discontinuité fournit un bon résultat

pour une vitesse de collision pas trop élevée. Par exemple lors du choc de front de deux plaques identiques: $\varkappa = 3{,}0$, $\rho_I = \rho_{II} = \rho_0 = 7{,}87$, $p_I = p_{II} = 0$, $c_0 = 5{,}0$, à la vitesse relative $u_I - u_{II} = 0{,}5$ la valeur exacte de la pression est $P^* = 10{,}3417$, tandis que la décomposition « sonore » fournit la valeur $P^{(0)} = 9{,}8375$, i.e est entachée d'une erreur de l'ordre de 5 %.

§ 18. Ecoulements supersoniques stationnaires bidimensionnels

Equations de l'écoulement supersonique stationnaire sous forme des lois de conservation intégrales. Condition de constance de l'enthalpie totale. Lois de conservation sous forme de différences finies. Formules pour les grandeurs gazodynamiques. Calcul aux frontières du domaine. Critère de stabilité du schéma.

Comme il a été noté à la fin du § 14 les systèmes d'équations hyperboliques quasi linéaires arbitraires à deux variables indépendantes peuvent être traités à l'aide des principes qu'on a utilisés lors de la construction du schéma aux différences pour le calcul des écoulements instationnaires unidimensionnels. Dans le but d'illustrer ceci on a construit dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant un schéma analogue pour le calcul des écoulements supersoniques stationnaires bidimensionnels (plans et à symétrie axiale). Le schéma envisagé fut mis au point pour la première fois dans l'ouvrage [63].

Choisissons les coordonnées cylindriques x, r, φ comme système de coordonnées de notre étude. Désignons par u, v, w les projections du vecteur vitesse du gaz q sur les axes correspondants. Le module du vecteur vitesse $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Supposons que l'écoulement est supersonique dans la direction de la coordonnée x, i.e. supposons remplie en tout point du domaine de calcul la condition

$$u > c, \tag{18.1}$$

où c est la vitesse du son locale.

Pour simplifier l'exposé nous allons imposer des restrictions qui n'affectent pas l'essentiel de la construction du schéma aux différences. Notamment, on va admettre que le gaz est parfait, l'indice de l'adiabatique est $\varkappa$ et, en outre, l'enthalpie totale du flux

$$i + \frac{q^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2}$$

est constante dans le plan des données initiales (et, partant, dans tout le flux) (voir p. ex. [137]).

Avant tout, mettons les équations de l'écoulement sous la forme des lois de conservation intégrales, sans supposer d'abord la symétrie axiale de l'écoulement, car nous envisageons une généralisation ultérieure au cas spatial. Sur une surface quelconque $x = \text{const}$

prenons un contour fermé Γ limitant une aire S. Supposons que le contour Γ et l'aire S sont des fonctions de x. Pour définir la loi traduisant leur déformation il suffit alors de connaître le vecteur

$$\xi = \frac{dn}{dx}$$

situé dans le plan $x = \text{const}$, dn étant la projection du déplacement de Γ sur sa normale extérieure. En chaque point du contour Γ le vecteur ξ tout comme dn est perpendiculaire à l'axe des x et se définit complètement par les projections ξ^r et ξ^φ sur les axes des r et φ.

Les équations différentielles de l'écoulement et les relations sur les fortes discontinuités sont équivalentes au système de lois de conservation intégrales suivant:

$$\frac{d}{dx}\int\int_S a\,dr\,d\varphi = \oint_\Gamma (c - a\xi^\varphi)\,dr - (b - a\xi^r)\,d\varphi + \int\int_S f\,dr\,d\varphi, \qquad (18.2)$$

où S, Γ, ξ^φ et ξ^r sont définis ci-dessus et a, b, c et f sont les vecteurs colonnes:

$$a = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \end{bmatrix},$$

$$rc = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \end{bmatrix}, \quad f = -\frac{\rho}{r}\begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 - w^2 \\ 2vw \end{bmatrix}. \qquad (18.3)$$

L'intégration dans le plan r, φ le long de Γ dans (18.2) s'effectue dans le sens positif, i.e. antihoraire.

Le système (18.2) est complété dans le cas considéré par la condition de constance de l'enthalpie totale

$$\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} + q^2 = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}, \qquad (18.4)$$

condition où l'on suppose que la vitesse est rapportée à la vitesse critique du flux q_*, la densité à la densité critique ρ_* et la pression à $\rho_* q_*^2$.

Si dans la section initiale l'enthalpie totale n'est pas constante, il convient d'utiliser au lieu de (18.4) l'équation de l'énergie qui,

mise sous la forme (18.2), s'écrit

$$\frac{d}{dx}\int\int_S (2i+q^2)\,\rho u\,dr\,d\varphi =$$

$$= \oint_\Gamma \rho\,(2i+q^2)\left\{\left(\frac{w}{r}-u\xi^\varphi\right)dr-(v-u\xi^r)\,d\varphi\right\}-$$

$$-\int\int_S \frac{\rho v}{r}\,(2i+q^2)\,dr\,d\varphi. \qquad (18.5)$$

Il va de soi que cette équation est également valable lorsque l'enthalpie totale est constante. L'application, dans ce cas, de la relation finie (18.4) est liée seulement à un certain souci d'économiser la mémoire du calculateur électronique, car elle permet de mémoriser un nombre plus réduit de paramètres en chaque point de calcul. Les calculs effectués à des fins de comparaison suivant le schéma aux différences qu'on obtient en remplaçant (18.4) par (18.5) exigent pratiquement le même temps machine et fournissent à peu près les mêmes résultats.

Dans le cas de la symétrie axiale il est commode de prendre pour S un anneau $r_-(x) \leqslant r \leqslant r_+(x)$. Sa frontière Γ est formée par deux circonférences de rayons r_+ et r_- sur lesquelles $\xi^\varphi \equiv 0$ et $\xi^r = r'_\pm \equiv dr_\pm/dx$. En intégrant dans ce cas par rapport à φ de 0 à 2π et en tenant compte de ce que toutes les grandeurs sont indépendantes de φ on obtient un système de lois de conservation intégrales pour un écoulement à symétrie axiale

$$\frac{a}{dx}\int_{r_-}^{r_+} a\,dr = (ar'-b)\Big|_{r_-}^{r_+} + \int_{r_-}^{r_+} f\,dr \qquad (18.6)$$

où les vecteurs colonnes a, b, f sont toujours définis par les égalités (18.3).

En utilisant les équations (18.6) on peut notamment obtenir le résultat connu d'après lequel en cas de symétrie axiale il y a conservation de la circulation rw le long de toute ligne de courant $r' = v/u$. Par conséquent, si pour la section initiale $w \equiv 0$, cette dernière égalité est également satisfaite dans tout le flux. La quatrième équation scalaire de (18.6) est alors identiquement satisfaite.

Tout comme dans le cas spatial, le système (18.6) est complété par la condition de constance de l'enthalpie totale (18.4) ou par la loi intégrale de conservation de l'énergie (18.5) qui s'écrit en

l'occurrence

$$\frac{d}{dx}\int_{r_-}^{r_+}(2i+q^2)\,\rho u\,dr =$$

$$=(ur^t-v)(2i+q^2)\,\rho\Big|_{r_-}^{r_+}-\int_{r_-}^{r_+}\frac{\rho v}{r}(2i+q^2)\,dr. \qquad (18.7)$$

Si l'on omet les intégrales dans les seconds membres de (18.6) et (18.7), les équations qui en résultent seront les équations de l'écoulement plan. Le même résultat est pratiquement atteint si le domaine considéré est pris à une distance de l'axe de symétrie telle que ses dimensions sont très petites par rapport à r. Cette circonstance se montre commode lors du calcul de l'écoulement plan à l'aide des programmes « à symétrie axiale ».

Avant de passer à la mise au point du schéma aux différences notons que la forme d'écriture des équations de conservation intégrales n'est pas la seule possible. Qui plus est, les mêmes lois s'écrivent le plus souvent sous la forme

$$\frac{d}{dx}\int\int_S ra\,dr\,d\varphi=\oint_\Gamma r\left[(c-a\xi^\varphi)\,dr-(b-a\xi^r)\,d\varphi\right], \qquad (18.8)$$

où toutes les grandeurs ont la même signification que celles de (18.2). Les systèmes des lois intégrales (18.2) et (18.7) sont équivalents, i.e. ils fournissent les mêmes équations différentielles d'écoulement et les mêmes relations aux fortes discontinuités. Néanmoins, comme le montrent de multiples calculs, dans le premier cas les solutions des équations aux différences se caractérisent par une convergence plus rapide (surtout au voisinage de l'axe des x) que dans le second.

Passons à la construction du schéma aux différences pour le calcul des écoulements à symétrie axiale « x-supersoniques » — nous entendons par là la validité de la condition (18.1) — en nous limitant au cas irrotationnel ($w \equiv 0$) dans le plan des données initiales $x = 0$ et, donc, dans tout l'écoulement. Commençons par la description du partage du domaine étudié

$$x \geqslant 0, \quad \mathscr{R}_-(x) \leqslant r \leqslant \mathscr{R}_+(x) \qquad (18.9)$$

en mailles de calcul. Les fonctions $\mathscr{R}_-(x)$ et $\mathscr{R}_+(x)$ de (18.9) soit sont données comme c'est le cas par exemple pour l'écoulement dans un canal à parois rigides, soit sont trouvées au cours de la résolution comme lorsqu'il s'agit de l'écoulement par jet. Si $\mathscr{R}_-(x) \equiv 0$, la frontière inférieure du domaine calculé est l'axe de symétrie (l'axe des x).

Décomposons un segment quelconque $x = x_0$ appartenant au domaine (18.9) en J portions « élémentaires » de même longueur

$h_r = (\mathscr{R}_+ - \mathscr{R}_-)/J$. Les points de partition et les segments obtenus sont numérotés de bas en haut. On associe aux points de partition les numéros j, où $j = 0, 1, \ldots, J$ et aux segments les numéros $j - 1/2$, où $j = 1, \ldots, J$, $j = 0$ et $j = J$ étant associés aux frontières inférieure et supérieure du domaine (18.9). Avec la section $x = x_0$ considérons une section $x = x_0 + h_x$ où h_x est le pas en x. Effectuons comme dans le cas précédent la partition de cette section (couche) en J segments et leur numérotation. Aux paramètres moyens sur chaque segment « élémentaire » associons pour $x = x_0$ l'indice inférieur correspondant ($\rho_{j-1/2}$, $u_{j-1/2}$, etc.) et pour $x = x_0 + h_x$ le même indice supérieur ($\rho^{j-1/2}$, $u^{j-1/2}$, etc.). Les points de partition des sections de numéros identiques considérées sont joints par des segments rectilignes « longitudinaux ». Sur ces segments associons aux paramètres les indices inférieurs correspondants et désignons toujours par des lettres majuscules les grandeurs obtenues en prenant la moyenne sur x pour chacun de ces segments.

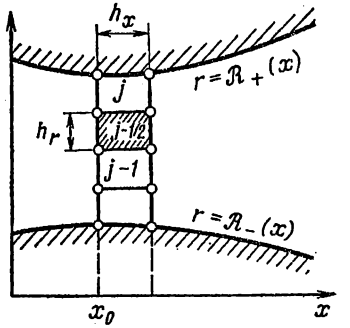


Fig. 18.1

Supposons connus l'écoulement dans la couche précédente (pour $x = x_0$) et, donc, les paramètres aux indices inférieurs demi-entiers, le pas h_x, ainsi que les ordonnées $\mathscr{R}_+(x)$ et $\mathscr{R}_-(x)$ des frontières supérieure et inférieure du flux pour la couche suivante, ce qui permet d'effectuer sa partition. Ecrivons le système (18.6) pour chaque segment élémentaire en prenant comme r_- et r_+ les ordonnées de deux points de partition voisins. Le schéma aux différences permettant de trouver les paramètres aux indices supérieurs demi-entiers s'obtient par l'intégration (par rapport à x, entre x_0 et $x_0 + h_x$) du système (18.6) écrit sous la forme indiquée, suivie par l'application du théorème de la moyenne au calcul des intégrales suivant les arêtes et l'aire du quadrilatère formé dans le plan x, r par les segments correspondants, verticaux et longitudinaux (fig. 18.1).

En définitive, compte tenu des notations admises on a

$$(ah_r)^{j-1/2} = (ah_r)_{j-1/2} + (Ah_r - Bh_x)_j - (Ah_r - Bh_x)_{j-1} + \\ + \frac{h_x}{2}[(f\bar{h}_r)_{j-1/2} + (fh_r)^{j-1/2}]. \qquad (18.10)$$

Ici $(h_r)_j = r^j - r_j$, la règle d'associer les indices inférieurs et supérieurs s'étendant aux longueurs des segments h_r et aux ordonnées des points de partition. Pour un flux irrotationnel, $w \equiv 0$, les

équations (18.10) conformément aux égalités (18.3) se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
\alpha^{j-1/2} &= \alpha_{j-1/2} + D_j - D_{j-1} - \delta_{j-1/2} - \delta^{j-1/2}, \\
\beta^{j-1/2} &= \beta_{j-1/2} + (Ph_r)_j - (Ph_r)_{j-1} + (VD)_j - \\
&\quad - (VD)_{j-1} - (u\delta)_{j-1/2} - (u\delta)^{j-1/2}, \\
\gamma^{j-1/2} &= \gamma_{j-1/2} + (P_{j-1} - P_j)\, h_x + (VD)_j - \\
&\quad - (VD)_{j-1} - (v\delta)_{j-1/2} - (v\delta)^{j-1/2},
\end{aligned} \tag{18.11}$$

où sont introduites les notations:

$$\begin{aligned}
&\alpha = \rho u h_r, \quad \beta = (p + \rho u^2)\, h_r, \quad \gamma = \rho u v h_r, \\
&\delta = \rho v h_x h_r/(2r), \quad D = R\,(Uh_r - Vh_x).
\end{aligned} \tag{18.12}$$

Si les quantités $(\alpha, \beta, \gamma)^{j-(1/2)}$ sont calculées, elles permettent, à l'aide de la condition de constance de l'enthalpie totale (18.4), de trouver de nouvelles valeurs des grandeurs gazodynamiques $(u, v, p, \rho)^{j-1/2}$ dans la couche $x = x_0 + h_x$. En effet, en explicitant dans les formules (18.12) les quantités

$$v = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \rho = \frac{\alpha}{uh_r}, \quad p = \frac{\beta - \alpha u}{h_r} \tag{18.13}$$

et en les portant dans la condition (18.4) on obtient une équation du second degré pour u. La valeur cherchée de u se calcule par la formule

$$u = \frac{\varkappa\beta + \sqrt{\varkappa^2\beta^2 - (\varkappa+1)\,\alpha^2 + (\varkappa^2-1)^2\,\gamma^2}}{(\varkappa+1)\,\alpha}. \tag{18.14}$$

Signalons qu'entre les deux solutions possibles pour u qui dépendent du signe du radical de la formule (18.14) on a pris celle qui satisfait à $u > c$. La seconde solution répond au passage au flux subsonique dans le choc de compression droit.

Nous avons omis les indices supérieurs $j - 1/2$ dans les formules (18.13), (18.14).

On déterminera les « grandes » quantités auxiliaires $(U, V, P, R)_j$ à la frontière de chaque quadrilatère élémentaire (voir fig. 18.1), nécessaires pour le calcul à l'aide des formules (18.12), en résolvant le problème automodèle de deux flux supersoniques uniformes semi-infinis confluents doués de paramètres $(u, v, p, \rho)_{j-1/2}$ et $(u, v, p, \rho)_{j+1/2}$. L'algorithme correspondant sera décrit au paragraphe suivant. La présence dans les seconds membres de (18.11) des derniers termes (aux indices supérieurs $j - 1/2$) nécessite des itérations au cours du calcul. D'ordinaire deux itérations suffisent; dans la première d'entre elles les termes indiqués sont calculés d'après les paramètres de la couche $x = x_0$, i.e. avec les indices inférieurs $j - 1/2$. Notons à ce propos qu'en remplaçant les derniers termes

de (18.11) par les avant-derniers on arrive, sans abaisser l'ordre d'approximation du schéma aux différences ainsi simplifié (18.11), à des résultats qui diffèrent un peu plus (bien qu'imperceptiblement) de ceux des calculs analogues effectués par la méthode des caractéristiques.

Avant de passer aux formules du calcul des « grandes » quantités qui seront données au paragraphe suivant, signalons que sur les frontières des mailles élémentaires extrêmes dont les arêtes latérales ont les numéros $j = 0$ et $j = J$, les grandeurs indiquées sont déterminées lors de la résolution des problèmes correspondant aux conditions aux limites posées pour $r = \mathscr{R}_-(x)$ et $r = \mathscr{R}_+(x)$. Admettons par exemple qu'on calcule un écoulement dans un canal à parois rigides. Alors, pour $r = \mathscr{R}_\pm(x)$ on connaît les angles que forment les parois avec l'axe des x, $\theta_\pm(x)$, ou $\zeta_\pm(x) \equiv \operatorname{tg}\theta_\pm(x) = [\mathscr{R}_\pm(x)]'$. Dans ce cas on détermine (U, V, P, R) en résolvant le problème automodèle d'écoulement d'un flux supersonique uniforme sur une paroi plane incliné à l'axe des x à un angle $\theta_-(x_0 + h_x/2)$ ou $\theta_+(x_0 + h_x/2)$. D'une manière analogue, si l'on a à calculer un jet débouchant dans l'espace à pression donnée p_e, alors $P = p_e$ si bien qu'on détermine les « grandes » quantités en résolvant le problème automodèle d'un flux supersonique uniforme plan débouchant dans une région à pression élevée ou réduite.

Le schéma aux différences construit plus haut admettant le calcul de « shock-capturing » des surfaces de discontinuité permet, si besoin est, de les particulariser et, ce qui est important, sans inclure dans le programme du calculateur électronique aucun algorithme supplémentaire quel qu'il soit. Ceci s'explique par le fait qu'un pareil algorithme est déjà contenu dans le problème de deux flux supersoniques homogènes confluents dont la solution entre dans le schéma aux différences étudié pour la détermination de « grandes » quantités. Il semble rationnel de tenir compte de la circonstance indiquée dans les problèmes d'écoulement externe en prenant pour l'une des frontières du domaine de calcul une onde de choc de tête (ou au cas limite, une caractéristique) séparant l'écoulement perturbé du flux uniforme incident.

On voit aisément que le schéma aux différences établi est un analogue naturel du schéma de calcul des écoulements instationnaires unidimensionnels traité au § 14. Cette ressemblance si frappante entre les deux schémas permet l'utilisation, pratiquement automatique, des résultats de l'étude d'approximation et de stabilité d'un schéma instationnaire unidimensionnel exposés au § 16. Cette étude peut se faire pour le schéma en question sur un modèle linéarisé. Celui-ci représente un cas particulier d'un modèle plus général dont l'étude est reportée au § 25. Les résultats de son analyse nous autorisent à espérer que le schéma construit ait une approximation du premier ordre sur les solutions lisses. Le critère de stabilité du modèle

linéarisé plan est fourni par la restriction (25.15)-(25.14) imposée au pas en coordonnée x. Quant au problème non linéaire traité dans le présent paragraphe le critère utilisé sera

$$h_x \leqslant h_x^* = \min_j (H^{\mathrm{I}}_{j-1/2}, \quad H^{\mathrm{II}}_{j-1/2}), \tag{18.15}$$

où $H^{\mathrm{I}}_{j-1/2}$ est la distance suivant la coordonnée x au bout de laquelle une onde engendrée par les flux confluant au nœud $r = r_j$ atteint le nœud de maillage voisin r^{j-1}, $H^{\mathrm{II}}_{j-1/2}$ la distance analogue que couvre l'onde engendrée en $r = r_{j-1}$ pour atteindre le nœud r^j. On détermine les coefficients angulaires des ondes correspondantes nécessaires pour leur calcul en résolvant les problèmes annexes de flux confluents dont nous allons aborder l'étude.

§ 19. Problème de deux flux supersoniques uniformes confluents

Divers schémas de confluence. Formules approchées pour les flux confluents à paramètres peu différents. Formules valables pour le calcul de confluence dans le cas des ondes de détente intenses.

D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent on détermine les paramètres aux frontières supérieure et inférieure de chaque maille élémentaire (« grandes » quantités) en résolvant le problème automodèle plan de deux flux uniformes semi-infinis confluant suivant une ligne droite. Les paramètres des flux mentionnés sont pris égaux aux grandeurs caractéristiques de l'écoulement sur deux segments voisins de la couche précédente. La solution en variables indépendantes x, r (si elle existe) ne dépend que du rapport $\eta = (r - r_i)/(x - x_0)$, où $i = j$ et $i = j - 1$ pour les frontières supérieure et inférieure respectivement (les flux commencent à confluer au point $x = x_0$, $r = r_i$). Les diverses situations réalisables en fonction des paramètres des flux confluents sont représentées sur la figure 19.1 où le trait double figure les ondes de choc, les pointillés les frontières des éventails des ondes de détente et le trait interrompu les lignes de glissement. Dans les domaines *1* — *4* sur la figure 19.1, *a* à 19.1, *d* et dans les domaines *1* — *3* sur la figure 19.1, *e*, les paramètres des flux sont constants. Dans le cas représenté sur la figure 19.1, *e* entre les frontières fermant les éventails des ondes de détente, ces frontières représentant simultanément les lignes de glissement, se situe le domaine du vide (domaine *3*). Le trait continu unique représente sur la figure 19.1 l'une des positions possibles de la frontière considérée d'une maille élémentaire, les flèches les directions et les vitesses des flux confluents. Notons que la frontière d'une maille peut, généralement parlant, tomber dans tout domaine situé à droite par rapport à la verticale $x = x_0$ et, en particulier, à l'inté-

rieur de l'éventail des ondes de détente ou au sein d'un des flux non perturbés.

Passons à l'étude des divers cas. Comme on le sait, les variations de pression p et $\zeta \equiv \operatorname{tg}\theta = v/u$ dans l'éventail des ondes de détente sont liées par la relation différentielle

$$d\zeta \mp \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2}\sqrt{M^2-1}\,dp = 0. \qquad (19.1)$$

où $M = q/c$ est le nombre de Mach, et le signe supérieur (inférieur) est associé à l'éventail des ondes de détente formé par les caracté-

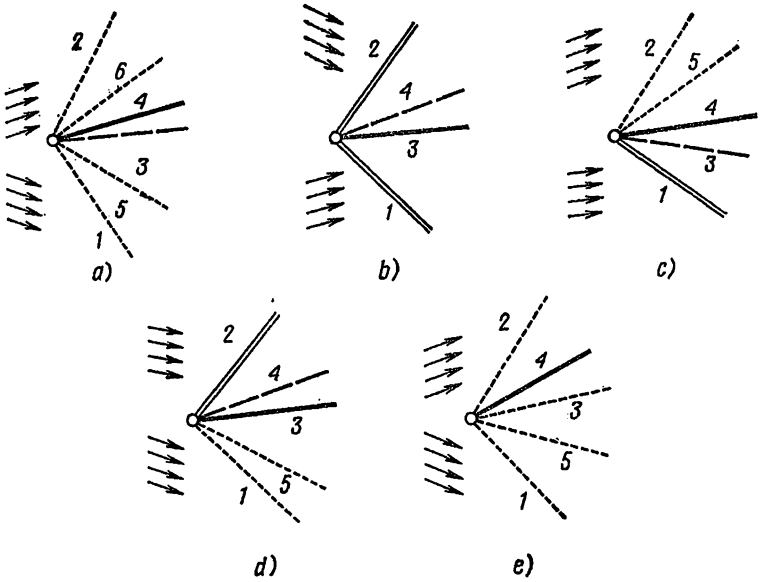


Fig. 19.1

ristiques de la première (seconde) famille et limitant le domaine de confluence par dessus (dessous). Par la suite nous appellerons les éventails indiqués « supérieur » et « inférieur » quelle que soit leur position relativement à la frontière de la maille.

En prenant dans (19.1) comme coefficient de dp la moyenne arithmétique dans les flux confluents et en intégrant ensuite suivant chaque éventail on a

$$\zeta - \zeta_i \mp m\,(p - p_i) = 0, \qquad (19.2)$$

où à l'éventail supérieur correspond le signe moins et $i = j + 1/2$, à l'éventail inférieur le signe plus et $i = j - 1/2$, les quantités ζ et p sont des valeurs en aval de l'éventail des ondes de détente et, enfin,

$$m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\zeta^2}{\rho q^2}\sqrt{M^2-1}\right)_{j-1/2} + \left(\frac{1+\zeta^2}{\rho q^2}\sqrt{M^2-1}\right)_{j+1/2}\right]. \qquad (19.3)$$

Compte tenu de la continuité de la pression et de l'orientation des flux sur la ligne de glissement, en appliquant (19.2) au cas représenté sur la figure 19.1, *a* on trouve que dans les domaines 3 et 4 les quantités p et ζ sont définies par les formules

$$p = \frac{p_{j-1/2} + p_{j+1/2}}{2} + \frac{\zeta_{j-1/2} - \zeta_{j+1/2}}{2m}, \qquad (19.4)$$
$$\zeta = \zeta_{j-1/2} - m(p - p_{j-1/2}) = \zeta_{j+1/2} + m(p - p_{j+1/2}).$$

Après le calcul de p et de ζ la densité, le module et les composantes du vecteur vitesse, la vitesse du son et le nombre de Mach sont donnés par les formules

$$\rho = \rho_i \left(\frac{p}{p_i}\right)^{1/\varkappa}, \quad q = \left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} - \frac{2\varkappa p}{(\varkappa-1)\rho}\right]^{1/2}, \qquad (19.5)$$
$$u = \frac{q}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \quad v = \zeta u, \quad c = \sqrt{\frac{\varkappa p}{\rho}}, \quad \mathrm{M} = \frac{q}{c},$$

où $i = j - 1/2$ et $j + 1/2$ pour le calcul des paramètres dans les domaines *3* et *4* respectivement. Lors de l'obtention de (19.5) on a utilisé les conditions de constance de l'entropie dans chaque éventail et de constance de l'enthalpie totale dans tout le flux. Pour le calcul des écoulements non isoénergétiques il convient de modifier la formule pour le calcul de q en remplaçant le premier terme du crochet par la valeur double de l'enthalpie totale de i-ième flux.

Si les écarts relatifs de p et ζ calculés d'après (19.3) et (19.4) par rapport aux valeurs analogues aux indices inférieurs $j - 1/2$ et $j + 1/2$ sont considérables, il convient de reprendre le calcul des valeurs fournies par les formules itératives

$$p = \frac{n_{j-1/2}\zeta_{j-1/2} - n_{j+1/2}\zeta_{j+1/2} + m_{j-1/2}p_{j-1/2} + m_{j+1/2}p_{j+1/2}}{m_{j-1/2} + m_{j+1/2}},$$
$$\zeta = n_{j-1/2}\zeta_{j-1/2} - m_{j-1/2}(p - p_{j-1/2}) = \qquad (19.6)$$
$$= n_{j+1/2}\zeta_{j+1/2} + m_{j+1/2}(p - p_{j+1/2})$$

dans lesquelles

$$m_i = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\zeta^2}{\rho q^2}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}\right)_i + \frac{1+\zeta^2}{\rho q^2}\sqrt{\mathrm{M}^2-1}\right], \quad n_i = 1. \qquad (19.7)$$

Le second terme dans (19.7) se calcule d'après les paramètres trouvés dans l'approximation précédente. Les coefficients n_i qui sont égaux dans ce cas à l'unité sont introduits dans (19.6) pour simplifier les développements ultérieurs.

On sait que pour les chocs de compression faibles les relations entre les accroissements p et ζ des deux côtés du choc sont voisines des relations analogues pour une onde simple. C'est pourquoi dans le cas des ondes de choc faibles p et ζ sont également déterminés par (19.4). En même temps il convient de tirer la densité pour $p > p_i$

non pas de la première équation (19.5) mais de l'adiabatique d'Hugoniot

$$\rho = \frac{(\varkappa-1)\,p_i+(\varkappa+1)\,p}{(\varkappa+1)\,p_i+(\varkappa-1)\,p}\,\rho_i \quad \text{pour} \quad p > p_i. \tag{19.8}$$

Ici $i = j - 1/2$ lors du calcul de ρ dans le domaine *3* de la figure 19.1, *b* et 19.1, *c* et $i = j + 1/2$ lors du calcul de ρ dans le domaine *4* de la figure 19.1, *b* et 19.1, *d*. Les autres paramètres des domaines indiqués, tout comme en cas d'écoulement de détente, sont déterminés à l'aide de (19.5). Les formules (19.4), (19.5) et (19.8) s'appliquent également comme première approximation dans le cas des ondes de choc d'intensité arbitraire. Le calcul de p et ζ dans les approximations suivantes doit alors se faire d'après les formules qui découlent des relations sur le choc oblique. Soit, par exemple, la situation représentée sur la figure 19.1, *b*. Alors, si δ_i est un accroissement de l'angle d'inclinaison de la vitesse dans le choc oblique ($\delta_i > 0$), la condition de coïncidence des directions des flux dans les domaines *3* et *4* s'écrit sous la forme

$$\operatorname{tg}(\theta_{j-1/2} - \delta_{j-1/2}) = \operatorname{tg}(\theta_{j+1/2} + \delta_{j+1/2})$$

ou

$$\frac{\zeta_{j-1/2} - \operatorname{tg}\delta_{j-1/2}}{1+\zeta_{j-1/2}\operatorname{tg}\delta_{j-1/2}} = \frac{\zeta_{j+1/2}+\operatorname{tg}\delta_{j+1/2}}{1-\zeta_{j+1/2}\operatorname{tg}\delta_{j+1/2}}. \tag{19.9}$$

Par ailleurs, la relation sur le choc oblique fournit

$$\operatorname{tg}\delta_i = g_i\,(p - p_i), \tag{19.10}$$

où $i = j \mp 1/2$ et

$$g_i = (\rho_i q_i^2 + p_i - p)^{-1}\left[\frac{2\varkappa M_i^2 p_i}{(\varkappa-1)\,p_i+(\varkappa+1)\,p} - 1\right]^{1/2}. \tag{19.11}$$

En portant l'expression pour $\operatorname{tg}\delta_i$ de (19.10) dans les numérateurs de l'égalité (19.9) et en explicitant l'équation obtenue par rapport à p on retrouve la première formule (19.6), dont les coefficients m_i et n_i sont maintenant égaux à

$$m_i = g_i n_i, \quad n_i = \frac{1}{1 \pm \zeta_i \operatorname{tg}\delta_i}. \tag{19.12}$$

Ici g_i et $\operatorname{tg}\delta_i$ sont définis d'après (19.10) et (19.11); le signe supérieur répond à $i = j - 1/2$, le signe inférieur à $i = j + 1/2$; en calculant les coefficients on utilise la valeur de p trouvée dans l'approximation précédente. Pour m_i et n_i introduits selon (19.12) la seconde formule (19.6) définissant ζ reste également valable. Ce résultat découle de (19.9) et (19.10) si l'on prend en compte que le premier et le second membre de (19.9) sont tous les deux égaux à ζ.

On traite de façon analogue les autres cas représentés sur la figure 19.1. S'il se produit une situation représentée sur la figure 19.1, *c* et 19.1, *d* qui conduit à la formation de l'onde de choc et de l'éventail des ondes de détente, les formules (19.6) s'appliquent

toujours à condition que m_i et n_i s'y calculent soit d'après (19.7) soit d'après (19.12). Ainsi, dans le cas de la figure 19.1, *c* lorsque $p_{j-1/2} < p < p_{j+1/2}$, pour $i = j - 1/2$, on utilise les formules (19.12) et pour $i = j + 1/2$ les formules (19.7). Dans le cas représenté sur la figure 19.1, *d*, lorsque $p_{j+1/2} < p < p_{j-1/2}$, la situation est inversée. Ce qui a été dit est également valable lors de la détermination de ρ dans les domaines *3* et *4* quand pour l'onde de détente on utilise la première formule de (19.5) et pour le choc la formule (19.8). Enfin, signalons que l'apparition d'une région de vide (fig. 19.1, *e*) et l'absence des régimes automodèles de la confluence des flux supersoniques envisagés témoignent de la trop grande différence entre les paramètres moyens sur les segments voisins de la couche $x = x_0$, i.e. de la nécessité d'augmenter le nombre d'intervalles de calcul J. Pour cette raison nous omettons ici l'étude de ces configurations.

Les « grandes » quantités incluses dans les équations aux différences finies (18.3) sont prises égales aux paramètres sur un rayon correspondant (frontière de la maille) du domaine de confluence. Si le rayon indiqué atteint le domaine de l'éventail des ondes de détente, alors pour déterminer les « grandes » quantités il suffit d'utiliser l'interpolation linéaire suivant le coefficient angulaire du rayon donné. En outre aux coefficients angulaires des frontières de l'éventail (des caractéristiques de la première et de la seconde famille) correspondent les valeurs des paramètres connus (des domaines *1* et *2* sur la figure 19.1) ou déterminés d'après les formules écrites plus haut.

Les frontières des mailles extrêmes qui se confondent avec les frontières du domaine de calcul exigent une étude plus détaillée. Admettons, par exemple, que la frontière indiquée est une paroi rigide (ou un axe de symétrie) dont l'équation et, partant, la pente, i.e. $\zeta = \zeta(x)$, sont connues. Dans ce cas on trouve les paramètres à la frontière en résolvant le problème de l'écoulement sur une paroi rectiligne, convexe ou concave d'un flux supersonique uniforme dont les paramètres sont égaux aux petites quantités aux indices inférieurs $i = 1/2$ et $i = J - 1/2$ pour les frontières inférieure et supérieure respectivement. En définitive, on obtient pour la détermination de la pression sur la paroi la formule

$$p = p_i \pm \frac{n_i \zeta_i - \zeta}{m_i}. \qquad (19.13)$$

Ici

$$\zeta \equiv \zeta(x_0 + 0{,}5h_x) \approx [r^{\pm}(x_0 + h_x) - r^{\pm}(x_0)]h_x^{-1} \qquad (19.14)$$

et les coefficients m_i et n_i se calculent par (19.7) si $p < p_i$ et par (19.12) si $p > p_i$. Les signes supérieurs dans (19.12) à (19.14) et l'indice $i = J - 1/2$ correspondent à la frontière supérieure, les signes inférieurs et l'indice $i = 1/2$ à la frontière inférieure. En pre-

mière approximation on peut calculer les coefficients à l'aide de (19.7) en remplaçant le second terme par le premier dans l'expression pour m_i.

De la même manière, dans le cas d'un jet à la frontière duquel est donnée la pression p on trouve que

$$\zeta = n_i\zeta_i \mp m_i (p - p_i). \tag{19.15}$$

Le choix et la détermination des coefficients, des signes et des indices dans (19.15) sont analogues à (19.13).

Si la frontière du domaine est une onde de choc (ou une caractéristique) en amont de laquelle les paramètres du flux sont connus, on y détermine les « grandes » quantités exactement de la manière décrite plus haut pour les frontières des mailles intérieures.

Les formules finies (19.2) décrivant les ondes centrées qui ont été appliquées à la déduction de plusieurs relations du présent paragraphe ont été obtenues par l'intégration approchée (19.1) en remplaçant le coefficient de dp par une certaine quantité moyenne. Dans plusieurs cas (surtout dans ceux des vitesses supersoniques) une forte variation de densité et du nombre de Mach rend cette substitution fort grossière. Toutefois, si l'on récrit (19.1) en utilisant au lieu de p une nouvelle variable

$$\bar{p} = p^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}, \tag{19.16}$$

le coefficient de $d\bar{p}$ s'avère une fonction faiblement variable de sorte que l'intégration devient plus précise. Signalons que l'utilisation de $\bar{p}$ dans l'intégration numérique des équations de la dynamique des gaz (et aussi dans la construction de la théorie linéaire) est encore plus indiquée à cet effet que le remplacement de p par $\ln p$ dont l'application se montre fructueuse dans le même but.

Les formules que l'on obtient pour le calcul de $\bar{p}$ et ζ coïncident avec (19.2), (19.4), (19.6), (19.8), (19.10), (19.13) et (19.15) si l'on remplace dans ces dernières p par $\bar{p}$ et les coefficients m, m_i et g_i par $\bar{m}$, $\bar{m}_i$ et $\bar{g}_i$ égaux à

$$\bar{m} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{(\varkappa-1)}\left\{\left(\frac{1+\zeta^2}{q\mathrm{M}}\left[\frac{p^{1/\varkappa}}{\rho}(\mathrm{M}^2-1)\right]^{1/2}\right)_{j-1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1+\zeta^2}{q\mathrm{M}}\left[\frac{p^{1/\varkappa}}{\rho}(\mathrm{M}^2-1)\right]^{1/2}\right)_{j+1/2}\right\}, \quad \bar{m}_i = \bar{g}_i n_i \text{ pour } p > p_i,$$

$$\bar{g}_i = \frac{p-p_i}{(\bar{p}-\bar{p}_i)(\rho_i q_i^2 + p_i - p)}\left[\frac{2\varkappa \mathrm{M}_i^2 p_i}{(\varkappa-1)p_i + (\varkappa+1)p} - 1\right]^{1/2},$$

où n_i est tiré de (19.12). Lorsque $p < p_i$, le coefficient $\bar{m}_i$ est donné par la formule pour $\bar{m}$ dans laquelle il faut omettre l'indice $j + 1/2$ et remplacer $j - 1/2$ par i. Une fois $\bar{p}$ déterminé, la pression p,

conformément à (19.16), se calcule par la formule

$$p = \overline{p^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}}$$

et les autres inconnues par les relations (19.5) et (19.8) comme auparavant.

De multiples calculs ont confirmé les raisonnements énoncés plus haut au sujet de l'efficacité de la substitution (19.16). C'est ainsi que tous les résultats ultérieurs, aussi bien pour les écoulements bidimensionnels que pour les écoulements spatiaux, ont été obtenus en appliquant cette substitution au calcul des « grandes » quantités.

En plus des « grandes » quantités nous devons tirer de la solution du problème de la confluence les coefficients angulaires des ondes de choc ou des caractéristiques extrêmes des ondes de détente, coefficients appliqués à la détermination du pas admissible en coordonnée x dans la formule (18.15) pour assurer la stabilité du calcul.

§ 20. Exemples illustrant la précision du schéma stationnaire

Calcul du choc de compression oblique et de l'onde de détente centrée. Ecoulement dans une tuyère de Laval à symétrie axiale et jet sous-détendu supersonique débouchant dans une atmosphère.

Certains résultats numériques obtenus à l'aide du schéma aux différences décrit aux §§ 18 et 19 sont donnés plus bas. Ces résultats, de caractère méthodologique, sont donnés au lecteur afin qu'il puisse juger de la précision de la méthode, du degré d'étalement des chocs de compression, de la possibilité du calcul « chock-capturing » des ondes de détente centrées, etc. Dans tous les exemples traités le flux dans la section initiale ($x = 0$) était uniforme et parallèle à l'axe des x, l'indice de l'adiabatique du gaz $\varkappa = 1{,}4$.

Les premiers exemples se rapportent au calcul de l'écoulement dans un canal plan dont la hauteur, à $x = 0$, est prise pour l'unité de longueur. Les deux parois du canal sont rectilignes, la paroi supérieure ($y \equiv 1$) étant parallèle à l'axe du canal, la paroi inférieure faisant avec lui un angle θ. Lorsque $\theta > 0$, la paroi inférieure est contournée avec formation d'un choc de compression oblique, lorsque $\theta < 0$, avec formation d'une onde de détente centrée. Les résultats du calcul de l'écoulement avec chocs de compression correspondant aux angles $\theta = 5°$ et $30°$ et au flux incident à Mach $M_0 = 4$ sont représentés sur la figure 20.1, *a*, *b*. Sur cette figure sont données pour divers x, en fonction du numéro du point j, les distributions de pression rapportée à $\rho_* q_*$, où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques du flux incident. Les courbes en traits pleins passent par

les points (cercles) fournis par le calcul, celles en traits interrompus figurent la solution exacte. On voit que même un choc d'intensité relativement faible ($\theta = 5°$) s'étale sur cinq mailles de calcul au plus. Pour un choc de plus grande intensité ($\theta = 30°$) l'« étalement » est moindre. Sur les mêmes figures on observe un décalage de l'ordre de h_r de la « ligne moyenne » du choc étalé par rapport à sa position exacte qui est dû aux erreurs du calcul de l'écoulement au voisinage du point de cassure de la paroi et est propre à toutes les méthodes

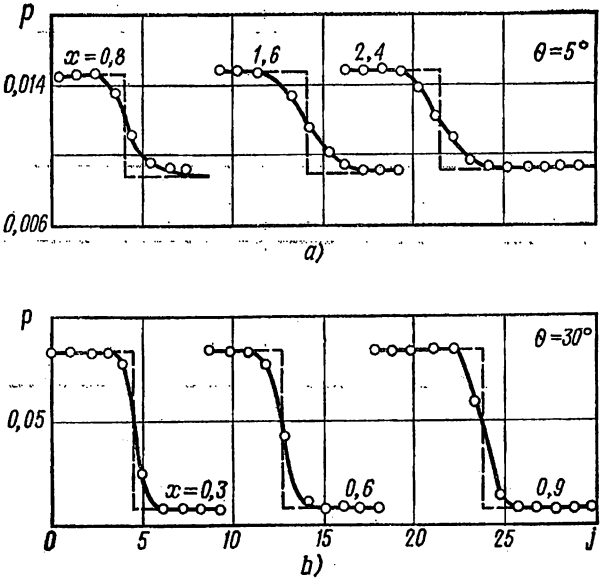


Fig. 20.1

de calcul « shock-capturing » (indépendemment de l'ordre d'approximation du schéma aux différences).

Une image assez complète de la précision du calcul des paramètres du gaz en aval du choc oblique est donnée par les *Tableaux 1* et *2* dans lesquels f_k représente un paramètre quelconque de la première colonne au point correspondant du réseau aux différences, $k = j$ répondant au point situé environ au « milieu » du choc étalé. L'indice 0 marque les paramètres du flux incident, c les quantités fournies par la résolution exacte du problème de l'écoulement autour du coin, $\Delta\bar{f} \equiv |f_c - f_{j-2}|/f_c$ l'erreur relative de calcul. Le *tableau 1* correspond à $M_0 = 3{,}0$ et $p_c/p_0 = 6{,}35$, le *Tableau 2* à $M_0 = 9{,}19$ et $p_c/p_0 = 38{,}4$ (dans les deux cas $\theta = 30°$). On voit que dans les exemples présentés qui sont typiques, l'erreur relative de toutes les grandeurs n'excède pas 0,002.

Tableau 1

$M_0 = 3,0$

f	f_0	f_{j+2}	f_{j+1}	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_c	$\Delta f \cdot 10^4$
p	0,0368	0,0372	0,0453	0,1140	0,2244	0,2340	0,2388	7,0
ρ	0,1203	0,1212	0,1365	0,2329	0,3697	0,3809	0,3808	4,0
u	1,9640	1,9620	1,9149	1,5407	1,1562	1,1290	1,1299	4,0
v	0,0000	0,0047	0,0894	0,4464	0,6445	0,6519	0,6519	0,7

Tableau 2

$M_0 = 9,19$

f	f_0	f_{j+2}	f_{j+1}	f_j	f_{j-1}	f_{j-2}	f_c	$\Delta f \cdot 10^3$
$p \cdot 10^4$	0,5596	0,5596	0,7049	8,9890	20,9800	21,4500	21,4700	0,8
$\rho \cdot 10^2$	0,1167	0,1167	0,1283	0,3395	0,5992	0,6084	0,6082	0,2
u	2,3800	2,3800	2,3693	1,9270	1,6384	1,6270	1,6271	0,1
v	0,0000	0,000014	0,0418	0,6580	0,9301	0,9405	0,9388	2,0

Les résultats du calcul d'une onde centrée pour $M_0 = 2,0$ et $M_0 = 4,0$ pour l'angle de rotation du flux $\theta = -30°$ sont représentés sur les figures 20.2, *a*, *b* et 20.3, *a*, *b* sous forme de diagramme de distribution de p et ρ en fonction de la variable automodèle r/x pour deux valeurs de x rapportées à la hauteur du canal. Ici r est mesuré à partir du point de cassure suivant la normale à l'axe des x. Les courbes en trait interrompu représentent sur les figures les distributions exactes, indépendantes de x. La coïncidence des résultats numériques avec la solution exacte s'améliore lorsque x s'accroît, ce qui correspond dans ce cas à l'augmentation du nombre de mailles dans la région de l'onde centrée (le nombre total de mailles suivant r était pris égal à 100). Signalons que l'augmentation de l'erreur sur la détermination de ρ au voisinage de la paroi est liée aux erreurs du calcul « shock-capturing » de l'écoulement au voisinage immédiat de la cassure lorsque toute l'onde centrée atteint plusieurs mailles de calcul (d'abord, une seule). Si l'on ne fait pas une étude détaillée de l'écoulement au voisinage de la singularité (point de cassure), les erreurs mentionnées sont propres à tout schéma aux différences admettant un calcul « shock-capturing ». Il importe de souligner que lorsque x augmente, l'erreur de calcul sur p diminue rapidement et dans la détermination de ρ elle ne subsiste que dans quelques-unes des mailles au voisinage de la paroi. Ce dernier fait montre qu'en dehors du voisinage restreint de la cassure le schéma

aux différences utilisé assure avec une précision suffisante la conservation de l'entropie le long des lignes de courant.

Pour se rendre compte de la précision des résultats on a procédé à la comparaison avec les résultats obtenus par le schéma « inverse » de la méthode des caractéristiques lorsque le calcul est également

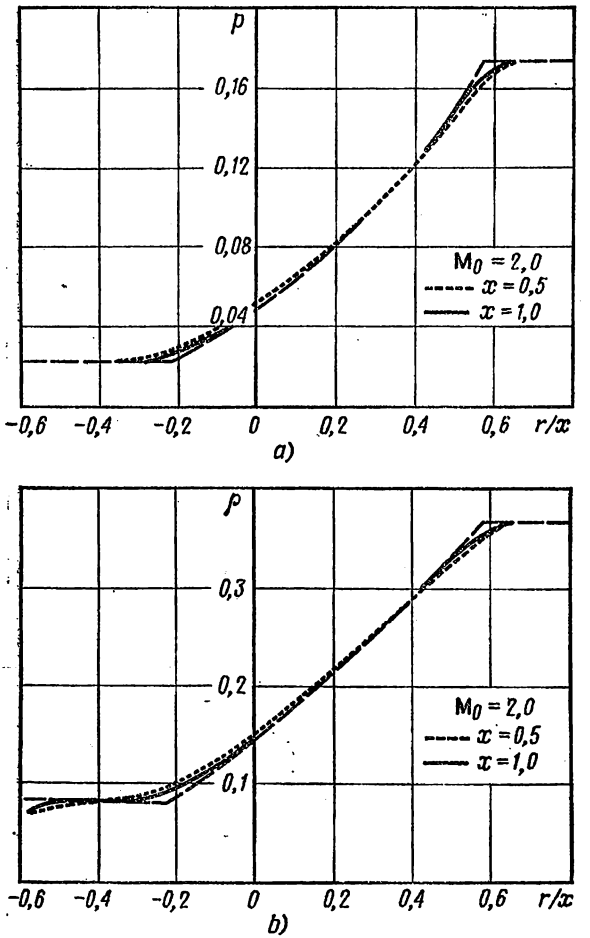


Fig. 20.2

effectué suivant les couches $x = \text{const}$. La figure 20.4 représente la distribution de p dans une section caractéristique de la tuyère de Laval à symétrie axiale comportant une partie supersonique conique (la description détaillée de la forme de la tuyère et de plusieurs autres pièces pour le présent exemple et les exemples suivants est donnée

dans [63]). La courbe en trait plein figure la distribution obtenue à l'aide du schéma aux différences considéré, celle en trait interrom-

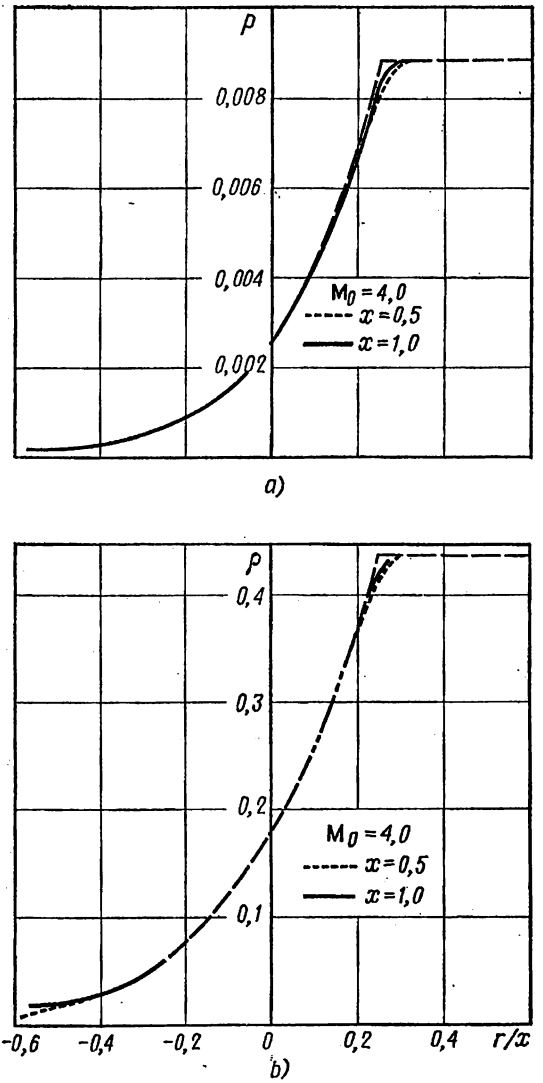


Fig. 20.3

pu, à l'aide de la méthode des caractéristiques. On voit que les plus grandes différences s'observent au sein du champ d'écoulement, dans le domaine de la non-monotonie des courbes. Dans le reste du

flux les différences sont sensiblement moindres. Par exemple, l'erreur relative de calcul de l'intégrale des forces de pression s'exerçant sur la paroi du divergent de la tuyère caractérisé par un taux de détente (suivant l'aire de la section) de l'ordre de 25 n'excède pas en définitive 0,01.

Le dernier résultat du présent paragraphe concerne le jet à symétrie axiale sous-détendu débouchant dans une atmosphère pour $n \equiv p_0/p_e = 20$ et $M_0 = 3{,}0$ où p_e est la pression au sein de l'atmosphère, l'indice zéro étant attribué aux paramètres à la section de sortie de la tuyère. La figure 20.5 représente pour ce cas les frontières du jet et le choc attaché (double courbe) ainsi que les épures de pression dans quelques-unes des sections. Sur la même figure les cercles représentent les points de la frontière et du choc tirés de [23] où le calcul est effectué par la méthode des caractéristiques.

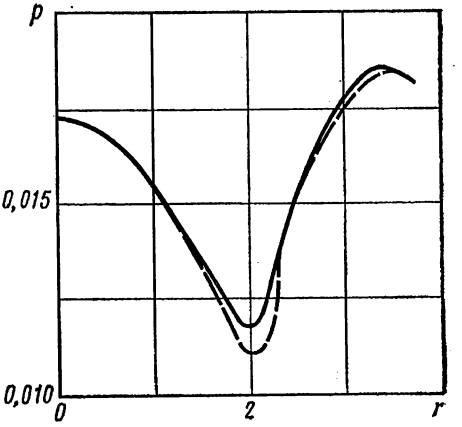


Fig. 20.4

Outre la comparaison des résultats obtenus par les différentes méthodes on fait ordinairement appel, pour estimer la précision du calcul, aux méthodes dites du contrôle « interne » (calcul avec différents nombres de points, vérification des différentes intégrales, etc.). Donnons quelques exemples de ce genre de données. La figure 20.6

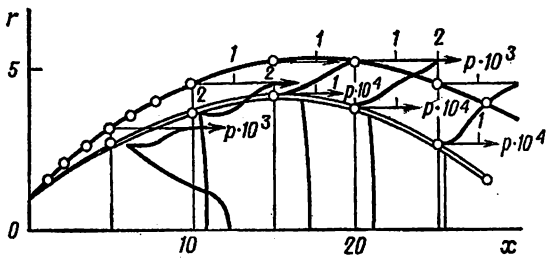


Fig. 20.5

représente les diagrammes de distribution de p dans les sections droites d'un jet à symétrie axiale sous-détendu ($M_0 = 3{,}0$, $n = 2{,}0$, r^0 est le rapport de l'ordonnée à l'ordonnée de la frontière du jet, la pression est rapportée à la pression dynamique critique, la coordonnée x au rayon de la tuyère) obtenus pour différents nombres de

mailles de calcul. La proximité des courbes en trait plein ($J = 30$) et des courbes en trait interrompu ($J = 60$) témoigne de l'assez bonne précision de la méthode. La vérification de l'équation isentropique ($p/\rho^{\varkappa} = \text{const}$) a montré que lors de l'écoulement sur des contours assez doux (sans points de cassure ni portions dont le rayon de courbure n'est pas sensiblement supérieur à la dimension de la maille) les erreurs relatives associées, dans le cas des problèmes sans ondes de choc, n'excèdent pas 2 à 3 %, ceci étant dû essentiellement aux erreurs de calcul de la densité et non pas aux celles de pression. Signalons enfin que les équations de départ sont prises sous la forme (18.2) qui n'est pas complètement celle de «divergence ». Cela permet d'estimer la précision du calcul en calculant les résidus dans les conditions de conservation des flux totaux de masse et d'impulsion. Dans les exemples ci-dessus et ceux qui suivront (y compris les calculs des écoulements supersoniques spatiaux) le nombre de mailles de calcul utilisé assure la vérification des lois indiquées à 1-2 % près.

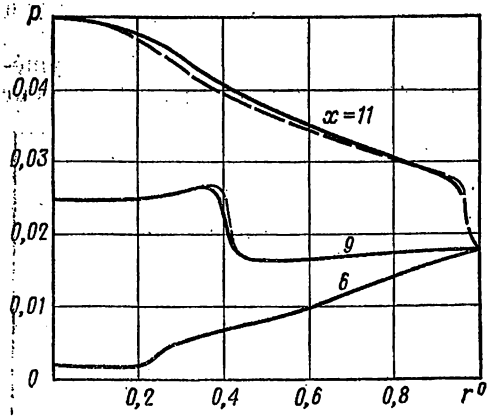


Fig. 20.6

§ 21. Schéma unidimensionnel implicite pour les problèmes quasi linéaires

Lois de conservation intégrales et équations quasi linéaires. Description générale du schéma prédicteur-correcteur. Système d'équations implicites dans la couche intermédiaire. Réalisation des conditions aux limites. Calcul explicite aux frontières des domaines de calcul. Rôle de la mobilité du réseau.

Nous avons souligné à plusieurs occasions que les schémas aux différences présentés se fondent sur les égalités intégrales traduisant les différentes lois physiques. Supposons qu'elles soient de la forme

$$\oint_{\Gamma} B(x, t, u)\,dx - C(x, t, u)\,dt = \iint_{\Omega} F(x, t, u)\,dx\,dt, \quad (21.1)$$

où u est le vecteur fonction cherché de dimension m^*; B, C, F les vecteurs fonctions donnés de même dimension dont les composantes dépendent de x, t, u. On sous-entend que l'intégration dans (21.1) s'étend à un domaine quelconque Ω intérieur au contour Γ.

On peut donc faire correspondre aux lois intégrales (21.1) un système de m^* équations quasi linéaires auquel doivent satisfaire des solutions lisses

$$\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=F-\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial C}{\partial x}, \tag{21.2}$$

où par $\frac{\partial B}{\partial u}$, $\frac{\partial C}{\partial u}$ sont désignées les matrices carrées de rang m^* dont les éléments représentent les dérivées partielles des composantes $B_m(x, t, u)$, $C_m(x, t, u)$ des vecteurs fonctions $B(x, t, u)$, $C(x, t, u)$ par rapport aux variables u_n, composantes du vecteur fonction cherché u:

$$\frac{\partial B}{\partial u}=\left\|\frac{\partial B_m}{\partial u_n}\right\|, \quad \frac{\partial C}{\partial u}=\left\|\frac{\partial C_m}{\partial u_n}\right\|, \quad m, n=1, \ldots, m^*.$$

Nous allons supposer que la matrice $\frac{\partial B}{\partial u}$ ne dégénère pas. Alors le système d'équations (21.2) peut être mis sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A\frac{\partial u}{\partial x}=f, \tag{21.3}$$

où

$$A=\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial C}{\partial u}, \quad f=\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)^{-1}\left[F-\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial C}{\partial x}\right].$$

Comme il a été noté dans le cas linéaire traité dans les §§ 9 à 11 nous supposons que le système d'équations (21.3) peut être symétrisé, i.e. en multipliant par une certaine matrice symétrique définie positive et éventuellement en passant à de nouvelles fonctions inconnues, on lui confère la forme symétrique. Cette symétrisation n'est pas toujours simple dans le cas des systèmes d'équations quasi linéaires. Pour les équations de la dynamique des gaz, objet principal de notre étude, la symétrisation sera considérée au § 22 directement pour le cas spatial.

En construisant un schéma aux différences implicite pour le système d'équations (21.3), on n'aura pas besoin d'effectuer une symétrisation concrète. Il nous suffira d'utiliser le caractère hyperbolique du système (21.3) permettant, par une transformation non dégénérée des fonctions inconnues $u=\Lambda v$, de réduire ce dernier à la forme canonique avec la matrice diagonale dont les éléments $\mu_m=\mu_m(x, t, u)$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$\det \|A-\mu I\|=0.$$

Les éléments de la matrice de transformation Λ sont eux aussi fonctions de x, t, u.

Signalons que le calcul effectif des racines μ_m de la matrice correspondante Λ doit se faire, nous le verrons par la suite, uniquement en deux points à la frontière du domaine de calcul. Toutefois l'éventualité d'une telle transformation en tout point (x, t, u) est néces-

saire pour une formulation correcte des problèmes dont nous voulons effectuer la résolution numérique.

Il s'agit de trouver une solution (généralisée, le plus souvent) des équations (21.2) avec les données initiales $u(x, 0) = u_0(x)$ définies sur le segment $x_I \leqslant x \leqslant x_{II}$ et avec certaines conditions aux limites que nous ne concrétisons pas pour l'instant et dont la forme sera précisée au cours de la description du schéma aux différences.

Le présent paragraphe sera consacré aux modifications de caractère technologique à apporter dans le schéma implicite traité au § 11 étant donné que le problème est quasi linéaire. Dans la mesure du possible nous essayons de conserver les notations précédentes. Rappelons que le passage des quantités $u_{j-1/2}$ de la couche « inférieure », $t = t_0$, aux quantités $u^{j-1/2}$ de la couche « supérieure » s'effectue en trois étapes:

1. Calcul des quantités auxiliaires $\overline{U}_j$ sur la couche intermédiaire par la résolution du système implicite d'équations aux différences finies.

2. Moyennage de lissage local des quantités $\overline{U}_j$ conduisant aux quantités U_j.

3. Correction fondée sur les lois de conservation intégrales.

Consacrons-nous, pour l'instant, à la composition du système d'équations aux différences pour les quantités $\overline{U}_j$ sur la couche intermédiaire. Rappelons-nous le fait important que nous n'avons pas à nous soucier des lois de conservation, car celles-ci seront satisfaites par la correction à la troisième étape. Cela nous laisse libres d'appliquer, à la première étape, les équations non divergentes (21.3). En outre, nous allons procéder à la linéarisation par rapport à u des équations (et des conditions aux limites si elles sont non linéaires).

En composant les équations aux différences finies sur une couche intermédiaire, nous introduisons provisoirement, tout comme au § 11, outre les quantités $\overline{U}_j$ les quantités $\overline{U}_{j-1/2}$ aux indices demi-entiers. Par analogie avec (11.5) et (11.6) nous écrivons pour elles les équations qui, dans le cas unidimensionnel ($f \equiv 0$) ont la forme

$$\begin{aligned} \frac{\overline{U}_{j-1/2} - u_{j-1/2}}{\omega\tau} + A_{j-1/2}\frac{\overline{U}_j - \overline{U}_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} &= 0, \\ \frac{\overline{U}_{j+1/2} - u_{j+1/2}}{\omega\tau} + A_{j+1/2}\frac{\overline{U}_{j+1} - \overline{U}_j}{x_{j+1} - x_j} &= 0 \end{aligned} \qquad (21.4)$$

dans les intervalles $j - 1/2$ et $j + 1/2$ respectivement.

Le maillage n'est plus supposé uniforme, i.e. les nœuds x_j peuvent avoir une disposition quelconque. Le paramètre ω désigne, comme auparavant dans les (11.5), (11.6), la « hauteur » de la couche

intermédiaire. Par convention, on peut dire que la couche intermédiaire est associée au temps $t = t_0 + \omega\tau$. On choisit habituellement $\omega = 0{,}5$ ou $\omega = 1$.

La matrice A de (21.3) étant fonction de x, t, u, les matrices $A_{j-1/2}$ et $A_{j+1/2}$ des équations (21.4) se calculent selon la règle

$$\begin{aligned} A_{j-1/2} &= A(x_{j-1/2}, t_0, u_{j-1/2}), \\ A_{j+1/2} &= A(x_{j+1/2}, t_0, u_{j+1/2}) \end{aligned} \tag{21.5}$$

en utilisant les quantités, déjà connues, de la couche « inférieure » $\{u_{j-1/2}\}$ rapportées aux points $x_{j-1/2} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1})$. L'équation aux différences finies en un nœud x_j s'obtient par l'« interpolation » des équations (21.4):

$$\frac{\overline{U}_j - u_j}{\omega\tau} + A_j \frac{\overline{U}_{j+1/2} - \overline{U}_{j-1/2}}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} = 0, \tag{21.6}$$

où

$$\begin{aligned} u_j &= \theta_j u_{j-1/2} + (1-\theta_j)\, u_{j+1/2}, \\ A_j &= \theta_j A_{j-1/2} + (1-\theta_j)\, A_{j+1/2}, \end{aligned} \qquad \theta_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}.$$

En éliminant les quantités « demi-entières » $\overline{U}_{j-1/2}$, $\overline{U}_{j+1/2}$ de (21.6) à l'aide des équations (21.4) on obtient une équation reliant trois vecteurs voisins $\overline{U}_{j-1}$, $\overline{U}_j$, $\overline{U}_{j+1}$:

$$\frac{\overline{U}_j - u_j}{\omega\tau} + A_j \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} - \frac{\omega\tau}{\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1})} A_j \left[A_{j+1/2} \frac{\overline{U}_{j+1} - \overline{U}_j}{x_{j+1} - x_j} - A_{j-1/2} \frac{\overline{U}_j - \overline{U}_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right] = G_j, \tag{21.7}$$

où pour le cas homogène $G_j = f_j = 0$. Si le système d'équations (21.3) est inhomogène, nous ajoutons à l'équation (21.7) le second membre de la forme suivante:

$$G_j = H_j \overline{U}_j + g_j,$$

où la matrice H_j et le vecteur g_j s'obtiennent par interpolation:

$$\begin{aligned} g_j &= \theta_j g_{j-1/2} + (1-\theta_j)\, g_{j+1/2}, \\ H_j &= \theta_j H_{j-1/2} + (1-\theta_j)\, H_{j+1/2}, \end{aligned}$$

$H_{j-1/2}$, $g_{j-1/2}$ qui sont calculés à l'aide des quantités connues sur la couche « inférieure », résultent de la linéarisation du second membre $f(x, t, u)$ de l'équation (21.3). Les quantités $\overline{U}_{j-1/2}$ aux indices demi-entiers ne servent qu'à établir les équations (21.7) et n'apparaissent plus dans les calculs ultérieurs.

Le système des équations (21.7) écrites pour tous les nœuds intérieurs $j = 1, \ldots, J-1$ est à compléter par les équations pour les extrémités de gauche et de droite du domaine de calcul. Pour ce faire on confère aux équations de départ (21.3) la forme canonique (en « caractéristiques ») en les multipliant par une matrice Λ^* convenablement choisie (§ 9) et telle que

$$\Lambda^* \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda^* A \frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda^* f. \tag{21.8}$$

Par analogie avec le cas linéaire du § 11 on écrit à l'extrémité gauche $x_0 = x_I$ les équations aux différences de la forme

$$\Lambda^*_{1/2} \frac{\frac{1}{2}(\overline{U}_0 + \overline{U}_1) - u_{1/2}}{\omega\tau} + \Lambda^*_{1/2} A_{1/2} \frac{\overline{U}_1 - \overline{U}_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= \Lambda^*_{1/2} H_{1/2} \frac{\overline{U}_0 + \overline{U}_1}{2} + \Lambda^*_{1/2} g_{1/2}, \tag{21.9}$$

où

$$\Lambda^*_{1/2} = \Lambda^* \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, t_0, u_{1/2} \right).$$

Parmi les relations (21.9) on ne laisse que celles pour lesquelles les pentes des caractéristiques

$$\mu_m = \mu_m \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, t_0, u_{1/2} \right) \leqslant 0,$$

i.e. les relations répondant aux caractéristiques « arrivant » à la frontière gauche. Les autres répondant aux caractéristiques « partantes » doivent être remplacées par les conditions aux limites. Si les conditions aux limites sont données sous la forme non linéaire, on procède à leur linéarisation ; elles prennent alors la forme

$$\Phi_I \overline{U}_0 = g_I, \tag{21.10}$$

où Φ_I est une matrice carrée à m^* colonnes, le nombre de ses lignes m_I étant égal à celui des valeurs positives parmi les nombres propres de la matrice $\Lambda^*_{1/2}$; g_I est le vecteur de dimension m_I.

A l'extrémité droite, les équations s'écrivent de façon tout à fait analogue à l'aide de la matrice

$$\Lambda^*_{J-1/2} = \Lambda^* \left(\frac{x_J + x_{J-1}}{2}, t_0, u_{J-1/2} \right).$$

Soulignons le fait suivant. Puisque les valeurs propres $\mu_m = \mu_m(x, t, u)$ de la matrice A dépendent non seulement du point (x, t) mais également de la solution $u(x, t)$ elle-même, il n'est pas exclu qu'on puisse être amené, au cours du calcul d'un problème concret, à modifier le nombre de conditions aux limites au point frontière. Il va de soi que les conditions aux limites données une fois linéarisées doivent être linéairement indépendantes avec des rela-

tions du type (21.9), que nous écrivons pour les caractéristiques « arrivantes ».

Tout ce qui a été dit représente un système assez complexe et fastidieux d'hypothèses spéculatives dont la véracité, semble-t-il, ne peut être vérifiée que par la voie expérimentale, le plus souvent par l'analyse des résultats obtenus au cours du calcul d'un problème concret. A ce propos nous essayerons plus bas de trouver par une autre voie la solution à la question des conditions aux limites appliquées aux équations de la dynamique des gaz. Pour l'instant revenons à l'étude du schéma implicite.

Si toutes les hypothèses mentionnées plus haut sont remplies, les équations vectorielles (21.7) aux nœuds intérieurs $j = 1, \ldots, J-1$, l'équation vectorielle (21.9) dans laquelle une partie des relations est remplacée par les conditions aux limites linéarisées (21.10) à la frontière gauche et une équation vectorielle analogue à la frontière droite forment un système complet d'équations aux différences finies qui s'apparente, par sa structure, au système (11.15) pour le système d'équations hyperboliques linéaires. On peut le résoudre par le balayage de la même façon qu'au § 11.

Comme il découle du schéma de calcul du pas, décrit au début du paragraphe, les quantités $\overline{U}_j$ obtenues dans la couche intermédiaire sont ensuite soumises au moyennage de lissage. Par analogie avec la formule (11.3) pour le cas linéaire nous procédons à la réalisation de ce dernier en utilisant la formule

$$U_j = (1-\alpha)\overline{U}_j + \alpha[\theta_j \overline{U}_{j-1} + (1-\theta_j)\overline{U}_{j+1}] \qquad (21.11)$$

dans laquelle le coefficient $\theta_j = \frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_{j-1}}$ traduit l'irrégularité dans la disposition des nœuds du maillage. On se donne le paramètre numérique α en partant des restrictions $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5$ qui étaient justifiées dans le cas linéaire. Les formules de lissage (21.11) s'appliquent aux nœuds intérieurs du maillage $j = 1, \ldots, J-1$; aux nœuds limites les $\overline{U}_j$ obtenus restent sans modifications:

$$U_0 = \overline{U}_0, \quad U_J = \overline{U}_J.$$

Le calcul du pas s'achève par la correction fournissant les valeurs $u^{j-1/2}$ dans la couche supérieure. On effectue la correction en s'appuyant sur les lois intégrales (21.1) qui figurent au début de ce paragraphe. En les appliquant à un intervalle de réseau particulier $x_{j-1} < x < x_j$ pendant un temps de t_0 à $t_0 + \tau$ on obtient l'égalité vectorielle de la forme suivante:

$$B(x_{j-1/2}, t_0+\tau, u^{j-1/2}) = \\ = B(x_{j-1/2}, t_0, u_{j-1/2}) - \frac{\tau}{x_j - x_{j-1}}\left[C(x_j, t_0, U_j) - \right. \\ \left. - C(x_{j-1}, t_0, U_{j-1})\right] + \tau F(x_{j-1/2}, t_0, u_{j-1/2}). \qquad (21.12)$$

Pour simplifier le calcul du vecteur fonction F dans l'équation (21.12) nous avons rapporté, comme à l'ordinaire, les quantités u à la couche « inférieure ». Cela n'est pas obligatoire et dans certains cas il semble rationnel de prendre $u^{j-1/2}$ de la couche « supérieure » ou les quantités $\frac{1}{2}(u_{j-1/2} + u^{j-1/2})$.

Dans le cas général (21.12) représente un système non linéaire de m^* équations pour les quantités $u^{j-1/2}$ et sa résolution peut éventuellement être effectuée par une des méthodes itératives. Dans le cas d'un système d'équations de la dynamique des gaz unidimensionnelle instationnaire (12.1) complété par l'équation d'état du gaz parfait le vecteur fonction u cherché a trois composantes (ρ, u, p), le vecteur fonction B des lois de conservation a les composantes ρ, ρu, $\left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varkappa - 1}\right) u$. Cela permet de calculer les quantités $\rho^{j-1/2}$, $u^{j-1/2}$, $p^{j-1/2}$ de manière successive, sans itérations.

En cas d'écoulements stationnaires plans, on l'a vu au § 18, le vecteur fonction B a pour composantes ρu, $p + \rho u^2$, ρuv, ρuw si bien qu'en éliminant les quantités v, w, p, ρ on peut obtenir une équation du second degré pour u et calculer, ensuite, les autres quantités v, w, p, ρ. Des situations analogues pouvant avoir lieu dans d'autres cas, il est rationnel de résoudre les équations (21.12) en partant du système concret des lois de conservation (21.1).

Présentons encore une manière de prendre en compte les conditions aux limites pour un schéma implicite dans une couche intermédiaire, qui nous semble plus simple et dont l'application ne tire pas à conséquence comme l'a montré la pratique. Nous avons tenu à l'exposer en application aux équations de la dynamique des gaz. Il est vrai qu'une restriction au pas en temps y apparaît, mais selon nous elle a trait à la nature même du problème.

Au nœud limite $x_0 = x_{\text{I}}$, posons le problème aux limites de décomposition de discontinuité comme nous avons procédé au § 15 en considérant les conditions aux limites pour un schéma aux différences explicite. Le problème consiste à faire appel aux conditions aux limites de forme appropriée et aux relations à l'onde (de choc ou de détente). La résolution de ce problème fournira premièrement la vitesse de mouvement de la frontière gauche W_{I}^* (si elle n'est pas donnée comme une condition aux limites) ; deuxièmement, toutes les « grandes » valeurs U_0 au nœud $x_0 = x_{\text{I}}$. De manière tout à fait analogue, en résolvant un problème aux limites de décomposition de discontinuité au nœud droit $x_J = x_{\text{II}}$ on détermine la vitesse de la frontière droite W_{II}^* et toutes les « grandes » valeurs U_J.

Soulignons un fait important : le problème de décomposition limite de discontinuité tient automatiquement compte du comportement des caractéristiques et par cela même il prend en compte correctement les conditions aux limites (bien entendu, dans le cas où

il est correctement posé). Les vecteurs U_0 et U_J obtenus donnent les conditions aux limites les plus simples pour un système implicite d'équations aux différences finies sur la couche intermédiaire, ce système pouvant être résolu, comme auparavant, par le balayage matriciel. Signalons d'ailleurs que dans certains cas il est possible de représenter les équations (21.3) et les conditions aux limites au moyen des invariants riemanniens. On peut opérer sur chacune d'elles un balayage « scalaire » de façon indépendante pour ensuite retourner aux grandeurs de départ. Si les seconds membres des équations (21.8) empêchent de le faire, on pourrait les rapporter entièrement, par exemple, à la couche « inférieure ».

L'algorithme décrit, utilisant le calcul explicite des frontières suivi du calcul implicite de la couche intermédiaire, n'est plus un schéma stable pour tout pas en temps. Toutefois à la différence des schémas explicites décrits auparavant la restriction au pas découle non pas de la dimension de la maille du réseau mais, semble-t-il, de la longueur de tout le domaine de calcul. On n'a pas fait d'étude analytique de ce problème mais des expériences et des calculs pratiques multiples nous ont convaincu de la commodité et de la facilité d'application de cet algorithme de construction du schéma implicite. En particulier, cet algorithme allège sensiblement l'organisation du calcul des problèmes ayant plusieurs domaines de calcul étant donné que le calcul explicite des frontières permet le balayage indépendant dans chacun de ces domaines. Des idées semblables ont été proposées dans les ouvrages [52], [111].

On impose une restriction sur le pas et ceci bien que la stabilité nous autorise à calculer d'après le schéma implicite avec un pas en temps arbitraire, car il existe des erreurs d'approximation dépendant de la grandeur du pas! De ce point de vue la restriction imposée est fort justifiée. (Notons en passant que dans nombre de cas la restriction que l'on impose pour un schéma explicite se trouve également justifiée. Cela concerne notamment les transformations instationnaires rapides.) L'application des schémas implicites avec le calcul explicite des frontières permet de calculer, entre autres, le problème de la décomposition de discontinuité engendrant les ondes de choc ou de détente qui se développent d'un « point ». Pour ce faire il faut étendre l'algorithme de composition du système d'équations aux différences finies sur la couche intermédiaire au cas des réseaux mobiles.

Si tous les nœuds du réseau sont animés d'une vitesse constante W^*, il est évident qu'en faisant la substitution $\bar{x} = x - W^*t$ on ramène le problème au réseau immobile. Comme à la suite de cette substitution le système d'équations $\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ est rem-

placé par les équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (A - W^* I)\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = 0,$$

où I est une matrice unité, les modifications survenues dans le système d'équations implicites se réduisent au remplacement de la matrice A par $A - W^*I$. Au cas où chaque nœud a sa vitesse propre $W_j^* = \frac{x^j - x_j}{\tau}$, il convient de remplacer dans l'équation (21.7) sur la couche intermédiaire les matrices $A_{j-1/2}$ par

$$A_{j-1/2} - W^*_{j-1/2} I,$$

où

$$W^*_{j-1/2} = \frac{1}{2}(W^*_{j-1} + W^*_j),$$

et, en outre, d'utiliser au lieu de la coordonnée x_j les quantités $\bar{x}_j$ associées au temps $t = t_0 + \omega\tau$.

En ce qui concerne la correction, la prise en compte de la mobilité du maillage s'effectue exactement comme on l'avait décrit au § 14 pour le schéma explicite.

CHAPITRE III

CONSTRUCTION DES SCHÉMAS AUX DIFFÉRENCES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES MULTIDIMENSIONNELS

§ 22. Lois de conservation et équations de la dynamique des gaz

Forme intégrale des lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans la mécanique des milieux continus. Equations différentielles associées. Relations sur les discontinuités. Les différentes formes des équations de la dynamique des gaz instationnaire en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Symétrisation des équations de la physique mathématique, notamment de celles de la dynamique des gaz. Loi de conservation complémentaire pour les systèmes symétriques d'équations.

La description mathématique de l'état d'un milieu continu (fluide) en mouvement se fait à l'aide des fonctions donnant la distribution du vecteur vitesse du milieu q (ayant trois composantes dans le cas spatial) et de deux quantités thermodynamiques quelconques telles la pression p et la densité ρ. Toutes les autres grandeurs thermodynamiques se déterminent, nous l'avons signalé au § 12, par l'intermédiaire de ces deux grandeurs à l'aide de l'équation d'état. Nous nous intéressons en premier lieu à l'énergie interne par unité de masse de milieu ε. Pour cette raison l'équation d'état est supposée donnée sous la forme

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \tag{22.1}$$

On sait par les cours de mécanique des milieux continus que les phénomènes dont nous entreprenons l'étude mathématique reposent sur les lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Nous renvoyons le lecteur qui s'intéresse aux déductions de ces lois aux cours de mécanique des milieux continus, par exemple [137]. Commençons par les écrire sous la forme intégrale indépendante du système géométrique de coordonnées.

La loi de conservation de la masse du fluide dans un volume fermé quelconque Ω de l'espace a la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho\, d\Omega = -\oint_{\Sigma} \rho q\, d\Sigma. \tag{22.2}$$

Le premier membre représente la variation de la quantité de fluide dans le volume Ω, le second membre la quantité de fluide qui s'écoule à travers la surface Σ de ce volume. Après la transformation de l'in-

tégrale de surface de droite en intégrale de volume d'après la formule d'Ostrogradsky-Gauss, (22.2) se met sous la forme

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho q \right) d\Omega = 0. \tag{22.3}$$

Le volume Ω étant arbitraire, il en découle l'*équation* dite *de continuité*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho q = 0. \tag{22.4}$$

On peut conférer à la loi de conservation de l'énergie contenue dans le volume Ω la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\rho \varepsilon + \rho \frac{|q|^2}{2} \right) d\Omega = - \oint_{\Sigma} \rho q \left(\varepsilon + \frac{|q|^2}{2} \right) d\Sigma - \int_{\Sigma} pq \, d\Sigma. \tag{22.5}$$

Dans cette formule

$$\rho \varepsilon + \rho \frac{|q^2|}{2} = e \tag{22.6}$$

est l'énergie totale (la somme de l'énergie cinétique et potentielle) d'une unité de volume de fluide. Le premier membre de (22.5) représente la variation de la quantité d'énergie totale dans le volume Ω. Le premier terme du second membre est l'énergie totale transportée directement (en unité de temps) par la masse fluide traversant la surface Σ. Le second terme est le travail produit par les forces de pression sur le fluide contenu à l'intérieur de la surface Σ. En transformant (22.5) à l'aide de la formule d'Ostrogradsky-Gausse on obtient

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (e + p) q \right] d\Omega = 0, \tag{22.7}$$

d'où, vu que le volume Ω est arbitraire, découle l'équation de variation de l'énergie

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (e + p) q = 0. \tag{22.8}$$

La loi de conservation de l'impulsion enfermée dans le volume Ω peut être écrite

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho q \, d\Omega = - \oint_{\Sigma} \Pi \, d\Sigma, \tag{22.9}$$

où Π est un tenseur symétrique du second rang appelé tenseur de densité de flux de l'impulsion. Le flux du vecteur impulsion à travers la surface perpendiculaire au vecteur unité n est donné par le vecteur

$$pn + (q, n) \rho q, \tag{22.10}$$

où (q, n) est le produit scalaire des vecteurs q et n. En particulier, si le vecteur n est dirigé le long de la vitesse q, il en ressort que la densité de flux de la composante longitudinale de l'impulsion est égale à $p + \rho \mid q \mid^2$, et dans la direction de n perpendiculaire à la vitesse q la densité de flux de la composante transversale de l'impulsion est égale à p.

En transformant dans (22.9) l'intégrale de surface en intégrale de volume on obtient l'égalité

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho q + \operatorname{div} \Pi \right) d\Omega = 0, \tag{22.11}$$

et par suite l'équation de conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho q + \operatorname{div} \Pi = 0. \tag{22.12}$$

En déduisant ces équations on n'a pas pris en compte les processus de dissipation de l'énergie par frottement interne (viscosité) et par échange de chaleur, qui peuvent avoir lieu dans un fluide en écoulement. L'écoulement qui se produit sans mettre en jeu ces processus est dit écoulement adiabatique d'un fluide parfait.

L'expression mathématique de l'adiabaticité de l'écoulement se traduit par l'« équation de continuité » pour l'entropie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho S + \operatorname{div} \rho S q = 0, \tag{22.13}$$

que l'on peut obtenir comme conséquence des équations de conservation de la masse (22.4), de l'impulsion (22.12) et de l'énergie (22.8). A l'équation (22.13) correspond la loi de conservation de l'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho S \, d\Omega = - \oint_{\Sigma} \rho S q \, d\Sigma \tag{22.14}$$

qui n'a lieu toutefois que sur les solutions lisses. S'il se forme des discontinuités, la dissipation ne doit pas être négligée et au lieu de la loi de conservation de l'entropie il faut partir du fait qu'à la traversée de la discontinuité l'entropie de l'élément matériel croît.

Les équations écrites admettent la naissance et l'existence de surfaces de discontinuité de deux espaces : ondes de choc et glissements. Certaines relations doivent être remplies sur ceux-ci. Pour l'onde de choc dans le cas unidimensionnel ces relations (12.12) ont été écrites au § 12.

Dans le cas spatial elles revêtent la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\rho] D - [\rho q_n] &= 0, \\ [\rho q_n] D - [p + \rho q_n^2] &= 0, \\ [e] D - [(e + p) q_n] &= 0, \\ [q_t] &= 0. \end{aligned} \tag{22.15}$$

Ici $q_n = (q, n)$ est une composante de la vitesse q normale à la surface de discontinuité, D la vitesse de mouvement de la surface de discontinuité dans le sens du vecteur n de la normale à celle-ci, $q_t = q - q_n n$ la composante du vecteur vitesse tangente à la surface de discontinuité. Pour un glissement la composante normale de la vitesse q_n et la pression p sont continues, i.e. $[q_n]=0$, $[p]=0$, tandis que la densité ρ et la composante tangentielle de la vitesse q_t peuvent subir un saut arbitraire.

Il a été noté au § 12 que les fonctions satisfaisant aux lois intégrales de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie et contenant des discontinuités seront considérées comme des solutions généralisées des équations de la dynamique des gaz. Les discontinuités doivent vérifier la loi d'accroissement d'entropie.

En conclusion de ce paragraphe nous donnerons, pour simplifier les références ultérieures, différentes formes des équations des lois de conservation de la masse (22.4), de l'impulsion (22.12), écrite sous la forme de trois équations pour ses composantes, et de l'énergie (22.8). En coordonnées cartésiennes elles ont la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p+\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial (p+\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial (p+\rho w^2)}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e+p)u}{\partial x} + \frac{\partial (e+p)v}{\partial y} + \frac{\partial (e+p)w}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{22.16}$$

où u, v, w sont les composantes du vecteur vitesse q,

$$q^2 = |q|^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad e = \rho\left(\varepsilon + \frac{q^2}{2}\right).$$

Pour rendre plus compacte l'écriture du système (22.16) introduisons les vecteurs colonnes auxiliaires:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \; a = \begin{bmatrix} \rho u \\ p+\rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p+\rho v^2 \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p+\rho w^2 \\ (e+p)w \end{bmatrix}. \tag{22.17}$$

Cela étant, en coordonnées cartésiennes les équations (22.16) s'écrivent ainsi:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0. \tag{22.18}$$

Comme un bon nombre de problèmes sont plus faciles à résoudre en coordonnées cylindriques, auxquelles on passe à l'aide des formules

$$x=x,\quad y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi, \tag{22.19}$$

nous donnons également l'écriture des équations instationnaires de la dynamique des gaz en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial \sigma r}{\partial t}+\frac{\partial a r}{\partial x}+\frac{\partial b r}{\partial r}+\frac{\partial c}{\partial \varphi}=f. \tag{22.20}$$

Les seconds membres sont donnés par le vecteur colonne

$$f=[0,\ 0,\ p+\rho w^2,\ -\rho v w,\ 0]^*; \tag{22.21}$$

u, v, w étant les composantes du vecteur vitesse q: composantes axiale, radiale et angulaire respectivement; le module du vecteur vitesse $q=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$.

Certains auteurs préfèrent à (22.20) une autre forme de divergence des équations de la dynamique des gaz en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial \varphi}=-\frac{1}{r}f_0, \tag{22.22}$$

où les seconds membres sont donnés par le vecteur colonne

$$f_0=[\rho v,\ \rho u v,\ \rho(v^2-w^2),\ 2\rho v w,\ (e+p)v]^*. \tag{22.23}$$

Par une vérification directe on peut se convaincre que les équations (22.20) et (22.22) sont équivalentes entre elles. Il a été déjà noté au § 14 que la préférence qu'on accorde aux équations (22.22) est due au fait que les équations aux différences construites à partir de ces équations fournissent des résultats plus précis au voisinage de l'axe de symétrie que ceux obtenus par le schéma aux différences découlant des équations (22.20). C'est aussi le point de vue de l'ouvrage [143].

Sans contredire cette opinion nous allons seulement rappeler la remarque faite au § 14, à savoir qu'en utilisant le schéma aux différences fondé sur les équations (22.20) on arrive à assurer sous forme de différences finies la vérification exacte des lois de conservation de la masse, de l'énergie et de la composante de l'impulsion sur l'axe de symétrie grâce à l'homogénéité des équations correspon-

dantes comme on le voit d'après la formule (22.21) du second membre f des équations (22.20) dont il s'agit. Les composantes angulaire et radiale de l'impulsion se conservent approximativement. Quant aux équations (22.22), elles traduisent toutes les lois de conservation de manière approchée. Il en ressort que le choix des formes des équations à utiliser doit être arrêté en fonction de la classe concrète des problèmes à résoudre.

Présentons, enfin, la forme la plus simple des équations de la mécanique des fluides instationnaire en coordonnées cylindriques, forme qui n'est plus conservative :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)=-\frac{1}{r}\rho v,\\
&\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\\
&\frac{dv}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{w^2}{r},\\
&\frac{dw}{dt}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=-\frac{vw}{r},\\
&\frac{dp}{dt}+\rho c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)=-\rho c^2\frac{v}{r}.
\end{aligned} \tag{22.24}$$

Ici l'opérateur $\frac{d}{dt}$ est défini par la formule

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial r}+\frac{w}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

et est appelé *dérivée matérielle*, c^2 est le carré de la vitesse du son. Il a été déjà noté au § 13 que pour un gaz parfait $c^2=\varkappa\frac{p}{\rho}$, et pour une équation d'état binôme

$$c^2=\varkappa\frac{p+p_0}{\rho}=\frac{\varkappa p+\rho_0 c_0^2}{\rho}.$$

Les équations utilisées au ch. II pour les problèmes quasi linéaires de deux variables représentaient les cas particuliers des équations spatiales ci-dessus. En particulier, dans le cas où l'écoulement ne dépend pas des variables y et z, i.e. lorsque les composantes de la vitesse $v\equiv w\equiv 0$, on tire de (22.16) les équations (12.1) de la dynamique des gaz unidimensionnelle instationnaire. Il en est tout à fait de même pour les équations des écoulements instationnaires à symétrie axiale, écrites au § 14. Elles représentent un cas particulier des équations (22.20) ou (22.22) lorsque l'écoulement ne dépend que de la coordonnée radiale r et du temps t, i.e. les deux composantes de la vitesse sont nulles : $u\equiv w\equiv 0$. Enfin, les équations pour les écou-

lements stationnaires supersoniques données au § 18 résultent des équations (22.22) et (22.23) si l'on pose que l'écoulement est stationnaire, c.-à-d. indépendant du temps t. Le schéma aux différences pour ces équations sera étudié plus loin, au § 26; le § 18 envisageait le cas particulier d'un écoulement supersonique stationnaire indépendant de la coordonnée angulaire φ.

Les §§ 39, 43 seront consacrés à l'étude de l'écoulement d'un gaz conducteur en présence d'un champ magnétique dans l'hypothèse qu'un champ électrique extérieur est absent. Le champ magnétique crée des courants induits dans le gaz qui engendrent une force pondéromotrice

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B},$$

où $\boldsymbol{j}$ est le vecteur densité de courant, $\boldsymbol{B}$ le vecteur induction magnétique, $\boldsymbol{F}$ leur produit vectoriel. En l'absence d'un champ électrique extérieur ($\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{E}$ étant le vecteur champ électrique) la densité de courant $\boldsymbol{j}$ est donnée par la loi d'Ohm:

$$\boldsymbol{j} = \sigma [\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{B}],$$

où $\boldsymbol{q}$ est le vecteur vitesse, σ la conductibilité électrique pouvant être considérée comme une fonction connue des paramètres thermodynamiques tels que la pression p et la densité ρ.

La force $\boldsymbol{F}$ ainsi calculée est à reporter dans les seconds membres des équations traduisant la loi de conservation de l'impulsion. En même temps, lorsque $\boldsymbol{E} = 0$, il n'y a pas d'apport d'énergie au gaz de sorte qu'on ne voit apparaître dans l'équation de l'énergie aucun terme auxiliaire.

Dans le cas où les lignes de force du champ magnétique à symétrie axiale appliqué sont contenues dans le plan méridien, le caractère de l'écoulement n'est pas altéré si bien qu'on peut se servir du système d'équations (22.20) sans les dérivées par rapport à φ et sans la quatrième équation, puisque $w \equiv 0$. Le vecteur des seconds membres aura au lieu de (22.21) les composantes suivantes:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = -s\sigma B_r (B_r u - B_x v),$$
$$f_3 = p - s\sigma B_x (B_r u - B_x v), \quad f_4 = 0.$$

Ici s est une constante sans dimensions (paramètre d'action magnétogazodynamique), B_x et B_r sont les projections de l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ sur les axes des x et des r; σ est la fonction donnée de p et ρ.

Pour conclure ce paragraphe arrêtons-nous encore sur un problème important dont il était question au § 9. Il s'agit des systèmes d'équations hyperboliques symétriques tels les systèmes d'équations hyperboliques linéaires de la physique mathématique. Dans le cas où les équations non linéaires sont considérées, il n'est pas si simple de les symétriser. En 1961, S. Godounov sut définir, dans l'ouvrage [30], une certaine classe spéciale de systèmes

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{M}^{(1)}_{q_i}}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{M}^{(2)}_{q_i}}{\partial y} + \frac{\partial \mathscr{M}^{(3)}_{q_i}}{\partial z} = 0, \qquad (22.25)$$

qui contient notamment les équations de la dynamique des gaz et les équations obtenues à l'aide des principes variationnels avec des fonctionnelles du type

$$\int\int\int F\left(u_1, u_2, \ldots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Le système d'équations (22.25) permet d'établir une loi de conservation complémentaire

$$\frac{\partial\left(\sum_i q_i \mathscr{L}_{q_i} - \mathscr{L}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\sum_i q_i \mathscr{M}^{(1)}_{q_i} - \mathscr{M}^{(1)}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\sum_i q_i \mathscr{M}^{(2)}_{q_i} - \mathscr{M}^{(2)}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\sum_i q_i \mathscr{M}^{(3)}_{q_i} - \mathscr{M}^{(3)}\right)}{\partial z} = 0. \quad (22.26)$$

L'égalité (22.26) s'obtient en multipliant l'i-ième équation du système (22.25) par q_i et en sommant ensuite toutes les équations.

Pour écrire sous la forme (22.25) le système d'équations instationnaires de la dynamique des gaz (22.16) à trois variables spatiales il faut poser

$$\mathscr{L} = \frac{p}{T}, \quad \mathscr{M}^{(1)} = \frac{up}{T}, \quad \mathscr{M}^{(2)} = \frac{vp}{T}, \quad \mathscr{M}^{(3)} = \frac{wp}{T},$$

$$q_1 = -\frac{u}{T}, \quad q_2 = -\frac{v}{T}, \quad q_3 = -\frac{w}{T}, \quad (22.27)$$

$$q_4 = S - \frac{\varepsilon + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2+v^2+w^2}{2}}{T}, \quad q_5 = \frac{1}{T}.$$

Ici T est la température absolue liée à l'entropie S par la relation

$$d\varepsilon + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T\,dS.$$

Cette identité thermodynamique permet précisément l'écriture des équations de la dynamique des gaz sous la forme symétrique (22.25).

La loi de conservation (22.26) prend dans ce cas la forme

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho uS}{\partial x} + \frac{\partial \rho vS}{\partial y} + \frac{\partial \rho wS}{\partial z} = 0,$$

i.e. elle représente la loi de conservation de l'entropie, les facteurs q_i étant analogues aux facteurs intégrants du second principe de la thermodynamique. Ce raisonnement facilite la procédure de la réduction des équations concrètes à la forme (22.25). Les équations de ce type peuvent aussi être écrites sous la forme suivante:

$$\sum_j \mathscr{L}_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + \sum_j \mathscr{M}^{(1)}_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \sum_j \mathscr{M}^{(2)}_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \sum_j \mathscr{M}^{(3)}_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial z} = 0,$$

d'où il est évident qu'elles forment un système hyperbolique symétrique à condition que $\mathscr{L}$ soit une fonction convexe de ses arguments $q_1, \ldots, q_n$, ce qui assure le caractère défini positif de la matrice auprès des dérivées par rapport au temps.

On trouve dans l'ouvrage [30] parmi les équations de la physique mathématique réductibles à la forme (22.25), outre les équations

de la dynamique des gaz, les équations aux variations de Lagrange et les équations de l'optique cristalline. Dans l'ouvrage [33] on obtient, par une voie différente généralisant le schéma décrit, une forme symétrique des équations de l'hydrodynamique magnétique. Les systèmes de la forme (22.25) et les systèmes d'équations qui en découlent par adjonction des termes dissipatifs visqueux dans les seconds membres ont fait l'objet des ouvrages [31], [74]. K. Friedrichs et P. Lax s'y sont intéressés en démontrant dans l'ouvrage [129] que seuls les systèmes (22.25) admettent une loi de conservation complémentaire.

En utilisant la forme (22.25) on a su traiter plusieurs exemples intéressants élucidant dans une certaine mesure le problème de l'unicité de la solution généralisée. Nous renvoyons le lecteur désireux d'en prendre connaissance aux ouvrages [31], [21], [49], [50].

§ 23. Les maillages flottants et les méthodes les plus simples permettant de les construire

Discrétisation du problème et schéma général du calcul. Le maillage le plus simple avec frontières se mouvant suivant les rayons immobiles. Disposition des nœuds du maillage le long des rayons. Calcul du maillage dans le domaine à frontières curvilignes par formules d'interpolation.

La technique des différences finies dont nous avons fait l'étude au chapitre précédent en application aux problèmes hyperboliques quasi linéaires à deux variables permet une généralisation naturelle au cas d'un grand nombre de variables. Envisageons tout d'abord les problèmes instationnaires de la dynamique des gaz à deux variables spatiales (appelons-les pour abréger problèmes « bidimensionnels »). Il s'agira en premier lieu des écoulements indépendants de la coordonnée z et ne dépendant que des coordonnées cartésiennes x, y et du temps t (écoulements « plans ») ou des écoulements à symétrie axiale indépendants de la variable angulaire φ.

Le calcul d'un tel problème de la dynamique des gaz s'effectue dans un certain domaine dans le plan des variables x, y ou x, r sur la frontière duquel sont données telles ou telles conditions aux limites. Nous l'appellerons domaine de calcul. Pour réaliser la technique des différences il faut substituer aux inconnues ρ, u, v, p, fonctions des arguments x, y, t, un ensemble de nombres discret. Dans le cas considéré on le fait de la façon suivante. Le domaine de calcul est « découpé » en un nombre fini de petits sous-domaines dits *mailles du maillage* qui ne se superposent pas et remplissent tout le domaine de calcul sans laisser aucun interstice. Nous avons déjà pris connaissance de l'exemple le plus simple, celui du quadrillage sur le domaine représentant un rectangle lorsque nous envisagions au § 7 les équations de l'acoustique à deux variables spatiales.

La forme d'une maille de réseau peut en général être assez arbitraire. On obtient les formules de calcul les plus simples dans le cas du quadrillage orienté suivant les axes de coordonnées. C'est ce qui explique leur usage très répandu. Par ailleurs, les plus grandes difficultés apparaissent lors du calcul dans un domaine aux frontières curvilignes. Cela a suscité des techniques mettant en œuvre des réseaux ayant comme mailles des triangles, des quadrilatères, des hexagones, etc. L'algorithme de découpage du domaine de calcul en mailles ayant ces formes, l'arrangement de celles-ci afin de stocker l'information associée dans la mémoire d'un ordinateur et la description de l'interaction au cours du calcul représentent par eux-mêmes un problème intéressant à part.

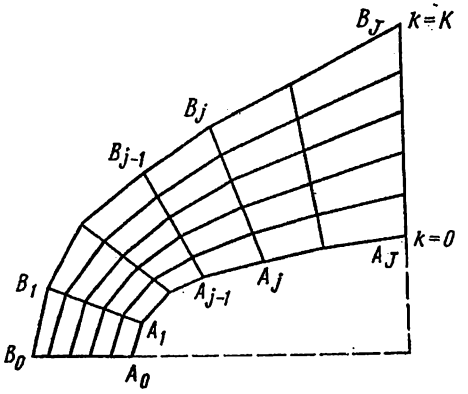


Fig. 23.1

La voie que nous adoptons consiste à rechercher la structure du maillage la plus simple du point de vue de l'arrangement des mailles. A savoir, le domaine de calcul est découpé par deux familles de courbes en mailles quadrangles de façon à créer une construction ressemblant à un maillage rectangle courbe (ou plutôt parallélogrammatique) (fig. 23.1). Cette approche rend la numérotation des mailles très simple (semblable à celle des éléments matriciels suivant les lignes et colonnes), l'essentiel du problème étant alors le calcul des coordonnées des nœuds de ce réseau. Cela fera plus bas l'objet d'une étude détaillée.

A l'intérieur de chaque maille du réseau les fonctions ρ, u, v, p sont remplacées par certaines constantes moyennes. L'ensemble de ces valeurs dans toutes les mailles du réseau est dit configuration du problème au temps t. Nous arrivons à discrétiser le temps tout comme dans le cas unidimensionnel en passant de la configuration du problème au temps $t = t_0$ à la configuration au temps $t = t_0 + \tau$ en appelant ce passage calcul d'un pas en temps. Après cela le calcul est repris suivant le même algorithme (en règle générale) et on répète l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne l'image de l'écoulement sur l'intervalle de temps qui nous intéresse.

L'un des avantages indéniables de la technique présentée est la possibilité d'utiliser les maillages flottants permettant de joindre aux avantages du calcul en coordonnées eulériennes quelques avantages de la description lagrangienne.

S'il est possible d'effectuer le calcul dans un domaine dont les

frontières incluent des lignes mobiles, on peut choisir pour ces lignes par exemple les ondes de choc, les discontinuités de contact, des lignes sur lesquelles est donnée la pression comme condition aux limites, etc. La loi de leur mouvement peut être connue au préalable ou déterminée par le calcul lui-même. Le réseau aux différences utilisé pour ce calcul ne reste pas immobile mais varie d'un pas en temps à l'autre en suivant la position variable des frontières du domaine de calcul. En cas d'utilisation du maillage flottant le calcul d'un pas en temps peut être conventionnellement décomposé en trois étapes. La première étape vise le calcul du mouvement du contour de la frontière du domaine (plus précisément de ses parties mobiles) sur l'intervalle de temps t_0, $t_0 + \tau$. Lors de la seconde étape on détermine la position des nœuds du maillage au temps $t_0 + \tau$ conforme à la nouvelle position des frontières du domaine de calcul. Enfin, lors de la troisième étape on refait le calcul des grandeurs gazodynamiques dans toutes les mailles du nouveau réseau au temps $t_0 + \tau$ en s'appuyant sur les lois de conservation aux différences et sur la nouvelle valeur du pas en temps garantissant la stabilité du calcul.

Pour simplifier l'exposé du mode d'application des maillages flottants nous allons tout d'abord considérer le cas où une famille de lignes du maillage représente un système de droites demeurant immobiles au cours du calcul, la mobilité du réseau étant assurée par la seconde famille de lignes (grâce au mouvement des points nodaux sur les frontières du domaine de calcul le long des droites susmentionnées).

Supposons, par exemple, que le maillage a l'aspect de la figure 23.1. Admettons que la ligne $A_0A_1 \ldots A_J$ demeure immobile au cours du calcul, qu'elle représente le contour du corps placé dans un flux de gaz supersonique et que la ligne $B_0B_1 \ldots B_J$ figure l'onde de choc mobile séparant le flux homogène incident sur le corps d'un écoulement plus complexe en aval du front de l'onde de choc.

Supposons qu'en donnant les coordonnées des nœuds frontières sur les lignes $A_0A_1 \ldots A_J$ et $B_0B_1 \ldots B_J$ on définisse univoquement la position de tous les autres nœuds du maillage. A cet effet il suffit de donner par exemple une suite monotone croissante de nombres $\{s_k;\ k = 0, 1, \ldots, K\}$ que nous convenons d'appeler, pour abréger, *loi de répartition* des points le long d'un rayon. Elle permet de calculer les coordonnées $\{(x, y)_{j,k}\}$ des nœuds du maillage sur le segment A_jB_j à l'aide des formules simples :

$$\begin{aligned} x_{j,k} &= x_j^{\inf}(1 - s_k) + x_j^{\sup} s_k, \\ y_{j,k} &= y_j^{\inf}(1 - s_k) + y_j^{\sup} s_k, \end{aligned} \tag{23.1}$$

où $(x_j^{\inf}, y_j^{\inf})$ sont les coordonnées du point A_j, $(x_j^{\sup}, y_j^{\sup})$ les coordonnées du point B_j, et l'on suppose que $s_0 = 0$, $s_K = 1$. En

donnant de manière convenable la suite $\{s_k\}$ on arrive à répartir les nœuds de façon uniforme ou à les concentrer dans les endroits intéressants du point de vue du problème concret.

En reliant les nœuds du maillage voisins en indice j (l'indice k étant fixé) par des segments de droite on obtient un ensemble de lignes brisées dites plus brièvement lignes du maillage de la première famille.

De manière analogue, en reliant les nœuds du maillage voisins, l'indice j étant fixe, on obtient les lignes de la seconde famille. Elles découpent le domaine de calcul en JK mailles dont chacune représente un quadrilatère ayant des frontières rectilignes. Ainsi le maillage aux différences nécessaire est construit.

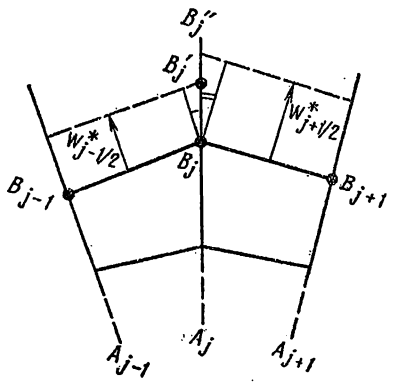


Fig. 23.2

Pour donner le mouvement du maillage il suffit de donner la loi de propagation de l'onde de choc $B_0B_1 \ldots B_J$. Pour ce faire on procède de la façon suivante. Sur chacun des segments de la ligne brisée $B_{j-1}B_j$ on considère le problème de la décomposition de discontinuité entre la maille adjacente à l'onde de choc de « l'intérieur » du domaine de calcul et le flux uniforme « extérieur ». On le résout à l'aide de l'algorithme décrit au § 13, le rôle de la vitesse u étant joué par les composantes des vecteurs vitesses, normales au segment $B_{j-1}B_j$, dans la maille et dans le flux uniforme. Le calcul fournira deux ondes et une discontinuité de contact. Entre les deux ondes choisissons celle qui se propage à l'encontre du flux incident. Nous voulons que la vitesse du mouvement du segment de la ligne brisée $B_{j-1}B_j$ soit égale à la vitesse de cette onde que nous désignons par $W^*_{j-1/2}$. Le déplacement du segment $B_{j-1}B_j$ dans la direction de la normale à une vitesse $W^*_{j-1/2}$ amènerait une discordance dans la position du nœud B_j à cause de la différence entre les grandeurs $W^*_{j-1/2}$ et $W^*_{j+1/2}$ (fig. 23.2). C'est pourquoi on va interpoler la vitesse du mouvement du point B_j le long de la droite A_jB_j suivant les vitesses auxquelles se déplacent le long de cette droite des ondes choisies sur les segments $B_{j-1}B_j$ et B_jB_{j+1}, parvenant ainsi au résultat désiré de façon approchée. Les formules s'y rapportant seront écrites au paragraphe suivant. En calculant les vitesses des points B_j nous définissons complètement le mouvement de la frontière $B_0B_1 \ldots B_J$. Dans l'exemple proposé (avec frontière immobile $A_0A_1 \ldots A_J$) on a de ce fait aussi défini le mouvement de tous les nœuds du réseau.

Certes, le système rigide de rayons immobiles restreint considérablement l'étendue des problèmes auxquels on pourrait appliquer la technique décrite. Dans le cas le plus général les quatres frontières du domaine de calcul peuvent être mobiles (pour mieux les distinguer appelons-les frontière gauche, droite, inférieure, supérieure). Pour chacun des maillons des lignes brisées formant ces frontières on peut calculer la vitesse du mouvement suivant la normale en partant des conditions aux limites concrètes. On a vu au § 15 qu'en application aux conditions aux limites pour les problèmes unidimensionnels de la dynamique des gaz le problème de la décomposition de discontinuité se montre un excellent outil.

Les vitesses obtenues pour les maillons des lignes brisées doivent servir de base au calcul des vitesses du mouvement des points nodaux de la frontière. Etant donné que les frontières sont plus libres, car il n'y a pas de système rigide de rayons immobiles, il faut envisager cette question avec une attention particulière. Nous y reviendrons au § 31 consacré à la description de certains algorithmes possibles du mouvement des nœuds du réseau sur les frontières.

Pour l'instant on va décrire un autre algorithme de calcul des coordonnées des nœuds « intérieurs » du réseau dans l'hypothèse que la position de tous les nœuds du réseau sur les frontières du domaine de calcul est déjà calculée. Soient donc quatre suites:

$$\begin{aligned}
&\{(x, y)_j^{\text{inf}};\ j=0, 1, \ldots, J\} \quad \text{pour la frontière inférieure } (k=0),\\
&\{(x, y)_j^{\text{sup}};\ j=0, 1, \ldots, J\} \quad \text{pour la frontière supérieure } (k=K),\\
&\{(x, y)_k^{\text{gauche}};\ k=0, 1, \ldots, K\} \text{ pour la frontière gauche } (j=0),\\
&\{(x, y)_k^{\text{droit}};\ k=0, 1, \ldots, K\} \text{ pour la frontière droite } (j=J).
\end{aligned} \tag{23.2}$$

Naturellement, les points extrêmes de ces suites donnant les positions des quatre « sommets » du domaine coïncident:

$$(x, y)_0^{\text{inf}} = (x, y)_0^{\text{gauche}}, \quad (x, y)_J^{\text{inf}} = (x, y)_0^{\text{droit}},$$
$$(x, y)_K^{\text{droit}} = (x, y)_J^{\text{sup}}, \quad (x, y)_K^{\text{gauche}} = (x, y)_0^{\text{sup}}.$$

La répartition des points sur le contour du domaine de calcul est effectuée à l'instant initial par l'opérateur selon les caractéristiques concrètes du problème et peut être choisie très irrégulière et non homogène (le fait que le schéma aux différences décrit permet cette possibilité doit aussi être envisagé comme un de ses avantages indéniables). Au cours du calcul la loi de répartition des nœuds du réseau le long des frontières qu'on a choisie initialement peut soit se conserver, soit se modifier au besoin.

La technologie peut être la suivante. D'après la suite $\{(x, y)_n;\ n = 1, 0, \ldots, N\}$ donnant les nœuds du maillage sur la frontière

on calcule une suite auxiliaire $\{s_n\}$ qui fournit une répartition approchée des nœuds le long d'un arc. Les formules de calcul sont ainsi :

$$\bar{s}_0 = 0, \quad \bar{s}_n = \bar{s}_{n-1} + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} \tag{23.3}$$

pour les valeurs de l'indice $n = 1, \ldots, N$.

Il est commode pour la suite de normer les valeurs obtenues : $s_n = \bar{s}_n / \bar{s}_N$. Ce calcul est conduit pour les quatre frontières. Les quatre suites obtenues

$$\{s_j^{\text{inf}};\ j = 0, 1, \ldots, J\}, \quad \{s_k^{\text{gauche}};\ k = 0, 1, \ldots, K\},$$

$$\{s_j^{\text{sup}};\ j = 0, 1, \ldots, J\}, \quad \{s_k^{\text{droit}};\ k = 0, 1, \ldots, K\},$$

dites, par la suite, *lois de répartition* des nœuds du maillage le long des frontières, seront utilisées ultérieurement dans les algorithmes déterminant le mouvement des nœuds du maillage sur les frontières.

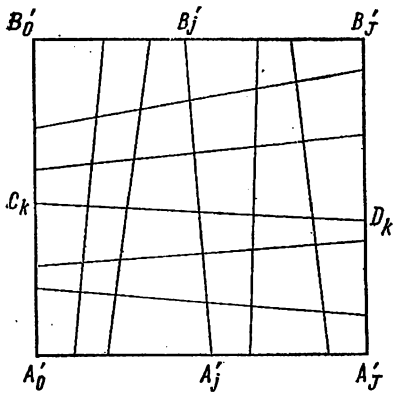


Fig. 23.3

Pour l'instant occupons-nous du calcul des coordonnées

$$\{(x, y)_{j,k};\ j = 1, \ldots, J-1;\ k = 1, \ldots, K-1\}$$

des nœuds intérieurs du maillage. Servons-nous de l'interpolation en joignant par des segments de droite les points de même numéro sur les deux frontières opposées. Admettons que celles-ci sont les frontières supérieure et inférieure. La loi de répartition des nœuds le long des deux familles de lignes du réseau intérieures au domaine est donnée par l'intermédiaire des quantités $(\xi, \eta)_{j,k}$ qui sont les coordonnées des points d'intersection pour les segments joignant dans un carré «paramétrique» $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ les points homologues des côtés opposés (fig. 23.3), points distribués conformément aux lois calculées $\{s_j^{\text{inf}}\}$, $\{s_j^{\text{sup}}\}$, $\{s_k^{\text{gauche}}\}$, $\{s_k^{\text{droit}}\}$. Les quantités $(\xi, \eta)_{j,k}$ sont déterminées à l'aide des formules

$$\xi_{j,k} = \frac{s_j^{\text{inf}} + (s_j^{\text{sup}} - s_j^{\text{inf}})\, s_k^{\text{gauche}}}{1 - (s_j^{\text{sup}} - s_j^{\text{inf}})(s_k^{\text{droit}} - s_k^{\text{gauche}})},$$

$$\eta_{j,k} = \frac{s_k^{\text{gauche}} + (s_k^{\text{droit}} - s_k^{\text{gauche}})\, s_j^{\text{inf}}}{1 - (s_j^{\text{sup}} - s_j^{\text{inf}})(s_k^{\text{droit}} - s_k^{\text{gauche}})}. \tag{23.4}$$

L'interpolation des coordonnées x, y entre les frontières inférieure et supérieure se fait d'après les formules

$$\begin{aligned} x_{j,k} &= x_j^{\text{inf}}(1-\eta_{j,k}) + x_j^{\text{sup}}\eta_{j,k}, \\ y_{j,k} &= y_j^{\text{inf}}(1-\eta_{j,k}) + y_j^{\text{sup}}\eta_{j,k}. \end{aligned} \tag{23.5}$$

Le calcul du réseau s'arrête là si les frontières gauche et droite du domaine représentent des segments de droites. Au cas général, lorsqu'elles ne sont pas droites, les formules (23.5) sont à corriger. Comme corrections, on peut prendre, par exemple, les résultats de l'interpolation suivant l'indice j des vecteurs de correction pour les frontières gauche et droite joignant les véritables points de ces frontières avec les points correspondants calculés d'après les formules (23.5), qui sont situés sur les segments entre les points anguleux du domaine de calcul (fig. 23.4). Cela conduit aux formules de calcul de $(x, y)_{j,k}$ suivantes:

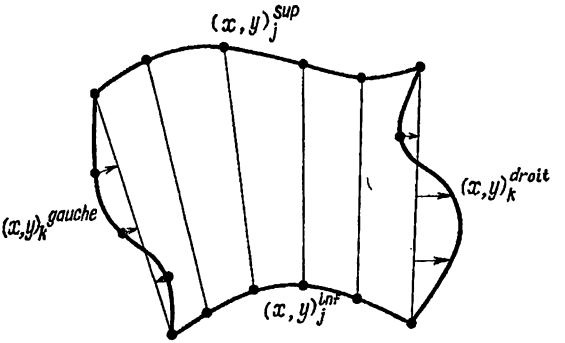


Fig. 23.4

$$\begin{aligned} x_{j,k} &= x_j^{\text{inf}}(1-\eta_{j,k}) + x_j^{\text{sup}}\eta_{j,k} + \xi_{j,k}[x_k^{\text{droit}} - \\ &\quad - x_J^{\text{inf}}(1-s_k^{\text{droit}}) - x_J^{\text{sup}}s_k^{\text{droit}}] + \\ &\quad + (1-\xi_{j,k})[x_k^{\text{gauche}} + x_0^{\text{inf}}(1-s_k^{\text{gauche}}) - x_0^{\text{sup}}s_k^{\text{gauche}}], \\ y_{j,k} &= y_j^{\text{inf}}(1-\eta_{j,k}) + y_j^{\text{sup}}\eta_{j,k} + \\ &\quad + \xi_{j,k}[y_k^{\text{droit}} - y_J^{\text{inf}}(1-s_k^{\text{droit}}) - y_J^{\text{sup}}s_k^{\text{droit}}] + \\ &\quad + (1-\xi_{j,k})[y_k^{\text{gauche}} + y_0^{\text{inf}}(1-s_k^{\text{gauche}}) + y_0^{\text{sup}}s_k^{\text{gauche}}]. \end{aligned} \tag{23.6}$$

Pour le procédé d'interpolation décrit les directions entre les frontières inférieure-supérieure et gauche-droite n'étaient pas équivalentes. Il est intéressant de noter qu'en choisissant comme direction de la première interpolation la direction entre les frontières gauche-droite les corrections étant introduites sur les frontières inférieure-supérieure, alors, dans le cas de lois de répartition identiques sur

les couples opposés des frontières, on obtient des résultats identiques à ceux décrits ci-dessus.

Pour une vaste classe de domaines le maillage aux différences construit selon les formules d'interpolation décrites se montre valable dans les calculs numériques. Mais il arrive que la déformation des frontières du domaine de calcul lors du calcul d'un problème instationnaire peut rendre inapplicable cet algorithme simple (les mailles comportent des points crunodaux, se plissent, etc.). On devra alors faire appel à des algorithmes assez complexes. On en considérera quelques-uns dans le chapitre suivant.

S'il s'agit d'effectuer le calcul dans un certain domaine géométrique concret, on peut écrire des formules simples pour le calcul des coordonnées des points nodaux ou bien, ayant tracé « à la main » le réseau, on peut le transporter dans la mémoire de l'ordinateur. En considérant les algorithmes de la construction du maillage nous avons en vue une situation plus générale, où à chaque pas on doit refaire le calcul à cause des frontières mobiles dont la déformation est parfois difficile, voire impossible à prévoir.

Dans ce qui suit, en décrivant les schémas aux différences nous supposons qu'à chaque pas de calcul le maillage aux différences est déjà construit selon une méthode quelconque (selon les algorithmes les plus simples décrits dans ce paragraphe, selon les algorithmes plus compliqués qui feront l'objet des §§ 32, 33 ou selon quelque autre).

En conclusion de ce paragraphe faisons quelques remarques sur la construction des maillages pour le calcul des problèmes spatiaux. Parmi ceux-ci il faut tout particulièrement relever la classe considérée comme l'ensemble des « sections bidimensionnelles » associées aux valeurs fixes d'une coordonnée spatiale (celle-ci peut être notamment l'une des coordonnées cartésiennes, la coordonnée angulaire dans les problèmes cylindriques, etc.). En construisant alors dans chacune de ces sections un maillage aux différences par une des méthodes mentionnées plus haut on obtiendra une solution du problème de la construction du maillage pour l'ensemble du problème (elle peut, généralement parlant, ne pas être satisfaisante pour des raisons analogues à celles exposées à propos du cas bidimensionnel). Si le domaine de calcul représente un corps spatial limité par des surfaces curvilignes, il est possible dans nombre de cas de réaliser la construction du maillage à l'aide de formules explicites généralisant les formules d'interpolation (23.6) au cas spatial. Ces formules sont faciles à écrire à l'aide des raisonnements ci-dessus pour le cas plan, mais nous ne le ferons pas étant donné la longueur des opérations. Quant aux algorithmes plus généraux de construction des réseaux spatiaux il sera montré aux §§ 32, 33 qu'ils sont encore assez compliqués au niveau « bidimensionnel » et constituent pour le cas spatial un problème intéressant qui attend d'être résolu.

§ 24. Formules de calcul d'un schéma pour les problèmes bidimensionnels instationnaires

Lois de conservation aux différences pour un maillage quelconque. Calcul des flux à travers les faces latérales d'une maille. Procédure de calcul sur les frontières extérieures du domaine. Mouvement des frontières extérieures. Modifications dans le schéma pour les problèmes de révolution.

Soit un écoulement « plan » indépendant de la coordonnée z et qui dépend uniquement des coordonnées cartésiennes x, y et du temps t. Les équations s'y rapportant représentent un cas particulier des équations générales (22.16) ou, sous forme vectorielle, de (22.17) où il faut poser $w \equiv 0$. Cela signifie qu'on peut y barrer toutes les dérivées par rapport à z et supprimer la quatrième équation qui se transforme en identité triviale. Comme ces équations feront l'objet de notre étude il semble indiqué de les écrire :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \tag{24.1}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix}. \tag{24.2}$$

Les notations y sont les mêmes qu'auparavant. Rappelons seulement que $e = \rho\left(\varepsilon + \frac{u^2+v^2}{2}\right)$ est l'énergie totale de l'unité de volume, $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ l'énergie interne par unité de masse, donnée par l'équation d'état (12.6) ou (12.8).

Le schéma général du calcul d'un pas, i.e. du passage de la configuration du problème au temps t_0 à la configuration au temps $t_0 + \tau$, est décrit au paragraphe précédent. Par la configuration au temps t_0 on entend l'ensemble de valeurs de la couche « inférieure »

$$\{(\rho, u, v, p)_{j-1/2,\, k-1/2};\ j = 1, \ldots, J;\ k = 1, \ldots, K\},$$

qui représentent les valeurs de la densité, des composantes de la vitesse et de la pression pour toutes les mailles du maillage qui découpent le domaine de calcul. Les valeurs analogues pour le temps $t_0 + \tau$ (couche « supérieure ») seront notées

$$\{(\rho, u, v, p)^{j-1/2,\, k-1/2}\}.$$

Nous allons aborder la description des formules de calcul par la troisième étape (correction) en supposant que les frontières du domaine de calcul sont déplacées dans une nouvelle position et qu'en plus du maillage $\{(x, y)_{j,k}\}$ à la couche « inférieure » le réseau $\{(x, y)^{j,k}\}$ à la couche « supérieure » est déjà calculé suivant l'un des algorithmes indiqués au paragraphe précédent.

On effectue la correction en s'appuyant sur les lois de conservation intégrales qui dans le cas des équations (24.1) envisagé ici revêtent la forme

$$\oint\!\!\!\oint \sigma\, dx\, dy + a\, dy\, dt + b\, dt\, dx = 0. \qquad (24.3)$$

L'on suppose que l'intégration peut être étendue à toute surface fermée, sphère homéomorphe dans l'espace tridimensionnel x, y, t. Les intégrales de la formule (24.3) sont considérées comme les intégrales de surface de la seconde espèce, i.e. celles qu'on prend suivant une surface orientée.

Appliquons (24.3) pendant l'intervalle de temps t_0, $t_0 + \tau$ à une maille isolée de numéro $(j - 1/2, k - 1/2)$, i.e. à la surface du « corps » représenté sur la figure 24.1. Sa base inférieure $1'2'3'4'$ est une maille du maillage du plan $t = t_0$ dont les sommets se trouvent aux points $(x, y)_{j-1, k-1}$, $(x, y)_{j, k-1}$, $(x, y)_{j, k}$, $(x, y)_{j-1, k}$. La base supérieure $1''2''3''4''$ est une maille du maillage du plan $t = t_0 + \tau$ dont les sommets se trouvent aux points $(x, y)^{j-1, k-1}$, $(x, y)^{j, k-1}$, $(x, y)^{j, k}$, $(x, y)^{j-1, k}$. En supposant que pendant le pas les sommets se déplacent uniformément, joignons les points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ avec les points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ par des segments de droite. Comme faces latérales, on imagine certaines surfaces étendues sur les « cadres » correspondants des quatre segments dans l'espace x, y, t (généralement parlant, les faces latérales ne sont pas planes, le plan étant défini par trois points).

Supposons que sur les faces latérales les grandeurs gazodynamiques demeurent égales pendant l'intervalle de temps t_0, $t_0 + \tau$, à certaines valeurs constantes (« grandes » valeurs): $(R, U, V, P)_{j, k-1/2}$ sur la face aux sommets $2'$, $3'$, $3''$, $2''$, $(R, U, V, P)_{j-1/2, k}$ sur la face aux sommets $3'$, $4'$, $4''$, $3''$, etc. Cela implique que les grandeurs vectorielles σ, a, b sur les faces latérales seront égales aux valeurs constantes correspondantes tout comme le vecteur σ qui est constant sur les bases inférieure et supérieure.

En intégrant (24.3) sur la surface du corps représenté sur la figure 24.1 on obtient un résultat se présentant sous la forme suivante:

$$\sigma^{j-1/2, k-1/2} \Omega^{j-1/2, k-1/2} = \sigma_{j-1/2, k-1/2} \Omega_{j-1/2, k-1/2} - \\ - Q_{j, k-1/2} - Q_{j-1, k-1/2} - Q_{j-1/2, k} - Q_{j-1/2, k-2}. \qquad (24.4)$$

Dans cette expression vectorielle les quantités $\Omega_{j-1/2, k-1/2}$ et $\Omega^{j-1/2, k-1/2}$ sont égales aux aires des bases inférieure et supérieure. Chacune des quatre grandeurs vectorielles $Q_{j, k-1/2}$, $Q_{j-1, k-1/2}$, $Q_{j-1/2, k}$, $Q_{j-1/2, k-1}$ représente les flux de masse, d'impulsion et d'énergie à travers la face latérale correspondante dans la direction du vecteur de la normale extérieure. Envisageons-les sur l'exemple d'une des faces $(j, k - 1/2)$ par exemple.

La grandeur $Q_{j,\,k-1/2}$ a la structure suivante:

$$Q_{j,\,k-1/2} = \sigma_{j,\,k-1/2}\,\Omega_{j,\,k-1/2} + \\ + a_{j,\,k-1/2}\,\Phi_{j,\,k-1/2} + b_{j,\,k-1/2}\,\Psi_{j,\,k-1/2}, \tag{24.5}$$

$$\Omega_{j,\,k-1/2} = \int\limits_{j,\,k-1/2} dx\,dy, \\ \Phi_{j,\,k-1/2} = \int\limits_{j,\,k-1/2} dy\,dt, \tag{24.6} \\ \Psi_{j,\,k-1/2} = \int\limits_{j,\,k-1/2} dt\,dx,$$

où l'on suppose que l'intégration s'effectue suivant la surface hydrothétique susmentionnée, étendue sur le cadre des quatre segments joignant les points voisins $2'$, $3'$, $3''$, $2''$. Pour procéder de façon efficace,

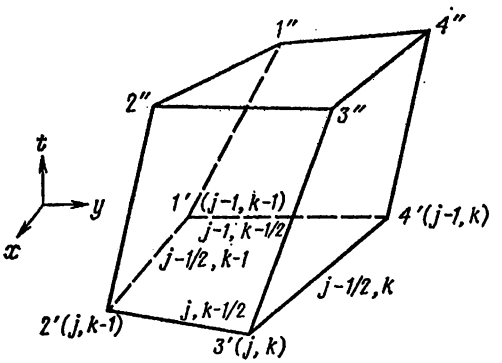


Fig. 24.1

remplaçons cette surface par un quadrilatère plan engendré par le déplacement parallèle du segment joignant les points *2* et *3* au milieu des arêtes $2'2''$ et $3'3''$ à la vitesse $W^*_{j,k-1/2}$ que nous choisissons telle que l'aire balayée par ce segment pendant le temps de t_0 à $t_0 + \tau$ coïncide avec la quantité $\Omega_{j,\,k-1/2}$ égale à l'aire de la projection de la face $2'3'3''2''$ sur le plan x, y.

Pour simplifier l'analyse des formules de calcul introduisons des notations abrégées provisoires pour les coordonnées des sommets de la base inférieure:

$$(x'_1, y'_1) = (x', y')_{j-1,\,k-1}, \quad (x'_3, y'_3) = (x', y')_{j,\,k}, \\ (x'_2, y'_2) = (x', y')_{j,\,k-1}, \quad (x'_4, y'_4) = (x', y')_{j-1,\,k} \tag{24.7}$$

et des notations analogues

$$(x_1'', y_1'') = (x'', y'')_{j-1, k-1}, \quad (x_3'', y_3'') = (x'', y'')_{j, k},$$
$$(x_2'', y_2'') = (x'', y'')_{j, k-1}, \quad (x_4'', y_4'') = (x'', y'')_{j-1, k}$$

pour les coordonnées des sommets de la base supérieure (fig. 24.1). Les valeurs se rapportant à la face $(j, k - 1/2)$ seront affectées de l'indice 23.

L'aire Ω du quadrilatère de sommets aux points (x_l, y_l), $l = 1, 2, 3, 4$ numérotés dans le sens antihoraire du parcours dans le plan x,

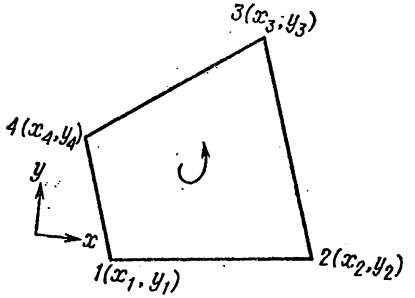


Fig. 24.2

y (fig. 24.2) se calcule par la formule

$$\Omega = \Omega(x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ x_4, y_4) =$$
$$= \frac{1}{2}[(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)]. \qquad (24.8)$$

Les aires des bases $\Omega_{j-1/2, k-1/2}$ et $\Omega^{j-1/2, k-1/2}$ se calculent à l'aide de la formule (24.8) de la façon suivante:

$$\Omega_{j-1/2, k-1/2} = \Omega(x_1', y_1';\ x_2', y_2';\ x_3', y_3';\ x_4', y_4'),$$
$$\Omega^{j-1/2, k-1/2} = \Omega(x_1'', y_1'';\ x_2'', y_2'';\ x_3'', y_3'';\ x_4'', y_4'').$$

La quantité $\Omega_{j, k-1/2}$ se calcule de la même manière:

$$\Omega_{j, k-1/2} = \Omega_{23} = \Omega(x_2', y_2';\ x_3', y_3';\ x_3'', y_3'';\ x_2'', y_2'').$$

Pour calculer les quantités $\Phi_{j, k-1/2}$, $\Psi_{j, k-1/2}$ introduisons les points *2* et *3* au milieu des arêtes $2'2''$ et $3'3''$. Leurs coordonnées sont respectivement

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_2' + x_2''), \quad y_2 = \frac{1}{2}(y_2' + y_2''),$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(x_3' + x_3''), \quad y_3 = \frac{1}{2}(y_3' + y_3'').$$

Conformément à ce qui a été dit plus haut au sujet du remplacement de la face latérale $(j, k - 1/2)$ par un quadrilatère plan, il vient

$$\Phi_{j,\,k-1/2} = \Phi_{23} = \tau (y_3 - y_2),$$

$$\Psi_{j,\,k-1/2} = \Psi_{23} = -\tau(x_3 - x_2),$$

la vitesse W^*_{23} de cette face étant donnée par l'égalité

$$\tau l_{23} W^*_{23} = \Omega_{23}, \tag{24.9}$$

où l_{23} est la longueur du segment joignant les points *2* et *3*:

$$l_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Ainsi donc, le calcul des flux $Q_{j,\,k-1/2} = Q_{23}$ se fait à l'aide de la formule suivante:

$$Q_{23} = \sigma_{23}\Omega_{23} + \tau (y_3 - y_2)\, a_{23} - \tau (x_3 - x_2)\, b_{23}, \tag{24.10}$$

où a_{23}, b_{23}, σ_{23} définis dans (24.2) se calculent en fonction des « grandes » valeurs $(P, U, V, R)_{23}$.

En introduisant les notations

$$\alpha_{23} = -\frac{y_3 - y_2}{l_{23}}, \quad \beta_{23} = \frac{x_3 - x_2}{l_{23}}$$

pour les coordonnées du vecteur perpendiculaire au segment entre les points *2* et *3* du plan $t = t_0 + \tau/2$ et dirigé vers la normale extérieure à la surface de la maille, on peut conférer à la formule (24.10) pour les flux Q_{23} la forme suivante:

$$Q_{23} = \tau l_{23} (\sigma_{23} W^*_{23} - a_{23}\alpha_{23} - b_{23}\beta_{23}).$$

On peut la récrire sous une forme plus suggestive en utilisant les expressions concrètes (24.2) pour les vecteurs a, b, σ:

$$Q_{23} = \tau l_{23} \begin{bmatrix} R(W^* - N) \\ R(W^* - N)\, U - \alpha P \\ R(W^* - N)\, V - \beta P \\ R(W^* - N)\, E - NP \end{bmatrix}_{23}, \tag{24.11}$$

où $N_{23} = U_{23}\alpha_{23} + V_{23}\beta_{23}$ représente la composante du vecteur vitesse normale à l'arête *23*, W^*_{23} la vitesse de l'arête *23* dans la direction de la normale, E l'énergie totale de l'unité de volume.

Les formules obtenues ont une signification physique bien claire et elles définissent les flux de masse, d'impulsion et d'énergie à travers une surface plane définie par le segment *23* se déplaçant à la vitesse W^*_{23}. D'ailleurs, on aurait pu écrire directement les formules (24.11) en s'appuyant sur des raisonnements physiques, sans avoir recours aux considérations ci-dessus.

Pour terminer la description des formules de calcul pour les flux traversant la face latérale *2'3'3"2"* il faut donner l'algorithme du calcul des « grandes » valeurs $(R, U, V, P)_{23}$. On y parvient à l'aide

d'un problème auxiliaire de décomposition de discontinuité. Prenons deux ensembles de grandeurs gazodynamiques de mailles adjacentes à l'arête *23* et convenons de les appeler gauches et droites par rapport au vecteur de la normale extérieure à la face latérale étudiée :

$$(\rho, u, v, p)_{j-1/2,\,k-1/2} = (\rho, u, v, p)^{\mathrm{I}}_{23},$$

$$(\rho, u, v, p)_{j+1/2,\,k-1/2} = (\rho, u, v, p)^{\mathrm{II}}_{23}.$$

Décomposons les vecteurs vitesses $(u, v)_{j-1/2,\,k-1/2}$ et $(u, v)_{j+1/2,\,k-1/2}$ en composante normale N et composante tangentielle T par rapport à l'arête *23* :

$$N^{\mathrm{I}}_{23} = u^{\mathrm{I}}_{23}\alpha_{23} + v^{\mathrm{I}}_{23}\beta_{23}, \quad N^{\mathrm{II}}_{23} = u^{\mathrm{II}}_{23}\alpha_{23} + v^{\mathrm{II}}_{23}\beta_{23},$$

$$T^{\mathrm{I}}_{23} = u^{\mathrm{I}}_{23}\beta_{23} - v^{\mathrm{I}}_{23}\alpha_{23}, \quad T^{\mathrm{II}}_{23} = u^{\mathrm{II}}_{23}\beta_{23} - v^{\mathrm{II}}_{23}\alpha_{23}.$$

Considérons ensuite le problème de la décomposition de discontinuité traité au § 13, dans lequel on donne comme paramètres $(u_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{I}}, \rho_{\mathrm{I}})$ les quantités $(N^{\mathrm{I}}_{23}, p^{\mathrm{I}}_{23}, \rho^{\mathrm{I}}_{23})$ et comme $(u_{\mathrm{II}}, p_{\mathrm{II}}, \rho_{\mathrm{II}})$ les quantités $(N^{\mathrm{II}}_{23}, p^{\mathrm{II}}_{23}, \rho^{\mathrm{II}}_{23})$ respectivement. Après avoir calculé par l'algorithme du § 13 la configuration correspondante de la solution automodèle et en tenant compte de la vitesse W^*_{23} du mouvement de l'arête *23* nous déterminons, tout comme au § 14 pour le schéma unidimensionnel, dans quel domaine engendré par la décomposition de discontinuité se trouve l'arête *23* pendant le pas en temps considéré. Notons respectivement par N_{23}, P_{23}, R_{23} les valeurs U, P, R attachées au domaine voulu. Adjoignons-y comme quantité T_{23} l'une des valeurs T^{I}_{23} ou T^{II}_{23} en nous inspirant de la comparaison de la vitesse de l'arête W^*_{23} avec celle de la discontinuité de contact U^* obtenue par résolution du problème de la décomposition de discontinuité :

$$T_{23} = \begin{cases} T^{\mathrm{I}}_{23} & \text{si} \quad W^*_{23} < U^*, \\ T^{\mathrm{II}}_{23} & \text{si} \quad W^*_{23} > U^*. \end{cases} \tag{24.12}$$

En considérant les valeurs obtenues N_{23} et T_{23} comme les composantes normale et tangentielle du vecteur vitesse par rapport à l'arête *23*, reconstituons-en les composantes cartésiennes $(U, V)_{23}$:

$$\begin{aligned} U_{23} &= N_{23}\alpha_{23} + T_{23}\beta_{23}, \\ V_{23} &= N_{23}\beta_{23} - T_{23}\alpha_{23}. \end{aligned} \tag{24.13}$$

Les valeurs $(R, U, V, P)_{23}$ ainsi obtenues sont alors utilisées en tant que « grandes » valeurs lors du calcul des flux Q_{23} dans la formule (24.11).

Par analogie avec ce qui a été dit au § 7 sur la construction du schéma aux différences pour les équations de l'acoustique à deux variables spatiales nous n'allons pas affirmer que sur l'arête *23* les valeurs constantes coïncidant avec les « grandes » valeurs calculées se maintiennent au cours du temps de t_0 à $t_0 + \tau$. Il n'en est pas

ainsi ne serait-ce qu'à cause de la présence des points anguleux de la maille au voisinage desquels l'écoulement a un comportement fort complexe. Toutefois, on peut vérifier que l'algorithme décrit permet finalement de construire un schéma aux différences assurant le premier ordre d'approximation du système d'équations différentielles de départ sur les solutions lisses. Pour cette raison, si l'on veut, on peut s'inspirer de tout ce qui a été dit lors de l'élaboration d'un schéma aux différences.

Ainsi, nous avons donné une description complète du calcul des flux $Q_{23} = Q_{j,\,k-1/2}$ pour la face latérale $(j,\ k - 1/2)$. Pour terminer l'étape de la correction il ne nous reste qu'à montrer le mode de calcul des trois autres termes de la formule (24.4) représentant les flux à travers les faces latérales $(j - 1,\ k - 1/2)$, $(j - 1/2,\ k)$, $(j - 1/2,\ k - 1)$. Ce calcul est évidemment analogue à celui décrit pour la face $(j,\ k - 1/2)$ que nous avons dotée de l'indice abrégé *23*. Qui plus est, toutes les formules de calcul pour les autres faces coïncident complètement avec celles que l'on a décrites si l'on y remplace l'indice *23*: pour la face $(j - 1,\ k - 1/2)$ par l'indice *41*, pour la face $(j - 1/2,\ k)$ par l'indice *34*, pour la face $(j - 1/2,\ k - 1)$ par l'indice *12* (voir fig. 24.1), et si l'on applique au calcul des valeurs conformes aux désignations introduites (24.7). Notons que l'ordre des numéros dans l'indice associé à la face est essentiel car nous opérons avec des surfaces orientées.

Occupons-nous maintenant du calcul pour les faces des mailles adjacentes aux frontières extérieures du domaine de calcul. Soulignons avant tout que tout comme dans le cas unidimensionnel nous avons besoin en réalité non pas des « grandes » valeurs pour ces faces mais des flux de masse, d'impulsion et d'énergie définis par les formules analogues à (24.11). Pour les calculer on a besoin des conditions aux limites. Habituellement, les frontières dans les problèmes à deux variables spatiales appartiennent à l'un des types physiques que nous avons déjà considérés au § 15 pour le cas unidimensionnel. Il faut seulement tenir compte de ce que le vecteur vitesse a maintenant deux composantes. En le décomposant en composantes normale et tangentielle par rapport à l'arête de la maille selon le mode décrit pour les faces internes, on procède de la même façon que dans le cas du problème unidimensionnel. Si besoin est, on ajoute ensuite aux résultats obtenus la composante tangentielle de la vitesse déterminée selon une règle analogue à (24.12). Cela doit suffire pour calculer toutes les grandeurs nécessaires sur le segment de frontière envisagé qui joint deux nœuds voisins du maillage.

En particulier, on détermine ainsi la vitesse du mouvement de ce segment dans la direction qui lui est perpendiculaire. Compte tenu de ces vitesses on place la frontière dans une nouvelle position correspondant au temps $t = t_0 + \tau$. Nous allons maintenant décrire les formules de calcul nécessaires pour le cas le plus simple où le

déplacement des nœuds frontières s'opère uniquement le long des rayons dont les directions restent invariables tout au long du calcul.

Pour fixer les idées, soit une frontière supérieure dont la position au temps $t = t_0$ est donnée par la suite $\{(x_j^{\sup}, y_j^{\sup}); j = 0, 1, \ldots, J\}$. Les directions (ξ_j, η_j) des rayons le long desquels se déplaceront ses nœuds se déterminent, si l'on dispose de la suite $\{(x_j^{\inf}, y_j^{\inf}); j = 0, 1, \ldots, J\}$ donnant la frontière inférieure, par les formules

$$\xi_j = \frac{x_j^{\sup} - x_j^{\inf}}{L_j}, \quad \eta_j = \frac{y_j^{\sup} - y_j^{\inf}}{L_j}, \qquad L_j = \sqrt{(x_j^{\sup} - x_j^{\inf})^2 + (y_j^{\sup} - y_j^{\inf})^2}. \tag{24.14}$$

Soient $\{W^*_{j-1/2}; j = 1, \ldots, J\}$ les vitesses normales pour les intervalles de la frontière supérieure, calculées à l'aide des conditions aux limites (ou données dans celles-ci). On a dit au paragraphe précédent que la vitesse du mouvement d'un nœud $(x_j^{\sup}, y_j^{\sup})$ le long de son rayon (ξ_j, η_j) se détermine à l'aide des quantités $W^*_{j-1/2}$, $W^*_{j+1/2}$. Il faut ajouter à ceci que l'extrémité B_j du segment $B_{j-1}B_j$ (voir fig. 23.2) glisse sur le rayon à la vitesse W'_j:

$$W'_j = \frac{W^*_{j-1/2}}{\cos \omega'_j}, \qquad \cos \omega'_j = -\xi_j \frac{y_j^{\sup} - y_{j-1}^{\sup}}{s_{j-1/2}} + \eta_j \frac{x_j^{\sup} - x_{j-1}^{\sup}}{s_{j-1/2}}, \qquad s_{j-1/2} = \sqrt{(x_j^{\sup} - x_{j-1}^{\sup})^2 + (y_j^{\sup} - y_{j-1}^{\sup})^2}, \tag{24.15}$$

alors que l'extrémité B_j du segment B_jB_{j+1} à la vitesse W''_j:

$$W''_j = \frac{W^*_{j+1/2}}{\cos \omega''_j}, \qquad \cos \omega''_j = -\xi_j \frac{y_{j+1}^{\sup} - y_j^{\sup}}{s_{j+1/2}} + \eta_j \frac{x_{j+1}^{\sup} - x_j^{\sup}}{s_{j+1/2}}, \qquad s_{j+1/2} = \sqrt{(x_{j+1}^{\sup} - x_j^{\sup})^2 + (y_{j+1}^{\sup} - y_j^{\sup})^2}. \tag{24.16}$$

Comme vitesse W_j^* du déplacement du nœud $(x_j^{\sup}, y_j^{\sup})$ le long du rayon nous adoptons le résultat de l'interpolation

$$W_j^* = W'_j \frac{s_{j+1/2}}{s_{j-1/2} + s_{j+1/2}} + W''_j \frac{s_{j-1/2}}{s_{j-1/2} + s_{j+1/2}}. \tag{24.17}$$

La nouvelle position du nœud (x^j, y^j) au temps $t_0 + \tau$ se définit donc par les formules

$$x^j = x_j + \tau W_j^* \xi_j, \quad y^j = y_j + \tau W_j^* \eta_j.$$

Les formules présentées permettent d'effectuer le calcul pour les valeurs $j = 1, \ldots, J-1$. Quant aux valeurs extrêmes $j = 0$ et $j = J$, dans la situation envisagée mettant en jeu les rayons immobiles on peut procéder de la façon suivante : pour $j = 0$ on ne calcule que W_j'' et on pose $W_j^* = W_j''$, alors que pour $j = J$ on pose $W_j^* = W_j'$.

On a traité le mouvement des nœuds du maillage sur les frontières du domaine de calcul pour le cas où seules ses deux frontières opposées sont mobiles. Lorsque les deux familles de lignes sont mobiles, on doit faire appel à des algorithmes plus complexes. Nous les décrirons au § 31. L'un de ces algorithmes est traité dans l'article [37].

Les nouvelles coordonnées des nœuds sur les frontières du domaine de calcul qu'on a obtenues servent de base au calcul des nouvelles coordonnées des nœuds intérieurs du maillage. Dans ce cas on a recours soit aux formules présentées au paragraphe précédent, soit aux algorithmes spéciaux de construction des maillages aux différences, qui font l'objet des §§ 32, 33 du chapitre suivant.

Ainsi s'achève la description d'un schéma aux différences pour le calcul des problèmes instationnaires bidimensionnels de la dynamique des gaz. Notons qu'on peut expliciter (24.4) par rapport à toutes les quantités $(\rho, u, v, p)^{j-1/2,\ k-1/2}$ associées à la couche supérieure. Ainsi le schéma décrit est explicite et on ne peut l'appliquer au calcul qu'avec un pas en temps τ soumis à une certaine restriction assurant la stabilité. Cette question sera traitée dans le paragraphe suivant.

Le lecteur peut trouver trop détaillée la description des formules de calcul dans ce paragraphe. Le but que nous avons poursuivi était de restituer complètement l'algorithme de calcul dont nous nous sommes servis. Cela n'exclut en aucune manière une autre rédaction des différentes formules qui peut s'avérer meilleure dans certaines situations concrètes que celle mise en œuvre ici.

En conclusion, donnons un bref aperçu des modifications à apporter dans l'algorithme présenté lors du calcul des problèmes de révolution de la dynamique des gaz. Si l'algorithme repose sur les équations de la forme (22.22), (22.23), compte tenu de la symétrie axiale

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial r} = -\frac{1}{r} f_0, \qquad f_0 = [\rho v,\ \rho uv,\ \rho v^2,\ (e+p)v]^*, \tag{24.18}$$

alors, en considérant x, r comme des coordonnées cartésiennes dans la section axiale du problème, il est possible d'utiliser toutes les formules de ce paragraphe en y remplaçant la quantité y par r et en entendant par v la composante radiale de la vitesse. La seule différence réside dans la présence de seconds membres dans les équations (24.18). On doit les prendre en considération dans les lois de con-

servation discrètes (24.4) sous forme de termes supplémentaires. On peut procéder à leur calcul, nous l'avons spécifié à plusieures reprises, en utilisant les quantités associées à la couche « inférieure ».

Si l'algorithme de calcul se fonde sur les équations de la forme (22.20), (22.21), il y a lieu d'apporter, outre une modification analogue liée à la présence du second membre (dans la troisième équation), une autre modification concernant le calcul de toutes les quantités Ω (d'indices différents) déterminées auparavant d'après la formule (24.8). Dans le cas qui nous occupe, la quantité Ω n'est plus l'aire de la maille de sommets aux points (x_l, r_l), $l = 1, 2, 3, 4$, mais le volume d'un corps de révolution dont la section axiale représente une telle maille. Il en résulte que la formule (24.8) doit être remplacée par la formule suivante:

$$\Omega = \Omega(x_1, r_1; x_2, r_2; x_3, r_3; x_4, r_4) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\{(r_4 - r_2)[x_3(r_2 + r_4 + r_3) - x_1(r_2 + r_4 + r_1)] -$$

$$- (r_3 - r_1)[x_4(r_1 + r_3 + r_4) - x_2(r_1 + r_3 + r_2)]\}. \quad (24.19)$$

Ce sont là toutes les modifications à apporter en vue de résoudre les problèmes de révolution.

§ 25. Stabilité et choix du pas en temps

Schéma de calcul des problèmes instationnaires bidimensionnels de dynamique des gaz sur un quadrillage. Modèle linéarisé des équations instationnaires de la dynamique des gaz. Critère de stabilité du modèle linéarisé. Son application aux problèmes quasi linéaires de la dynamique des gaz instationnaire bidimensionnelle. Modèles linéarisés pour un problème stationnaire à deux et trois variables. Critères de stabilité des schémas aux différences pour les écoulements stationnaires supersoniques.

Les formules de calcul du paragraphe précédent pour les problèmes instationnaires bidimensionnels de la dynamique des gaz se simplifient considérablement dans le cas d'un quadrillage orienté suivant les axes de coordonnées. Il nous a semblé utile de les écrire pour deux raisons: premièrement, comme il a été indiqué, les quadrillages sont d'un usage fréquent dans les calculs, deuxièmement, notre étude ultérieure de la stabilité du schéma décrit est fondée sur les équations aux différences finies pour un quadrillage et sur les équations linéarisées de la dynamique des gaz.

Supposons donc un réseau identique à celui du § 7 ou § 10, i.e. formé par les familles des droites $x = x_j$ et des droites $y = y_k$, les pas $x_j - x_{j-1} = h_x$ et $y_k - y_{k-1} = h_y$ étant constants. Le quadrillage est supposé immobile. S'il en est ainsi, le schéma du paragraphe précédent pour les équations (24.1), (24.2) peut s'écrire comme

suit :

$$\sigma^{j-1/2,\,k-1/2} = \sigma_{j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{h_x}(A_{j,\,k-1/2} - A_{j-1,\,k-1/2}) - \\ - \frac{\tau}{h_y}(B_{j-1/2,\,k} - B_{j-1/2,\,k-1}), \qquad (25.1)$$

où

$$\sigma = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} RU \\ P + RU^2 \\ RUV \\ (E+P)U \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} RV \\ RUV \\ P + RV^2 \\ (E+P)V \end{bmatrix}.$$

Les grandeurs vectorielles $\sigma_{j-1/2,k-1/2}$ et $\sigma^{j-1/2,\,k-1/2}$ s'expriment au moyen des valeurs des « petites » grandeurs gazodynamiques associées respectivement aux couches inférieure et supérieure, et les grandeurs vectorielles $A_{j,k-1/2}$, $A_{j-1,\,k-1/2}$, $B_{j-1/2,\,k}$, $B_{j-1/2,\,k-1}$ s'expriment au moyen des valeurs des « grandes » quantités respectives. On obtient les « grandes » valeurs $(R,\ U,\ P)_{j,\,k-1/2}$ en résolvant le problème unidimensionnel de décomposition de discontinuité aux données initiales :

$$(\rho,\ u,\ p)_{\mathrm{I}} = (\rho,\ u,\ p)_{j-1/2,\,k-1/2} \quad \text{pour} \quad x < x_j,$$
$$(\rho,\ u,\ p)_{\mathrm{II}} = (\rho,\ u,\ p)_{j+1/2,\,k-1/2} \quad \text{pour} \quad x > x_j.$$

Sa solution automodèle dépendant de la variable $\xi = \frac{x - x_j}{t - t_0}$ peut être calculée à l'aide de l'algorithme décrit au § 13. Pour les quantités $(R,\ U,\ P)_{j,k-1/2}$ on choisit les valeurs constantes que prend cette solution sur la section $x = x_j$. La quantité

$$V_{j,\,k-1/2} = \begin{cases} v_{j-1/2,\,k-1/2} & \text{si} \quad U_{j,\,k-1/2} > 0, \\ v_{j+1/2,\,k-1/2} & \text{si} \quad U_{j,\,k-1/2} < 0. \end{cases}$$

De façon tout à fait analogue les « grandes » valeurs $(R,\ V,\ P)_{j-1/2,k}$ sont définies comme les valeurs constantes que prend sur la section $y = y_k$ la solution automodèle du problème de la décomposition de discontinuité aux données initiales :

$$(\rho,\ u,\ p)_{\mathrm{I}} = (\rho,\ v,\ p)_{j-1/2,\,k-1/2} \quad \text{pour} \quad y < y_k,$$
$$(\rho,\ u,\ p)_{\mathrm{II}} = (\rho,\ v,\ p)_{j-1/2,\,k+1/2} \quad \text{pour} \quad y > y_k,$$

solution dépendant de la variable $\eta = \frac{y - y_k}{t - t_0}$. La quantité

$$U_{j-1/2,\,k} = \begin{cases} u_{j-1/2,\,k-1/2} & \text{si} \quad V_{j-1/2,\,k} > 0, \\ u_{j-1/2,\,k+1/2} & \text{si} \quad V_{j-1/2,\,k} < 0. \end{cases}$$

Cette description succincte définit complètement le schéma aux différences (sans conditions aux limites) pour le calcul des problèmes instationnaires bidimensionnels de la dynamique des gaz sur un quadrillage uniforme.

Par analogie avec le schéma unidimensionnel traité au § 16 nous nous limiterons à l'étude de la stabilité de l'analogue linéarisé du schéma aux différences construit. Comme par la suite nous aurons également à traiter les schémas aux différences tridimensionnels, il nous faut écrire un système d'équations différentielles à coefficients constants, modèle linéarisé pour les équations de la dynamique des gaz dans le cas spatial. Le plus simple est d'utiliser des équations dont la forme est analogue à celle de (22.24) mais qui sont écrites en coordonnées cartésiennes. Le système linéarisé prend alors la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt}+\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\
&\frac{du}{dt}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\\
&\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}=0,\\
&\frac{dw}{dt}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}=0,\\
&\frac{dp}{dt}+\rho_0 c_0^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,
\end{aligned} \tag{25.2}$$

où l'opérateur

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}+v_0\frac{\partial}{\partial y}+w_0\frac{\partial}{\partial z}.$$

Il traduit bien les processus qui ont lieu dans une région où la pression, la densité et les composantes de la vitesse diffèrent suffisamment peu des valeurs constantes p_0, ρ_0, u_0, v_0, w_0. Les fonctions p, ρ, u, v, w de x, y, z, t dans les équations (25.2) représentent de petits écarts par rapport aux constantes p_0, ρ_0, u_0, v_0, w_0 dans l'état non perturbé.

Signalons tout d'abord que de la première et de la dernière équation du système (25.2) il découle que

$$\frac{d}{dt}(p-c_0^2\rho)=0. \tag{25.3}$$

Ceci nous dispense de considérer la quantité ρ et nous autorise à analyser par la suite seulement le système de quatre équations pour les quantités u, v, w, p. Si l'on introduit le vecteur colonne ψ des fonctions inconnues:

$$\psi=\left\{u,\ v,\ w,\ \frac{p}{\rho_0 c_0}\right\}^*,$$

ce système peut se mettre sous la forme

$$I\frac{\partial\psi}{\partial t}+B\frac{\partial\psi}{\partial x}+C\frac{\partial\psi}{\partial y}+D\frac{\partial\psi}{\partial z}=0, \tag{25.4}$$

où I est une matrice unité et les trois autres sont

$$B=\begin{Vmatrix} u_0 & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0 \end{Vmatrix}, \quad C=\begin{Vmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & c_0 \\ 0 & 0 & v_0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & v_0 \end{Vmatrix},$$

$$D=\begin{Vmatrix} w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & c_0 \\ 0 & 0 & c_0 & w_0 \end{Vmatrix}. \tag{25.5}$$

On voit donc que le système linéaire d'équations (25.4) est symétrique. Le schéma aux différences associé construit sur les principes exposés aux §§ 9, 10 pour un système symétrique arbitraire d'équations hyperboliques est un modèle du schéma aux différences pour un système d'équations quasi linéaires de la dynamique des gaz. Dans le cas unidimensionnel ce modèle a été étudié en détail au § 16.

Pour formuler les critères de la stabilité d'un schéma aux différences il est nécessaire de trouver les valeurs propres des équations caractéristiques pour les systèmes d'équations « unidimensionnels » correspondant à (25.4). Soit l'un de ces systèmes:

$$I\frac{\partial\psi}{\partial t}+B\frac{\partial\psi}{\partial x}=0.$$

Il est aisé de voir que son équation caractéristique

$$\det\begin{Vmatrix} u_0-\lambda & 0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0-\lambda & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & u_0-\lambda \end{Vmatrix}=0 \tag{25.6}$$

a pour racines $\lambda_1 = u_0 + c_0$, $\lambda_2 = u_0 - c_0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = u_0$. Par conséquent, si le quadrillage aux différences a le pas h_x en variable x, la valeur maximale admissible du pas en temps τ_x est donnée par la formule

$$\tau_x=\frac{h_x}{\max(u_0+c_0,\ c_0-u_0)}, \tag{25.7}$$

i.e. est identique au critère (16.10).

En procédant de la même façon on obtient les restrictions concernant les valeurs des pas τ_y et τ_z en deux autres variables:

$$\tau_y = \frac{h_y}{\max(v_0 + c_0,\ c_0 - v_0)},$$
$$\tau_z = \frac{h_z}{\max(w_0 + c_0,\ c_0 - w_0)}. \tag{25.8}$$

La valeur admissible du pas τ dans le schéma aux différences pour le système d'équations (25.4) est alors définie par la formule (10.35):

$$\tau\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z}\right) \leqslant 1. \tag{25.9}$$

Dans le cas particulier des problèmes instationnaires bidimensionnels aux variables spatiales x et y indépendants de la variable z le système d'équations (25.4)-(25.5) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} + \begin{Vmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{Vmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} = 0, \tag{25.10}$$

la stabilité du schéma aux différences associé sur un quadrillage aux pas h_x et h_y étant assurée pour la restriction imposée au pas τ par la condition

$$\tau\left(\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y}\right) \leqslant 1. \tag{25.11}$$

En passant au pas en temps suivant, le schéma aux différences linéarisé (sans conditions aux limites), — à condition que τ obéisse à cette restriction, — n'augmente pas la norme des fonctions discrètes:

$$\|F\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_y \left[\rho_0 \frac{u^2_{j-1/2,\,k-1/2} + v^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{p^2_{j-1/2,\,k-1/2}}{2\rho_0 c_0^2} + k_0 \left(p_{j-1/2,\,k-1/2} - c_0^2 \rho_{j-1/2,\,k-1/2}\right)^2\right],$$

où $k_0 > 0$ est un coefficient arbitraire, F le vecteur de dimension infinie dont les composantes sont les valeurs dans toutes les mailles du maillage de toutes les grandeurs $\{(\rho, u, v, p)_{j-1/2,\,k-1/2}\}$. On suppose finie la norme F pour les données initiales.

Notons que si on avait adopté comme méthode de démonstration de la stabilité du schéma aux différences celle qu'on a appliquée aux équations de l'acoustique au § 8, on aurait été amené à considérer 16 variantes différentes de schéma provenant des combinaisons de l'une des inégalités

$$u_0 > c_0, \quad 0 < u_0 < c_0, \quad -c_0 < u_0 < 0, \quad u_0 < -c_0$$

avec chacune des inégalités

$$v_0 > c_0, \quad 0 < v_0 < c_0, \quad -c_0 < v_0 < 0, \quad v_0 < -c_0.$$

L'application de la théorie des systèmes symétriques et des schémas aux différences convenablement construits permet immédiatement de parvenir aux résultats donnés plus haut.

Le critère du choix du pas τ assurant la stabilité a été généralisé, au § 10, au cas d'un réseau parallélogrammatique. Il s'est avéré pour les équations de l'acoustique (7.1) qu'il convient alors, dans les formules de calcul des pas « unidimensionnels » τ_x et τ_y, de prendre en tant que h_x et h_y les hauteurs du parallélogramme représentant une maille du maillage. Le système d'équations (25.10) représentant celui de l'acoustique (7.1) à deux variables spatiales écrit en coordonnées mobiles (auquel il se ramène par changement des variables $\bar{x} = x - u_0 t$, $\bar{y} = y - v_0 t$), il est évident que le critère (25.11) pour le pas τ, h_x et h_y étant remplacés par les hauteurs du parallélogramme, s'applique au maillage parallélogrammatique également dans le cas du système (25.10).

Voici comment on se sert du critère du choix du pas établi sur la base du schéma du modèle linéarisé dans les calculs pratiques des équations instationnaires bidimensionnelles de la dynamique des gaz. Dans chaque maille du maillage on détermine la valeur admissible du pas en temps $\tau^*_{j-1/2,\, k-1/2}$ en utilisant par exemple les formules suivantes:

$$\tau'_{j-1/2,\, k-1/2} = \frac{h'_{j-1/2,\, k-1/2}}{\max\left(D^{\mathrm{II}}_{j-1,\, k-1/2} - W^*_{j,\, k-1/2};\ -D^{\mathrm{I}}_{j,\, k-1/2} - W^*_{j-1,\, k-1/2}\right)},$$

$$\tau''_{j-1/2,\, k-1/2} = \frac{h''_{j-1/2,\, k-1/2}}{\max\left(D^{\mathrm{II}}_{j-1/2,\, k-1/2} - W^*_{j-1/2,\, k};\ -D^{\mathrm{I}}_{j-1/2,\, k} - W^*_{j-1/2,\, k-1}\right)},$$

$$h'_{j-1/2,\, k-1/2} = \frac{\Omega_{j-1/2,\, k-1/2}}{\sqrt{(x_{j-1/2,\, k} - x_{j-1/2,\, k-1})^2 + (y_{j-1/2,\, k} - y_{j-1/2,\, k-1})^2}}, \tag{25.12}$$

$$h''_{j-1/2,\, k-1/2} = \frac{\Omega_{j-1/2,\, k-1/2}}{\sqrt{(x_{j,\, k-1/2} - x_{j-1,\, k-1/2})^2 + (y_{j,\, k-1/2} - y_{j-1,\, k-1/2})^2}},$$

$$\tau^*_{j-1/2,\, k-1/2} = \frac{\tau'_{j-1/2,\, k-1/2}\tau''_{j-1/2,\, k-1/2}}{\tau'_{j-1/2,\, k-1/2} + \tau''_{j-1/2,\, k-1/2}}.$$

Dans ces formules τ', τ'' sont les pas admissibles pour les schémas unidimensionnels. Pour les calculer on définit les « hauteurs moyennes » de la maille h' et h'' comme des rapports de l'aire de la maille Ω (voir la formule (24.8) au § 24) aux longueurs des segments reliant les milieux des côtés opposés. Ensuite, les quantités W^* représentent les vitesses de déplacement des côtés de la maille, les formules pour les calculer ont été données au paragraphe précédent (voir la formule (24.9) pour l'arête 23). Enfin, on trouve les valeurs des vitesses des ondes $D^{\mathrm{I}}_{j,\ k-1/2}$, $D^{\mathrm{I}}_{j-1/2,\ k}$, $D^{\mathrm{II}}_{j-1,\ k-1/2}$, $D^{\mathrm{II}}_{j-1/2,\ k-1}$ lors du calcul des décompositions de discontinuité correspondantes sur chacune des quatre arêtes de la maille. Comme cela a déjà fait l'objet d'une étude dans le cas unidimensionnel (§ 16), nous ne nous y arrêterons pas.

Comme valeur admissible du pas en temps τ^* il convient de choisir la plus petite des valeurs $\tau_{j-1/2,\ k-1/2}$ sur toutes les mailles du maillage :

$$\tau^* = \min_{j,\ k} \tau^*_{j-1/2,\ k-1/2}.$$

Dans les calculs pratiques cette valeur est multipliée par un certain coefficient de « réserve » inférieur à l'unité en vertu des considérations exposées au § 16. La valeur de ce coefficient se détermine par les mêmes formules (16.13), (16.14).

De nombreux calculs effectués suivant le schéma décrit ont montré que le critère établi assure la stabilité du calcul.

Traitons brièvement le cas de l'écoulement stationnaire supersonique considéré au § 18. Le système linéarisé d'équations hyperboliques en coordonnées cartésiennes qui lui est associé représente le cas particulier du système (25.4). Envisageons le problème stationnaire à deux variables :

$$\begin{Vmatrix} u_0 & 0 & c_0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ c_0 & 0 & u_0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dfrac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} + \begin{Vmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & c_0 \\ 0 & c_0 & v_0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dfrac{p}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} = 0. \quad (25.13)$$

La matrice symétrique de ce système devant les dérivées par rapport à x est définie positive si $u_0 > c_0$ comme cela découle de l'équation caractéristique (25.6). La condition $u_0 > c_0$ est un analogue de l'exigence (18.1) pour que le flux soit supersonique en coordonnée x.

L'équation caractéristique du système (25.13)

$$\det \begin{Vmatrix} v_0 - u_0\mu & 0 & -\mu c_0 \\ 0 & v_0 - u_0\mu & c_0 \\ -\mu c_0 & c_0 & v_0 - u_0\mu \end{Vmatrix} = 0$$

a pour racines

$$\mu_{1,2}=\frac{u_0v_0\pm c_0\sqrt{u_0^2+v_0^2-c_0^2}}{u_0^2-c_0^2},\quad \mu_3=\frac{v_0}{u_0}. \tag{25.14}$$

Si la condition $u_0^2+v_0^2>c_0^2$ est remplie, toutes les racines sont réelles. Leurs valeurs donnent les pentes des caractéristiques du système hyperbolique (25.13) dans le plan x, y. Le schéma aux différences pour ce système, construit sur les principes exposés au § 9, où le rôle du temps t est joué par la variable x, sera stable si les pas du maillage h_x et h_y satisfont à la restriction

$$h_x\leqslant\frac{h_y}{\max(|\mu_1|,\ |\mu_2|)}, \tag{25.15}$$

où μ_1 et μ_2 sont définis par la formule (25.14).

Au § 26 on envisagera l'écoulement stationnaire à trois variables spatiales, supersonique dans la direction de la coordonnée x. Le modèle linéarisé en coordonnées cartésiennes qui lui est associé représente un cas particulier du système d'équations (25.4) lorsque les fonctions ne dépendent pas du temps t, i.e. on peut barrer les dérivées partielles en t. La symétrie de ce système permet, lors de la mise en œuvre du schéma aux différences, de se servir de la technique développée au § 10 et d'obtenir son critère de stabilité:

$$h_x\left[\frac{\max(|\mu_1|,\ |\mu_2|)}{h_y}+\frac{\max(|\nu_1|,\ |\nu_2|)}{h_z}\right]\leqslant 1,$$

$$\mu_{1,2}=\frac{u_0v_0\pm c_0\sqrt{u_0^2+v_0^2-c_0^2}}{u_0^2-c_0^2}, \tag{25.16}$$

$$\nu_{1,2}=\frac{u_0w_0\pm c_0\sqrt{u_0^2+w_0^2-c_0^2}}{u_0^2-c_0^2}.$$

Les conditions de stabilité des modèles linéarisés des écoulements stationnaires supersoniques qu'on a établies (25.15), (25.16) peuvent s'appliquer au calcul des problèmes non linéaires, comme nous l'avions montré pour les problèmes instationnaires unidimensionnels de la dynamique des gaz du § 16 et pour les problèmes instationnaires bidimensionnels de ce paragraphe. Nous ne nous y arrêtons pas.

Notons en conclusion que les restrictions imposées au pas en temps ne sont dictées que par la nécessité d'assurer la stabilité du calcul et, parfois, se trouvent superflues et entraînent des pertes de temps machine injustifiées. Il serait donc souhaitable de se défaire d'une restriction sur le pas en temps aussi stricte. Les schémas aux différences implicites permettent de le faire. Dans le cas du quadrillage on peut se servir de la construction du schéma aux différences décrit à la fin du § 11 compte tenu des particularités exposées au § 21 dues au caractère quasi linéaire du problème.

Une situation plus compliquée survient dans le cas de l'application du maillage formé par deux familles de courbes. Elle sera traitée au chapitre suivant (§ 35).

§ 26. Schéma pour écoulements stationnaires spatiaux supersoniques

Construction du maillage aux différences. Lois de conservation aux différences. Détermination des « grandes » valeurs des problèmes de deux flux confluents. Critère de stabilité du schéma.

Le présent paragraphe est consacré à la généralisation du schéma aux différences d'intégration des écoulements stationnaires supersoniques (plus précisément, « x-supersoniques ») étudié aux §§ 18, 19 au cas spatial. Cette généralisation a été effectuée pour la première fois dans l'ouvrage [61].

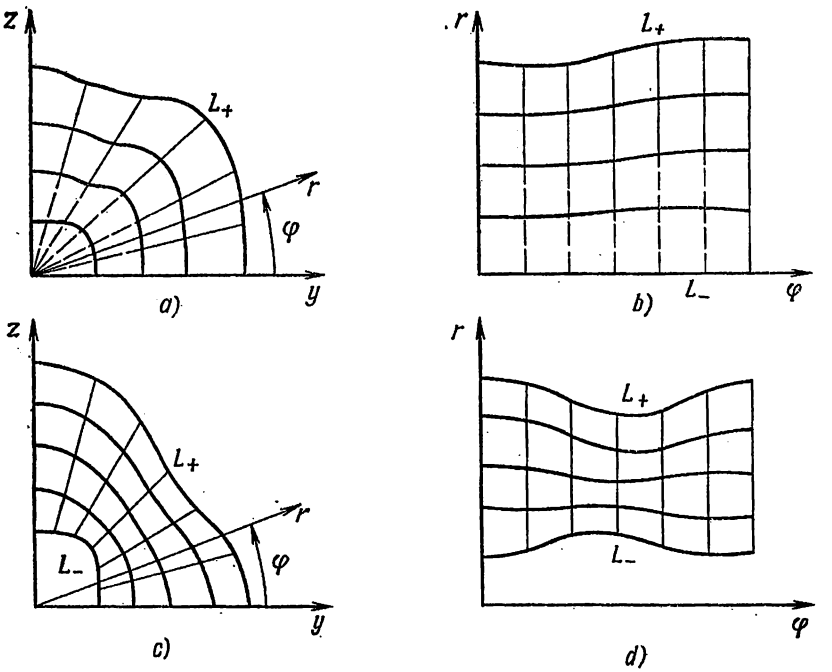


Fig. 26.1

Soit un domaine Ω mono- ou biconnexe qu'occupe la section du flux par le plan $x = \text{const}$, limité par les contours extérieur et intérieur L_+ et L_- conformément à la figure 26.1, a, c; on admet que dans le cas d'un domaine doublement connexe l'axe des x traverse

le plan indiqué à l'intérieur de L_-. Les mêmes domaines et les mêmes frontières sont représentés sur la figure 26.1, *b*, *d* dans le plan des variables r et φ. L'intervalle de variation de φ peut être inférieur à 2π. Ainsi, s'il y a deux plans de symétrie, φ varie entre 0 et $\pi/2$.

Nous donnerons la description de la division du domaine Ω en mailles élémentaires pour le cas d'un domaine simplement connexe avec deux plans de symétrie. Alors, si $r = \mathscr{R}_+(x, \varphi)$ est l'équation de la frontière L_+, le domaine Ω est donné par les inégalités

$$0 \leqslant r \leqslant \mathscr{R}_+(x, \varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$$

La division se fait dans le plan r, φ comme indiqué sur la figure 26.1, *b*, *d*. Suivant φ le domaine Ω se décompose en K bandes verticales auxquelles sont attribués les numéros $k = 1/2, \ldots, K - 1/2$. Associons aux frontières des bandes, segments verticaux traduits dans le plan y, z par des rayons issus de l'origine des coordonnées (points d'intersection du plan considéré avec l'axe des x), les numéros entiers $k = 0, 1, \ldots, K$. Au numéro $k = 0$ correspond $\varphi = 0$, à $k = K$, $\varphi = \pi/2$. La division de chaque segment $\varphi = \varphi_k$ appartenant au domaine Ω en J segments élémentaires d'égale longueur ainsi que leur numérotation s'opèrent de la même façon que dans le cas bidimensionnel (voir § 18). Les points de deux droites verticales $\varphi =$ $=$ const de numéros égaux j sont reliés (dans le plan φ, r) par des segments rectilignes et aux mailles quadrangulaires élémentaires qui en résultent sont associés deux indices demi-entiers: $j - 1/2$ et $k - 1/2$, où $j = 1, \ldots, J$ et $k = 1, \ldots, K$. Les paramètres moyens sur la maille dans le plan $x = x_0$ sont dits « petites » valeurs et sont désignés par des lettres minuscules munies des indices inférieurs correspondants ($\rho_{j-1/2,\ k-1/2}$, $u_{j-1/2,\ k-1/2}$, . . .), et pour $x =$ $= x_0 + h_x$ munies d'indices supérieurs ($\rho^{j-1/2,\ k-1/2}$, $u^{j-1/2,\ k-1/2}$, . . .).

De façon analogue on joint par des segments rectilignes les sommets des mailles élémentaires de numéros égaux et appartenant aux sections $x = x_0$ et $x = x_0 + h_x$. Finalement, toute la couche incluse entre ces sections se décompose en des volumes élémentaires (hexaèdres) dont les faces avant (dans la direction de l'axe des x) et arrière coïncident avec les quadrilatères élémentaires construits ci-dessus. Associons les paramètres aux faces latérales des volumes élémentaires conformément à la numérotation des mailles et de leurs frontières: un indice entier et un indice demi-entier (par exemple, sur les faces séparant les hexaèdres, voisins en r, le premier indice est entier, le second demi-entier), alors que les valeurs qu'on obtient en moyennant sur la face, seront appelées « grandes » valeurs et désignées par des lettres majuscules munies d'indices inférieurs. Notons qu'aux frontières rectilignes des quadrilatères élémentaires du plan r, φ correspondent les frontières courbes du plan y, z. Dans le cas des écoulements différant peu des écoulements de révolution cette circonstan-

ce permet de conduire les calculs pour $K \ll J$ sans nuire à la précision. Notons également que les faces latérales des hexaèdres élémentaires ne sont pas planes dans le cas général. Faisons alors correspondre aux faces latérales les plans « latéraux » dont chacun passe par l'arête de la maille située dans la section $x = x_0$ et par le milieu de l'arête opposée appartenant à la section $x = x_0 + h_x$. Les plans ainsi introduits ne sont utilisés dans ce qui suit qu'en vue de la détermination des « grandes » valeurs.

Dans le plan φ, r les quadrilatères élémentaires de chaque section $x = \text{const}$ ont des dimensions voisines (en cas de décomposition uniforme en φ), alors que dans le plan y, z à mesure qu'on s'approche de l'origine des coordonnées ($r \to 0$), les dimensions des mailles suivant la circonférence diminuent rapidement. La « concentration » accrue des mailles élémentaires et des polyèdres, inutile du point de vue de la précision du calcul (les gradients des paramètres, lorsque $r \to 0$, n'ont pas, dans le cas général, un ordre excédant celui d'autres régions du flux), entraîne la nécessité (en vertu du critère de stabilité) de diminuer notablement le pas d'intégration sur x. Pour en éviter les conséquences indésirables on procède, lors du calcul, à la fusion (« agrandissement ») des mailles (et des volumes correspondants) situées au voisinage de l'axe des x en « supprimant » les frontières représentées en trait interrompu sur la figure 26.1, *a*, *b*. La « suppression » est effectuée de telle façon que toutes les mailles qui en résultent (avec les frontières en trait plein) aient (dans le plan y, z) des dimensions circonférencielles et radiales voisines. Toutefois, dans des cas pareils, en mettant en œuvre un algorithme numérique, il convient de retenir et d'utiliser toutes les mailles (celles aux frontières en trait interrompu y compris). Les « petites » valeurs dans les mailles aux frontières en trait interrompu sont alors posées égales aux valeurs dans la maille correspondante obtenue par fusion de plusieurs mailles.

Introduisons quelques désignations qu'on appliquera ultérieurement à la mise en œuvre du schéma aux différences. Comme il découle de ce qui a été dit plus haut, les sommets des quadrilatères élémentaires (du plan r, φ), qui sont en même temps les sommets des volumes élémentaires dans l'espace x, r, φ, sont numérotés par les entiers j et k. De façon analogue, les côtés de ces quadrilatères (arêtes des volumes élémentaires) sont notés par un numéro entier et un numéro demi-entier ($j - 1/2$, k pour les côtés verticaux et j, $k - 1/2$ s'ils ne le sont pas). Soient $r_{j,\,k}$, $\varphi_{j,\,k}$ et $r^{j,\,k}$, $\varphi^{j,\,k}$ les coordonnées des sommets de numéros j et k dans les sections $x = x_0$ et $x = x_0 + h_x$ respectivement, les coordonnées angulaires dans le cas de décomposition de la figure 26.1 étant indépendantes du premier indice, i.e. $\varphi_{j,\,k} = \varphi_k$ et $\varphi^{j,\,k} = \varphi^k$.

Pour deux sections situées côte à côte $x = x_0$ et $x = x_0 + h_x$ déterminons les dimensions angulaires de la $(k - 1/2)$-ième couche verticale $(h_\varphi)_{k-1/2} = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ et $(h_\varphi)^{k-1/2} = \varphi^k - \varphi^{k-1}$, les hau-

теурs de la maille

$$(h_r)_{j-1/2,\,i} = r_{j,\,i} - r_{j-1,\,i}, \quad (h_r)^{j-1/2,\,i} = r^{j,\,i} - r^{j-1,\,i}$$

répondant à $\varphi = \varphi_i$, où $i = k - 1$ et k, et les hauteurs moyennes

$$(h_r)_{j-1/2,\,k-1/2} = 0{,}5\,[(h_r)_{j-1/2,\,k-1} + (h_r)_{j-1/2,\,k}],$$
$$(h_r)^{j-1/2,\,k-1/2} = 0{,}5\,[(h_r)^{j-1/2,\,k-1} + (h_r)^{j-1/2,\,k}].$$

Introduisons, en outre, les quantités

$$(\Delta_1)_{i,\,k-1/2} = 0{,}5\,(r^{i,\,k-1} + r^{i,\,k} - r_{i,\,k-1} - r_{i,\,k})$$

caractérisant les accroissements des ordonnées moyennes des côtés supérieur ($i = j$) et inférieur ($i = j - 1$) de la maille élémentaire en passant de la section $x = x_0$ à la section $x = x_0 + h_x$, ainsi que les quantités

$$(\Delta_2)_{i,\,k-1/2} = 0{,}5\,(r^{i,\,k} - r^{i,\,k-1} + r_{i,\,k} - r_{i,\,k-1})$$

caractérisant la pente moyenne dans le plan φ, r des segments rectilignes formant ces côtés.

Limitons-nous au maillage fixe en coordonnée angulaire, lorsque la division suivant φ ne change pas en passant de la section $x = x_0$ à la section $x = x_0 + h_x$ et donc $(h_\varphi)^{k-1/2} = (h_\varphi)_{k-1/2}$. Pour établir le schéma aux différences intégrons les équations (18.2) par rapport à x, entre $x = x_0$ et $x = x_0 + h$ en prenant comme S les mailles élémentaires aux frontières continues construites précédemment. Si cette maille se compose de $i - n + 1$ mailles divisées suivant φ par les frontières en trait interrompu (voir fig. 26.1, *a*, *b*), nous attribuerons aux paramètres moyens sur la maille les indices $j - 1/2$, $l - 1/2$ où $l = (i + n)/2$ et $n - 1$ et i sont les numéros (croissants) des frontières latérales des mailles. Lorsque $i = n = k$, on a une maille sans frontières intérieures en trait interrompu, et $l = k$. Après l'intégration de (18.2) compte tenu des désignations introduites et de la détermination des « grandes » valeurs on est conduit au système d'équations aux différences

$$(ah_r)^{j-1/2,\,l-1/2} =$$
$$= (ah_r)_{j-1/2,\,l-1/2} + \sum_{m=n}^{i} \left[\left(A\Delta_1 - Bh_x + C\Delta_2 \frac{h_x}{h_\varphi} \right)_{j,\,m-1/2} - \right.$$
$$\left. - \left(A\Delta_1 - Bh_x + C\Delta_2 \frac{h_x}{h_\varphi} \right)_{j-1,\,m-1/2} \right] - \left(C \frac{h_x h_r}{h_\varphi} \right)_{j-1/2,\,i} +$$
$$+ \left(C \frac{h_x h_r}{h_\varphi} \right)_{j-1/2,\,n-1} + \frac{h_x}{2} \sum_{m=n}^{i} [(f h_r)_{j-1/2,\,m-1/2} + (f h_r)^{j-1/2,\,m-1/2}] \tag{26.1}$$

dans lesquelles $h_\varphi = (h_\varphi)_{l-1/2} = \varphi_j - \varphi_{n-1}$ indépendamment des indices et les vecteurs colonnes a, A, B, C et f sont définis d'après (18.3).

Le calcul des $u^{j-1/2,\ l-1/2}$, $v^{j-1/2,\ l-1/2}$, ... étant effectué à l'aide des relations (26.1) presque de la même façon que dans le cas bidimensionnel, nous ne nous arrêtons que sur les particularités inhérentes au cas envisagé. La composante circonférencielle de la vitesse $w^{j-1/2,\ l-1/2}$ est égale au rapport des seconds membres de la dernière et de la première équation du système (26.1) conformément à la définition du vecteur a. Les autres « petites » valeurs dotées d'indices supérieurs demi-entiers sont déterminées d'après les formules (18.13) en remplaçant les valeurs calculées d'après (18.10) par des valeurs analogues déterminées d'après (26.1). La formule pour u (18.14) s'en trouve alors modifiée: l'expression sous le radical doit tenir compte du second membre de la troisième équation du mouvement servant à déterminer w. Les « petites » valeurs munies des indices supérieurs $j-1/2$, $k-1/2$ pour $n \leqslant k \leqslant i$, i.e. les moyennes sur les mailles ayant une ou deux frontières en trait interrompu, sont posées égales aux valeurs munies des indices supérieurs $j-1/2$, $l-1/2$, en conformité avec ce qui a été dit précédemment.

Pour déterminer les « grandes » valeurs (A, B et C) incluses dans les seconds membres des équations (26.1) on considère le problème automodèle de deux flux uniformes supersoniques semi-infinis confluant suivant une ligne coïncidant avec le côté correspondant d'une maille élémentaire située dans le plan $x = x_0$. Le vecteur vitesse q de chacun des flux confluents peut se décomposer en trois composantes: q^1, q^2 et q^3 dont les deux premières sont contenues dans un plan perpendiculaire à la ligne de confluence et la troisième est parallèle à celle-ci. Toutes les lignes de confluence appartenant au plan $x = x_0$, on peut toujours poser $q^1 = u$ en choisissant une orientation adéquate pour le système de coordonnées utilisé lors de la résolution du problème automodèle de confluence des flux supersoniques. On va illustrer la méthode de calcul des composantes q^2 et q^3 sur l'exemple d'une arête séparant deux mailles voisines interceptées par deux rayons $\varphi = \text{const}$. En associant aux points extrêmes de l'arête indiquée les numéros j, k et j, $k-1$, introduisons les quantités

$$l_r = r_{j,k} - r_{j,k-1}, \quad l_\varphi = 0{,}5\,(r_{j,k} + r_{j,k-1})\,(\varphi_{j,k} - \varphi_{j,k-1}),$$

$$l = \sqrt{l_r^2 + l_\varphi^2}.$$

Les quantités ci-dessus définissent l'orientation et la longueur d'un segment rectiligne représentant l'arête en question dans le plan φ, r. Conformément à la définition de q^2 et q^3 on a

$$q^2 = w_{j\pm1/2,\ k-1/2}\,(l_r/l) - v_{j\pm1/2,\ k-1/2}\,(l_\varphi/l),$$

$$q^3 = w_{j\pm1/2,\ k-1/2}\,(l_\varphi/l) + v_{j\pm1/2,\ k-1/2}\,(l_r/l),$$

où les indices demi-entiers s'associent comme auparavant aux paramètres dans les mailles « confluentes » de la couche $x = x_0$, le signe plus (moins) donnant les valeurs des composantes de la vitesse indiquées du côté de la maille plus éloignée (proche) de l'axe des x. On obtient des formules analogues pour les autres frontières. Ainsi, si la frontière considérée est une partie du rayon $\varphi = \text{const}$, alors $q^2 = w$, $q^3 = v$, ce qui d'ailleurs découle également de la définition de q^2 et q^3.

Les composantes q^i des deux côtés de la ligne de confluence des flux une fois trouvées, le problème considéré se ramène à celui de la confluence de deux flux plans dont chacun est supersonique pour $u > c$. Les composantes q^3 tangentes à la ligne de confluence n'altèrent pas la confluence et demeurent invariables pour chacun des flux jusqu'à la surface de glissement qui prend naissance sur la ligne de confluence. Les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie à travers les faces latérales des polyèdres élémentaires, inclus dans les seconds membres des équations aux différences (26.1) sont posés égaux aux valeurs correspondantes du sous-domaine du domaine de confluence où se trouve le plan « latéral » envisagé. Celui-ci passe (dans l'espace x, r, φ), en conformité avec ce qui a été dit antérieurement, par le côté envisagé de la maille élémentaire située dans la section $x = x_0$, i.e. par la ligne de confluence des flux et par le milieu de l'arête opposée du polyèdre élémentaire appartenant au plan $x = x_0 + h_x$. Des plans « latéraux » analogues sont utilisés dans le calcul de « grandes » valeurs sur celles des faces des polyèdres élémentaires qui coïncident avec une paroi rigide, avec la frontière d'un jet ou avec l'onde de choc de tête (si celle-ci est particularisée). Dans ces cas, on a à traiter des problèmes automodèles d'écoulement bidimensionnel, la composante de la vitesse q^3 parallèle à l'arête de la maille élémentaire correspondante appartenant au plan $x = x_0$ se conservant également.

Lors du calcul d'un jet, l'utilisation des plans « latéraux » pour chaque maille attenant à la frontière du jet permet seulement d'établir la coordonnée radiale du point médian de l'arête opposée, i.e. $r^{J,\,k-1/2}$. Aussi, avant de procéder à la construction de l'ensemble du schéma aux différences dans la section $x = x_0 + h_x$ résout-on le problème de la détermination des « grandes » valeurs et, simultanément, des coordonnées $r^{J,\,k-1/2}$ des points médians de toute la frontière du jet. Les coordonnées radiales des sommets des mailles frontières $r^{J,\,k}$ sont ensuites tirées des formules

$$r^{J,\,k} = 0{,}5\,(r^{J,\,k-1/2} + r^{J,\,k+1/2}) \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, K-1,$$
$$r^{J,\,0} = r^{J,\,1/2}, \quad r^{J,\,K} = r^{J,\,K-1/2}. \tag{26.2}$$

En établissant les deux dernières égalités on a pris en compte que dans le cas traité les rayons portant les numéros $k = 0$ et $k = K$ appartiennent aux plans de symétrie. Notons, à propos, que le calcul

des « grandes » valeurs sur les plans de symétrie revient à la résolution du problème de l'écoulement sur une paroi plane parallèle à l'axe des x. Le calcul de la frontière intérieure du jet annulaire s'effectue également suivant les formules (26.2) en remplaçant J par zéro. La procédure permettant de construire l'onde de choc de tête « particularisée » est analogue.

L'analyse du schéma aux différences construit ci-dessus est analogue à l'analyse des schémas aux différences pour l'intégration des équations de la dynamique des gaz instationnaire, exposée au ch. II et aux paragraphes précédents du présent chapitre. Comme il découle de cette analyse, pour un maillage uniforme le schéma aux différences construit sur les solutions lisses assure le premier ordre d'approximation. Pour analyser l'effet d'agrandissement des mailles de calcul au voisinage de l'axe des x et pour justifier cette opération, des calculs spéciaux ont été mis en œuvre au cours desquels on a procédé à la comparaison des résultats obtenus avec et sans cet agrandissement. L'analyse de la stabilité conduit à la restriction au pas d'intégration sur x:

$$h_x \leqslant \frac{H_r H_\varphi}{H_r + H_\varphi}.$$

Ici H_r coïncide avec la grandeur h_x^* introduite à la fin du § 18 et H_φ est une grandeur circonférencielle analogue. Au cours du calcul de H_φ, comme, d'ailleurs, au cours du calcul en général, on n'envisage pas la confluence des flux le long des frontières représentées sur la figure 26.1, a, b en trait interrompu, et pour l'instant où l'onde de choc ou la caractéristique initiale de l'éventail des ondes de détente traverse la frontière opposée, on prend le moment où est atteint le milieu de cette frontière (cette dernière circonstance s'avère essentielle pour les mailles adjacentes à l'axe des x).

§ 27. Schéma pour écoulements spatiaux instationnaires

Maillage spatial immobile. La forme discrète des lois de conservation. Condition de stabilité du schéma.

Limitons-nous au cas du maillage immobile. Les lois de conservation intégrales répondant aux équations de la dynamique des gaz en coordonnées cylindriques (22.20), (22.21) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\int\int_\Omega\int \sigma r\,dx\,dr\,d\varphi + \int\int_S a r\,dr\,d\varphi + \\ + b r\,dx\,d\varphi + c\,dx\,dr = \int\int_\Omega\int f\,dx\,dr\,d\varphi, \qquad (27.1)$$

où les vecteurs fonctions σ, a, b, c sont définis par les formules (22.17) et le vecteur f par les formules (22.21). Ici Ω est un volume fixe (indépendant du temps), S une surface fermée qui le limite, w la projection du vecteur vitesse q sur la direction circonférencielle, les autres désignations coïncident avec celles utilisées au § 26, dont, notamment, u et v qui sont les projections du vecteur vitesse sur les axes des x et des r.

Introduisons outre le système de coordonnées cylindriques un système rectangulaire x, y, z. Faisons coïncider les axes des x des systèmes cylindrique et rectangulaire et comptons l'angle φ par rapport à l'axe des y positifs. Le domaine d'écoulement étudié Ω en coordonnées x, r, φ est supposé le suivant: $x_a \leqslant x \leqslant x_b$, $\mathscr{R}_-(x, \varphi) \leqslant r \leqslant \mathscr{R}_+(x, \varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, où x_a et x_b sont des constantes données et les fonctions $\mathscr{R}_-$ et $\mathscr{R}_+$ sont soit données soit déterminées au cours de la résolution. Lorsque $\mathscr{R}_- \equiv 0$, le domaine Ω contient l'axe des x. S'il y a un plan de symétrie ou plus, l'intervalle de variation de φ peut être réduit: $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/\alpha$, où $\alpha = 1, 2, \ldots$ est le nombre de ces plans.

La construction d'un maillage aux différences, i.e. la division de Ω en des volumes élémentaires, prévoit la division de chaque plan méridien $\varphi = \text{const}$ et de chaque section $x = \text{const}$ en des aires élémentaires (pas forcément quadrangulaires) et la formation, à l'aide des éléments plans qui résultent de cette division, de polyèdres élémentaires spatiaux. Dans les plans méridiens la division s'effectue de la même façon que dans le cas bidimensionnel (voir § 18) en IJ mailles, I étant le nombre de couches en x et J en r. Les frontières verticales des couches se forment alors par intersection de tous les plans méridiens avec les plans $x = \text{const}$. La division de ces derniers s'effectue par analogie avec celle adoptée lors du calcul des écoulements stationnaires spatiaux supersoniques (voir § 26) et conduit à K segments angulaires de valeurs égales: $h_\varphi = 2\pi/K$ ou $h_\varphi = \pi/(\alpha K)$, en outre, dans le cas $\mathscr{R}_- \equiv 0$, au voisinage de l'axe des x on procède, comme au § 26, à la fusion des mailles. Notons que les faces des polyèdres élémentaires ne sont pas toutes planes même dans l'espace x, r, φ (si l'on considère le système x, r, φ comme cartésien) bien que les arêtes de toutes les faces dans l'espace indiqué soient des segments de droite.

Le schéma aux différences permettant de déterminer les paramètres du flux à la couche suivante $(t + \tau)$ d'après les grandeurs à la couche temporelle connue (t) s'obtient en appliquant les équations (27.1) intégrées par rapport au temps entre t et $t + \tau$ aux polyèdres élémentaires construits ci-dessus. En utilisant comme dans le cas bidimensionnel le théorème de la moyenne pour le calcul des inté-

grales correspondantes on arrive aux relations suivantes:

$$\rho^{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} = \rho_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}}(A_{i,\,j-1/2,\,k-1/2} - A_{i-1,\,j-1/2,\,k-1/2} + B_{i-1/2,\,j,\,k-1/2} - B_{i-1/2,\,j-1,\,k-1/2} + C_{i-1/2,\,j-1/2,\,k} - C_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1}), \quad (27.2_1)$$

$$(\rho u)^{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} = (\rho u)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}}[(Prh_rh_\varphi + AU)_{i,\,j-1/2,\,k-1/2} - (Prh_rh_\varphi + AU)_{i-1,\,j-1,\,k-1/2} + (Prh_rh_\varphi + BU)_{i-1/2,\,j,\,k-1/2} - (Prh_rh_\varphi + BU)_{i-1/2,\,j-1,\,k-1/2} + (Prh_rh_\varphi + CU)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k} - (Prh_rh_\varphi + CU)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1}], \quad (27.2_2)$$

$$(\rho v)^{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} = (\rho v)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}}[(AV)_{i,\,j-1/2,\,k-1/2} - (AV)_{i-1,\,j-1/2,\,k-1/2} + (Prh_xh_\varphi + BV)_{i-1/2,\,j,\,k-1/2} - (Prh_xh_\varphi + BV)_{i-1/2,\,j-1,\,k-1/2} + (CW)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k} - (CW)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1}] + \tau(p + \rho w^2)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}, \quad (27.2_3)$$

$$(\rho w)^{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} = (\rho w)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}}[(AW)_{i,\,j-1/2,\,k-1/2} - (AW)_{i-1,\,j-1/2,\,k-1/2} + (Ph_xh_r^0 + BW)_{i-1/2,\,j,\,k-1/2} - (Ph_xh_r^0 + BW)_{i-1/2,\,j-1,\,k-1/2} + (Ph_xh_r + CW)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k} - (Ph_xh_r + CW)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1}] - \tau(\rho vw)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}, \quad (27.2_4)$$

$$\rho(2\varepsilon + q^2)]^{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} = [\rho(2\varepsilon + q^2)]_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2} - \frac{\tau}{G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}}\{[A(2I + Q^2)]_{i,\,j-1/2,\,k-1/2} - [A(2I + Q^2)]_{i-1,\,j-1/2,\,k-1/2} + [B(2I + Q^2)]_{i-1/2,\,j,\,k-1/2} - [B(2I + Q^2)]_{i-1/2,\,j-1,\,k-1/2} + [C(2I + Q^2)]_{i-1/2,\,j-1/2,\,k} - [C(2I + Q^2)]_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1}\}. \quad (27.2_5)$$

Ici on a utilisé les notations suivantes:

$$A = RUrh_rh_\varphi,$$
$$B = R(Urh_rh_\varphi + Vrh_xh_\varphi + Wh_xh_r),$$
$$C = R(Urh_rh_\varphi + Wh_xh_r),$$

$$r_{i,\,j-1/2,\,k-1/2}=(r_{i,\,j,\,k}+r_{i,\,j-1,\,k}+r_{i,\,j,\,k-1}+r_{i,\,j-1,\,k-1})/4,$$

$$r_{i-1/2,\,j,\,k-1/2}=(r_{i,\,j,\,k}+r_{i-1,\,j,\,k}+r_{i,\,j,\,k-1}+r_{i-1,\,j,\,k-1})/4,$$

$$r_{i-1/2,\,j-1/2,\,k}=(r_{i,\,j,\,k}+r_{i-1,\,j,\,k}+r_{i,\,j-1,\,k}+r_{i-1,\,j-1,\,k})/4,$$

$$(h_r)_{i,\,j-1/2,\,k-1/2}=(r_{i,\,j,\,k}+r_{i,\,j,\,k-1}-r_{i,\,j-1,\,k}-r_{i,\,j-1,\,k-1})/2,$$

$$(h_r)_{i-1/2,\,j,\,k-1/2}=(r_{i-1,\,j,\,k}+r_{i-1,\,j,\,k-1}-r_{i,\,j,\,k}-r_{i,\,j,\,k-1})/2,$$

$$(h_r)_{i-1/2,\,j-1/2,\,k}=(r_{i,\,j,\,k}+r_{i-1,\,j,\,k}-r_{i,\,j-1,\,k}-r_{i-1,\,j-1,\,k})/2,$$

$$(h_r^0)_{i-1/2,\,j,\,k-1/2}=(r_{i,\,j,\,k-1}+r_{i-1,\,j,\,k-1}-r_{i,\,j,\,k}-r_{i-1,\,j,\,k})/2.$$

Les quantités correspondantes pour les autres faces du polyèdre élémentaire auxquelles sont associés les triplets de nombres $i-1$, $j-1/2$, $k-1/2$; $i-1/2$, $j-1$, $k-1/2$ et $i-1/2$, $j-1/2$, $k-1$ sont introduites de la même façon. Les autres variables dans (27.2) ont la signification suivante: $G_{i-1/2,\,j-1/2,\,k-1/2}$ est le volume du polyèdre élémentaire; les lettres majuscules désignent les valeurs des paramètres sur les faces du polyèdre; ces valeurs étant calculées, tout comme dans le cas bidimensionnel, en résolvant le problème automodèle de décomposition d'une discontinuité quelconque, l'enthalpie I dans (27.2_5) ne doit pas être confondue avec I, le nombre de couches en x; les autres désignations dans (27.2) coïncident ou sont analogues à celles adoptées antérieurement. Le système (27.2) est écrit dans l'hypothèse que le volume élémentaire est un octaèdre. Pour un plus grand nombre de faces (ce qui peut se produire, notamment, lors de la réunion des polyèdres situés au voisinage de l'axe des x) les seconds membres des équations aux différences contiennent les sommes des flux correspondants calculés pour toutes les faces.

La résolution des équations (27.1) s'opère de la même façon qu'aux cas uni ou bidimensionnels et permet, d'après la distribution des paramètres sur une couche temporelle connue t, de déterminer leur distribution sur la couche $t+\tau$. Le pas d'intégration en temps τ doit alors satisfaire à la condition de stabilité revêtant, comme le montre l'analyse, la forme

$$\tau\leqslant\frac{\tau_x\tau_r\tau_\varphi}{\tau_x\tau_r+\tau_x\tau_\varphi+\tau_r\tau_\varphi}. \tag{27.3}$$

Ici τ_x, τ_r et τ_φ sont des intervalles temporels au bout desquels les ondes qui se forment dans le problème de décomposition de discontinuité, atteignent la face opposée du polyèdre suivant les axes des x, r et φ respectivement. Sur les solutions lisses et le maillage uniforme le schéma aux différences (27.2) approche le système initial (27.1) avec une précision du premier ordre.

CHAPITRE IV

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE DES GAZ EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES

§ 28. Formalisation des modes de description de la figure de l'écoulement calculé

Utilisation de l'information *a priori* sur la solution lors de la mise en œuvre de l'algorithme de calcul. Liaison du système de coordonnées curvilignes avec la configuration des singularités de la solution. Formalisation de la description de la figure de l'écoulement au moyen des notions : domaine de calcul, frontière de calcul, image du domaine de calcul, image de frontière de calcul.

En calculant un écoulement bidimensionnel hydrodynamique instationnaire dans les domaines pourvus d'une géométrie complexe on ne peut espérer obtenir un résultat vraisemblable qu'en recourant à des algorithmes adaptés à la figure de l'écoulement.

Souvent, en résolvant un problème on dispose d'une information *a priori* sur les propriétés des solutions cherchées. Il n'est pas rationnel de l'ignorer, il faut s'en servir pour améliorer la qualité du calcul. Par ailleurs, il est impensable de mettre en œuvre une technique particulière pour chaque problème concret, il est souhaitable que la méthode soit valable pour une classe de problèmes plus vaste, voire en définitive pour le calcul d'un écoulement bidimensionnel arbitraire.

Comment réconcilier la nécessité d'une approche individuelle pour la résolution d'un problème concret compte tenu de ses particularités avec l'exigence de rendre la méthode aussi générale que possible ? C'est là l'un des problèmes importants à résoudre lorsqu'on veut mettre en œuvre un bon algorithme. Il faut souligner une fois de plus que la création d'un algorithme de calcul n'est pas seulement l'écriture et l'élaboration du schéma aux différences approximant un système correspondant d'équations différentielles, qui assure la stabilité du calcul (sous certaines restrictions) mais aussi l'élaboration d'une technique permettant de tenir compte des caractéristiques concrètes d'un problème particulier, de décrire systématiquement les détails essentiels en sacrifiant les détails secondaires. C'est ainsi qu'on peut espérer obtenir une précision satisfaisante en disposant de données limitées et même souvent pour effectuer le calcul. La situation se complique encore par le fait que les « détails essentiels » peuvent apparaître au cours du calcul et modifier la tactique primitive du calcul. Pour mettre en œuvre un algorithme de calcul répondant aux principes précédents il faut avant tout savoir formaliser la description de la figure de l'écoulement ou, comme on dit, il faut donner

une description formelle du problème. Si l'on se souvient qu'un milieu hydrodynamique peut comprendre diverses régions de comportement physique différent, il semble naturel de commencer la description de la figure de l'écoulement par celle de la géométrie du problème. Il n'est possible de reproduire soigneusement les frontières des domaines tout au long du calcul qu'en les isolant. On y parvient en reliant la position des frontières avec le système de coordonnées curvilignes dans lequel les frontières seraient les lignes de coordonnées. On pourra alors trouver pour chaque problème une technique appropriée de description de ses particularités géométriques.

Cette approche suggère en même temps un mode de description formelle de la figure de l'écoulement.

Un système de coordonnées curvilignes lié à la position des frontières peut plus facilement être construit dans chaque domaine si celui-ci peut être représenté sous la forme d'un quadrilatère dont les côtés sont des lignes de coordonnées. Dans ce cas, chaque domaine rapporté aux coordonnées curvilignes représentera un rectangle qu'on conviendra d'appeler son *image*. L'approche indiquée admet un arbitraire dans la représentation de l'écoulement tout entier par l'intermédiaire d'un ensemble de domaines du type décrit. Si l'écoulement de départ ne peut être traduit par un ensemble de tels domaines, on peut introduire des frontières auxiliaires (de calcul) pour pouvoir procéder au fractionnement prévu. D'après cette approche un domaine physique serait constitué de plusieurs « *domaines de calcul* ». Il est donc possible de décrire la figure de l'écoulement en se donnant les images des domaines. La description d'un tel ensemble de rectangles et de leur disposition réciproque constituera ce qu'on appellera *donnée de la structure du problème*: ainsi a lieu la formalisation de la figure de l'écoulement.

L'approche envisagée permet de particulariser les discontinuités isolées (telles les ondes de choc, les ondes de détonation, les frontières de contact) et augmente la précision du calcul.

Il est en outre possible d'introduire les frontières de calcul afin de fractionner un domaine complexe en domaines plus simples. L'art et l'expérience de l'opérateur sont pour beaucoup dans le choix de la structure la plus naturelle et la plus simple pour chaque problème concret.

Signalons que plus la configuration du domaine de calcul est compliquée, plus l'algorithme de la construction du système de coordonnées curvilignes associé est complexe.

Soulignons une fois de plus que le domaine de calcul est un quadrilatère topologique et son image un rectangle.

Pour un domaine de configuration compliquée il peut y avoir plus de quatre frontières de calcul. Les côtés correspondants du rectangle-image seront alors constitués de plusieurs segments-« images » des frontières de calcul des différents types.

La description de la structure du problème devient plus aisée si l'on introduit un ordonnancement à deux étapes.

La première étape — *niveau* — consiste à réunir les domaines de calcul de façon à ce que chaque couple de rectangles-images ait des frontières qui coïncident si bien que la structure entière reproduit de nouveau un rectangle constitué par des rectangles.

La seconde étape est la description de la disposition mutuelle des niveaux, que l'on fera naturellement en décrivant le voisinage des frontières de calcul représentant les frontières d'un niveau.

Rappelons que la structure du problème est l'image formelle de sa géométrie qui varie rapidement au cours du mouvement. Il est donc nécessaire non seulement de disposer de la description de l'état donné de la structure, mais encore de savoir la reconstruire tout au long du calcul. On y parvient en tenant compte des modifications des types des frontières de calcul, en modifiant la description du voisinage. (Cela permet, notamment, de créer ou de supprimer des interstices entre les niveaux, ce que l'on peut suivre automatiquement au cours du calcul.) L'illustration de ce qui vient d'être dit est fournie par l'exemple du calcul du choc entre plaques dans le problème de soudure par explosion traité au § 42.

§ 29. Système de coordonnées instationnaire suivant le mouvement des frontières. Choix des variables

Système de coordonnées curvilignes local. Choix des fonctions inconnues pour la description du mouvement et des paramètres donnant un système de coordonnées curvilignes local.

Supposons avoir décrit la structure du problème, définissant ainsi les domaines de calcul avec leurs frontières dont le mouvement est à étudier. Les frontières du domaine de calcul donnent un quadrilatère de coordonnées dans lequel on a à construire, à chaque instant, les deux familles de lignes de coordonnées.

Si l'on part du système classique d'équations de la dynamique des gaz écrit en coordonnées curvilignes ξ, η, t, les fonctions $\xi = f_1(x, y, t)$, $\eta = f_2(x, y, t)$ doivent être suffisamment lisses.

Il n'est pratiquement pas possible de mettre en œuvre un système de coordonnées aussi global. En conséquence, nous devons savoir écrire les équations dans un système de coordonnées local, beaucoup plus facile à réaliser.

On se heurte alors à la question du choix des fonctions inconnues our décrire le mouvement.

Certes, le fait que le système de coordonnées est local n'a pas d'importance pour les grandeurs scalaires mais comment s'y prendre avec les composantes de la vitesse ?

Il est impossible de décomposer le vecteur vitesse en composantes covariantes ou contravariantes *), celles-ci subissant une discontinuité lors du passage d'un système de coordonnées local à l'autre si ces derniers sont construits indépendamment.

Représenter le vecteur vitesse en composantes cartésiennes revient à renoncer à un de nos buts essentiels consistant dans l'utilisation du caractère lisse des solutions le long des lignes de coordonnées, ces dernières étant liées aux singularités de l'écoulement à calculer.

Ces deux obstacles seront levés si l'on décompose le vecteur vitesse q le long de chaque ligne de coordonnées en des composantes qui lui sont tangente et orthogonale. Ainsi, le long d'une ligne de coordonnées $\eta = \text{const}$ la composante suivant sa tangente est μ^k, celle qui lui est orthogonale ν^n, si bien que $(\mu^k)^2 + (\nu^n)^2 = |q|^2$. Par analogie, le long des lignes de coordonnées $\xi = \text{const}$ les composantes seront ν^k et μ^n, soit

$$(\nu^k)^2 + (\mu^n)^2 = |q|^2.$$

Construisons, au temps t, en un point quelconque du plan x, y un système de coordonnées local. Il peut être défini par la donnée des paramètres métriques de longueur le long des lignes de coordonnées de la première et de la seconde famille et des cosinus directeurs des tangentes aux lignes de coordonnées. Admettons que les lignes $\eta = f_2(x, y) = \text{const}$ sont les lignes de coordonnées de la première famille et $\xi = f_1(x, y) = \text{const}$ celles de la seconde famille.

Pour abréger, appelons lignes ξ les lignes de la première famille et lignes η celles de la seconde famille (suivant le nom de la coordonnée variable).

Désignons par $\sqrt{g_{11}}$, α', β' respectivement le paramètre métrique et les cosinus directeurs avec les axes des x et des y pour les lignes ξ.

Désignons par $\sqrt{g_{22}}$, α'', β'' respectivement le paramètre métrique et les cosinus directeurs pour les lignes η.

Alors, le cosinus α et le sinus β de l'angle entre les lignes de coordonnées de la première et de la seconde famille s'exprimeront ainsi en fonction des cosinus directeurs:

$$\alpha = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'', \quad \beta = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''. \tag{29.1}$$

Nous supposons que le système de coordonnées curvilignes est non dégénéré, i.e. $\beta \neq 0$.

Rappelons certaines relations connues liées à l'introduction d'un système de coordonnées curvilignes local.

Si l'on choisit une base locale de vecteurs tangents aux lignes de coordonnées en chaque point et si l'on y décompose un vecteur quel-

*) Les notions de composantes co- et contravariantes du vecteur sont supposées connues du lecteur, par exemple d'après l'ouvrage [80].

conque q, alors les composantes de ce vecteur seront μ (sur la tangente à la ligne ξ) et ν (sur la tangente à la ligne η).

Elles sont appelées *composantes contravariantes*. Elles sont liées aux composantes cartésiennes u et v par

$$\mu = \frac{1}{\beta}(u\beta'' - v\alpha''), \quad \nu = \frac{1}{\beta}(v\alpha' - u\beta'). \tag{29.2}$$

Les composantes de la vitesse du paragraphe précédent μ^k, ν^n le long des lignes ξ et ν^k, μ^n le long des lignes η s'expriment en fonction des composantes contravariantes de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mu^k &= \mu + \alpha\nu \quad \text{(dirigée suivant la tangente à la ligne } \xi), \\ \nu^n &= \nu\beta \quad \text{(orthogonale à la tangente à la ligne } \xi), \\ \nu^k &= \nu + \alpha\mu \quad \text{(dirigée suivant la tangente à la ligne } \eta) \\ \mu^n &= \mu\beta \quad \text{(orthogonale à la tangente à la ligne } \eta). \end{aligned} \tag{29.3}$$

Les composantes introduites s'expriment au moyen des composantes cartésiennes de la vitesse u, v de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mu^k &= u\alpha' + v\beta', \quad \nu^n = v\alpha' - u\beta', \\ \nu^k &= u\alpha'' + v\beta'', \quad \mu^n = u\beta'' - v\alpha''. \end{aligned} \tag{29.4}$$

En passant aux coordonnées curvilignes

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y), \quad t = t$$

les cosinus directeurs et les paramètres métriques sont liés avec le dérivées partielles des fonctions, donnant le passage aux coordonnées curvilignes, par les relations

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \beta' &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \beta'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ dx &= \alpha'\sqrt{g_{11}}\,d\xi + \alpha''\sqrt{g_{22}}\,d\eta, \\ dy &= \beta'\sqrt{g_{11}}\,d\xi + \beta''\sqrt{g_{22}}\,d\eta. \end{aligned} \tag{29.5}$$

Les dérivées partielles d'une fonction lisse quelconque F en tant que fonctions de x, y sont reliées avec les dérivées en ξ, η de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{\beta}\left[\frac{\beta''}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\beta'}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right], \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{\beta}\left[-\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\alpha'}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right]. \end{aligned} \tag{29.6}$$

Le jacobien de transformation $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\beta \equiv \sqrt{g}$ d'où l'élément de volume $dx\,dy = \sqrt{g}d\xi\,d\eta$. Nous avons rappelé les notions élémentaires de la théorie du calcul vectoriel qui nous seront nécessaires par la suite.

Soulignons une fois de plus qu'en envisageant les relations comportant les dérivées ou les intégrales il faut tenir compte du fait que les vecteurs de base dans un système de coordonnées curvilignes sont eux-mêmes des fonctions du point.

Nous avons construit un système de coordonnées local, choisi les fonctions pour décrire le mouvement ; le moment est venu d'écrire un système d'équations de la mécanique des fluides à l'aide des variables et des fonctions choisies.

Rappelons que notre problème final consiste dans la construction d'un algorithme aux différences finies basé sur l'application des lois de conservation. Cette approche, on le sait, a des avantages lors du calcul des solutions discontinues. En conséquence, nous partirons de la forme intégrale des équations de la dynamique des gaz.

§ 30. Equations de la dynamique des gaz sous forme des lois de conservation pour un système de coordonnées curvilignes

Construction du système d'équations intégrales de la dynamique des gaz dans une base locale.

Nous nous proposons d'écrire le système d'équations de la dynamique des gaz sous forme intégrale pour le système de coordonnées local présenté précédemment. (Notons bien que le procédé n'est pas univoque!) Partons du système d'équations différentielles de la dynamique des gaz en coordonnées cartésiennes, répondant aux lois de conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial [Q(y)\rho]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)\rho u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)\rho v]}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial [Q(y)\rho u]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)(\rho u^2 + p)]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)\rho uv]}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial [Q(y)\rho v]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)\rho uv]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)(\rho v^2 + p)]}{\partial y} = p\frac{dQ(y)}{dy},\\
&\frac{\partial [Q(y)e]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)v]}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{30.1}$$

Nous nous servons des notations usuelles : t, x, y sont des variables indépendantes dans le temps et dans l'espace, ρ est la densité, ε l'énergie interne de l'unite de masse, p la pression, $e = \rho\left(\varepsilon +\right.$

$+\frac{u^2+v^2}{2}\Big)$, u, v sont les composantes cartésiennes du vecteur vitesse q. La fonction $Q(y) = y^\delta$, où $\delta = 0$ pour l'écoulement plan, $\delta = 1$ pour l'écoulement radial à l'axe de symétrie x.

A ce système doit être adjointe l'équation d'état, par exemple sous la forme $p = p(\rho, \varepsilon)$ (ou sous une autre forme). Cette question a déjà été traitée au § 12 et nous ne nous y arrêterons pas.

Pour construire un système d'équations intégrales dans la base locale et au moyen des composantes de la vitesse choisies au § 29 on va opérer une longue série de transformations successives du système initial (30.1).

Multiplions la seconde équation du système par α', la troisième par β' et additionnons les résultats. La combinaison obtenue servira de nouvelle seconde équation du système. En multipliant la seconde équation du système initial par α'' et la troisième par β'' et en sommant ensuite on obtient une nouvelle troisième équation. Après les transformations décrites le système d'équations de la dynamique des gaz acquiert la forme suivante:

$$\frac{\partial [Q(y)\rho]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)\rho u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)\rho v]}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial [Q(y)\rho(u\alpha'+v\beta')]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Q(y)p\alpha' + Q(y)\rho u(u\alpha'+v\beta')] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}[Q(y)p\beta' + Q(y)\rho v(u\alpha'+v\beta')] -$$

$$-\rho u Q(y)\left(u\frac{\partial \alpha'}{\partial x} - v\frac{\partial \alpha'}{\partial y}\right) - p\left[\frac{\partial \alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta' Q(y)}{\partial y}\right] -$$

$$-\rho v Q(y)\left(u\frac{\partial \beta'}{\partial x} + v\frac{\partial \beta'}{\partial y}\right) = 0, \qquad (30.2)$$

$$\frac{\partial [\rho Q(y)(u\alpha''+v\beta'')]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}Q(y)[p\alpha'' + \rho u(u\alpha''+v\beta'')] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}Q(y)[p\beta'' + \rho v(u\alpha''+v\beta'')] - p\left[\frac{\partial \alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial \beta'' Q(y)}{\partial y}\right] -$$

$$-\rho u Q(y)\left(u\frac{\partial \alpha''}{\partial x} + v\frac{\partial \alpha''}{\partial y}\right) - \rho v Q(y)\left(u\frac{\partial \beta''}{\partial x} + v\frac{\partial \beta''}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial [Q(y)e]}{\partial t} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)u]}{\partial x} + \frac{\partial [Q(y)(e+p)v]}{\partial y} = 0.$$

Intégrons chacune des équations du système (30.2) par rapport à un certain volume V dans l'espace x, y, t de surface S. En utilisant le théorème d'Ostrogradski-Gauss sur la transformation des intégrales de volume en intégrales de surface et les formules donnant le passage au système de coordonnées curviligne local on obtient le sys-

tème intégral suivant:

$$\int\int_S Q(y)\,\rho\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta - \int\int_S Q(y)\,\rho v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt + \int\int_S Q(y)\,\rho\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt = 0,$$

$$\int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta - \int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt +$$

$$+ \int\int_S pQ(y)\,\beta\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt + \int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt -$$

$$- \int\int\int_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta' Q(y)}{\partial y}\right) + \rho Q(y)\,u\left(u\frac{\partial\alpha'}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \rho Q(y)\,v\left(u\frac{\partial\beta'}{\partial x} + v\frac{\partial\beta'}{\partial y}\right)\right] dV = 0,$$

$$\int\int_S \rho Q(y)\,\nu^k\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta - \int\int_S \rho Q(y)\,\nu^k v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt - \qquad (30.3)$$

$$- \int\int_S pQ(y)\,\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt + \int\int_S \rho Q(y)\,\nu^k\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt -$$

$$- \int\int\int_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta'' Q(y)}{\partial y}\right) + \rho Q(y)\,u\left(u\frac{\partial\alpha''}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha''}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \rho Q(y)\,v\left(u\frac{\partial\beta''}{\partial x} + v\frac{\partial\beta''}{\partial y}\right)\right] dV = 0,$$

$$\int\int_S Q(y)\,e\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta - \int\int_S Q(y)\,(e+p)\,v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt + \int\int_S Q(y)\,(e+p)\,\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt = 0.$$

Occupons-nous maintenant de la transformation des expressions incluses dans les intégrales de volume.

En rappelant que les quantités α', β', α'', β'' sont les cosinus directeurs des tangentes aux lignes ξ et η respectivement on vérifie

aisément la validité des relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha'}{\partial x} = -\beta' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x}, \quad \frac{\partial\beta'}{\partial x} = \alpha' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial x}, \\
&\frac{\partial\alpha'}{\partial y} = -\beta' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}, \quad \frac{\partial\beta'}{\partial y} = \alpha' \frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}, \\
&\frac{\partial\alpha''}{\partial x} = -\beta'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x}, \quad \frac{\partial\beta''}{\partial x} = \alpha'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial x}, \\
&\frac{\partial\alpha''}{\partial y} = -\beta'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y}, \quad \frac{\partial\beta''}{\partial y} = \alpha'' \frac{\partial [x, \eta]}{\partial y},
\end{aligned} \tag{30.4}$$

où par $[x, \xi]$, $[x, \eta]$ on entend respectivement les angles formés par l'axe des x et les tangentes aux lignes ξ et η. En s'appuyant sur ces relations et les représentations des composantes contravariantes du vecteur au moyen des coordonnées cartésiennes (29.2) on peut vérifier par des opérations directes qu'ont lieu les relations

$$\begin{aligned}
&u\left(u\frac{\partial\alpha'}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right) + v\left(u\frac{\partial\beta'}{\partial x} + v\frac{\partial\beta'}{\partial y}\right) = \nu\beta\left(u\frac{\partial [x, \xi]}{\partial x} + v\frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}\right), \\
&u\left(u\frac{\partial\alpha''}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha''}{\partial y}\right) + v\left(u\frac{\partial\beta''}{\partial x} + v\frac{\partial\beta''}{\partial y}\right) = \\
&\qquad = -\mu\beta\left(u\frac{\partial [x, \eta]}{\partial x} + v\frac{\partial [x, \eta]}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{30.5}$$

et les termes sous le signe somme dans les intégrales de volume, respectivement pour la seconde et la troisième équation du système (30.3), acquièrent donc la forme

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta' Q(y)}{\partial y}\right) + \rho u Q(y)\left(u\frac{\partial\alpha'}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \rho v Q(y)\left(u\frac{\partial\beta'}{\partial x} + v\frac{\partial\beta'}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dt = \\
&\qquad = \iiint_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta' Q(y)}{\partial y}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \rho Q(y)\, \nu\beta\left(u\frac{\partial [x, \xi]}{\partial x} + v\frac{\partial [x, \xi]}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dt, \\
&\iiint_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta'' Q(y)}{\partial y}\right) + \rho u Q(y)\left(u\frac{\partial\alpha''}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha''}{\partial y}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \rho v Q(y)\left(u\frac{\partial\beta''}{\partial x} + v\frac{\partial\beta''}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dt = \\
&\qquad = \iiint_V \left[p\left(\frac{\partial\alpha'' Q(y)}{\partial x} + \frac{\partial\beta'' Q(y)}{\partial y}\right) - \right. \\
&\qquad \left. - \rho Q(y)\, \mu\beta\left(u\frac{\partial [x, \eta]}{\partial x} + v\frac{\partial [x, \eta]}{\partial y}\right)\right] dx\, dy\, dt.
\end{aligned} \tag{30.6}$$

Passons maintenant des dérivées par rapport aux variables x, y aux dérivées par rapport aux variables, ξ, η dans les expressions (30.6).

Considérons comment se transforme une expression du type $u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}$, F étant une fonction dérivable quelconque, lors du passage aux coordonnées curvilignes.

En se servant des relations (29.6) et (29.2) on vérifie aisément qu'a lieu la relation

$$u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\nu}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial F}{\partial \eta}. \tag{30.7}$$

De façon analogue, en s'appuyant sur les relations (29.2) et (29.6) on vérifie sans peine que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(y)\alpha'}{\partial x}+\frac{\partial Q(y)\beta'}{\partial y}&=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right),\\ \frac{\partial Q(y)\alpha''}{\partial x}+\frac{\partial Q(y)\beta''}{\partial y}&=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right).\end{aligned} \tag{30.8}$$

En utilisant les relations (30.6) à (30.8) mettons le système (30.3) sous la forme

$$\begin{aligned}&\int\int_S Q(y)\,\rho\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S Q(y)\,\rho v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+\\ &\qquad+\int\int_S Q(y)\,\rho\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt=0,\\ &\int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+\int\int_S pQ(y)\,\beta\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-\\ &\quad-\int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+\int\int_S \rho Q(y)\,\mu^k\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-\\ &\quad-\int\int_V\int p\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt-\\ &\quad-\int\int_V\int \rho Q(y)\,\nu\left[\frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[x,\xi]}{\partial \xi}+\frac{\rho}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[x,\xi]}{\partial \eta}\right]\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt=0,\end{aligned} \tag{30.9}$$

$$\begin{aligned}&\int\int_S \rho Q(y)\,v^k\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S pQ(y)\,\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt-\\ &\quad-\int\int_S \rho Q(y)\,v^k v^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+\int\int_S \rho Q(y)\,v^k\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-\end{aligned}$$

$$-\int\int\int_V p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt+$$

$$+\int\int\int_V \rho Q(y)\,\mu\left[\frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[x,\eta]}{\partial\xi}+\frac{\nu}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[x,\eta]}{\partial\eta}\right]\beta\sqrt{g}\,d\xi d\eta\,dt=0,$$

$$\int\int_S Q(y)\,\rho e\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S Q(y)\,(e+p)\,\nu^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\int_S Q(y)\,(e+p)\,\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt=0.$$

On peut vérifier que les dérivées partielles $\frac{\partial[x,\xi]}{\partial\xi}, \frac{\partial[x,\xi]}{\partial\eta}, \frac{\partial[x,\eta]}{\partial\xi}, \frac{\partial[x,\eta]}{\partial\eta}$ s'expriment en fonction de la courbure K des lignes de coordonnées et de l'angle $[\xi, \eta]$ formé par les vecteurs du repère de base de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[x,\xi]}{\partial\xi}&=K_{\eta=\text{const}}\sqrt{g_{11}},\\
\frac{\partial[x,\xi]}{\partial\eta}&=K_{\xi=\text{const}}\sqrt{g_{22}}+\frac{\partial(\eta,\xi)}{\partial\eta},\\
\frac{\partial[x,\eta]}{\partial\xi}&=K_{\eta=\text{const}}\sqrt{g_{11}}-\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi},\\
\frac{\partial[x,\eta]}{\partial\eta}&=K_{\xi=\text{const}}\sqrt{g_{22}}.
\end{aligned}\qquad (30.10)$$

En construisant le schéma aux différences il est plus commode de calculer les seconds membres des relations (30.10), car ils sont liés aux caractéristiques intrinsèques des lignes de coordonnées elles-mêmes. (Par exemple, les courbures sont calculées indépendamment lors de la reconstitution des lignes de coordonnées d'après les points du maillage. L'angle formé par les lignes de coordonnées est également une caractéristique intrinsèque du système de coordonnées.) En utilisant les égalités (30.10) écrivons la forme définitive du système d'équations intégrales de la dynamique des gaz en coordonnées curvilignes locales:

$$\int\int_S \rho Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S \rho\nu^n Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\int_S \rho\mu^n Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt=0, \qquad (30.11_1)$$

$$\int\int_S \rho\mu^k Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S \rho\mu^k\nu^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\iint_S [p\beta+\rho\mu^k\mu^n]\,Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-$$

$$-\int\int\int_V p\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt-$$

$$-\int\int\int_V \rho\nu\left[\mu K_{\eta=\text{const}}+\nu\left(K_{\xi=\text{const}}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\right]\times$$

$$\times\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt=0, \qquad (30.11_2)$$

$$\int\int_S \rho\nu^k Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S [p\beta+\rho\nu^k\nu^n]\,Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int_S \rho\nu^k\mu^n Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-\int\int\int_V p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt+$$

$$+\int\int\int_V \rho\mu\left[\mu\left(K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)+\nu K_{\xi=\text{const}}\right]\times$$

$$\times\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt=0, \qquad (30.11_3)$$

$$\int\int_S Q(y)\,e\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-\int\int_S Q(y)\,(e+p)\,\nu^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\int_S Q(y)\,(e+p)\,\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt=0. \qquad (30.11_4)$$

§ 31. Calcul des coordonnées des points frontières au cours du mouvement

Mode de définition de la position des frontières de calcul et des grandeurs hydrodynamiques associées pour le pas en temps donné. Construction de l'algorithme du mouvement des frontières de calcul et détermination de leur position pour le pas en temps suivant.

Il a été déjà dit qu'un domaine de calcul représente un quadrilatère topologique dont les côtés opposés deux à deux sont considérés comme les lignes de coordonnées de la première et de la seconde famille. Chacune des quatre frontières du quadrilatère topologique peut à son tour se composer de plusieurs frontières de calcul. Le point d'aboutement de deux frontières de calcul ou plus, dit *nœud*, sera suivi tout au long du calcul. En règle générale, les nœuds sont les points de cassure des frontières physiques. On décrit chaque nœud en donnant les numéros des frontières qui y aboutissent après avoir défini le mode de calcul des coordonnées de leur point d'intersection. Choisissons une frontière de calcul. Elle commence par un nœud et aboutit à

un nœud. Définissons le sens positif le long de cette frontière. Dans notre algorithme de calcul une frontière de calcul est définie en donnant les coordonnées cartésiennes d'un certain nombre de points disposés successivement le long d'une direction positive. Le nombre de points ainsi que le mode de leur distribution sont donnés pour chaque frontière. L'ensemble de points frontières comprend obligatoirement les nœuds. Dans l'intervalle entre chaque couple de points frontières voisins la ligne de la frontière est complétée par l'arc d'une courbe lisse (par des segments de droites, dans le cas le plus simple).

Convenons que sur les frontières les grandeurs hydrodynamiques : composantes normale et tangentielle de la vitesse, densité, pression, se rapportent au milieu des arcs complémentaires. Pour abréger, appelons ces arcs « arêtes ». Naturellement, si la frontière de calcul est définie par la donnée de N points frontières, elle sera constituée par $N - 1$ « arêtes ».

On a postulé que l'algorithme de calcul doit suivre le mouvement des frontières particularisées. Il s'ensuit qu'en donnant les coordonnées des points frontières et les valeurs des grandeurs hydrodynamiques susmentionnées sur les « arêtes » à un moment déterminé on trouve nécessairement les positions des frontières de calcul au temps suivant.

Nous en donnons maintenant la description en remettant les formules nécessaires à plus tard. Si l'on admet que pendant le pas en temps envisagé les grandeurs hydrodynamiques ne varient pas, il suffit de déterminer la valeur des vitesses des points frontières pour en déduire la nouvelle position des coordonnées cartésiennes de ces derniers. Les valeurs des vitesses des points frontières se déterminent d'après celles des grandeurs hydrodynamiques données sur les « arêtes » selon que la frontière de calcul en question représente une discontinuité de contact, une onde de choc ou de détonation ou une frontière d'un autre type, autrement dit, selon le *type de la frontière*. Dans le cas d'une discontinuité de contact les vitesses des points frontières se déduisent directement des valeurs des vitesses données sur les arêtes. Pour une onde de choc ou de détonation, les vitesses de la frontière peuvent être calculées à partir des grandeurs données sur les « arêtes », d'après les relations hydrodynamiques connues. Dans d'autres cas, l'algorithme permettant de déterminer ces vitesses doit être donné indépendamment, en même temps que le type de frontière. On a donc établi les coordonnées cartésiennes des points frontières à l'instant suivant.

Maintenant, il faut vérifier que l'ordre de disposition des points le long de la direction positive n'est pas rompu. En d'autres termes, la ligne de frontière (si on la complète par les arcs des courbes) possède-t-elle à l'instant du calcul des points crunodaux ? Si ces derniers existent, on procède, à l'aide d'un certain algorithme, à l'analyse et l'élimination de certains points parmi les points calculés,

de telle sorte que la ligne construite sur les points restants n'ait pas de points crunodaux.

La procédure du mouvement décrite est effectuée pour toutes les frontières de calcul. Cela étant on détermine, à l'instant du calcul, les coordonnées des nœuds, points d'aboutement des frontières. Les points nodaux sont ajoutés respectivement aux suites de points frontières (aux extrémités des frontières), après quoi on effectue une fois encore pour chaque frontière la procédure de vérification de l'ordre de succession des points frontières dans le sens positif et d'élimination des points qui le rompent. Il reste maintenant à faire un dernier pas: d'après les coordonnées des points déterminées sur chaque frontière de calcul il faut construire les arcs complémentaires et distribuer le long de cette ligne les nouveaux points frontières dans le nombre voulu pour la frontière donnée et suivant le mode de distribution approprié à cette dernière.

Les coordonnées de ces points nouvellement obtenus donnent précisément la position de la frontière pour l'instant suivant. En ce qui concerne la donnée des points frontières on se retrouve dans la situation de l'instant initial. Avant d'écrire les formules nécessaires pour l'algorithme du mouvement des frontières décrit plus haut il faut s'arrêter sur la question de la reconstitution de la courbe à l'aide de la suite des points. La méthode la plus simple consistant à relier les points voisins par des segments de droite ne donne pas toujours un résultat satisfaisant. On désire cependant que la méthode de reconstitution soit locale, en d'autres termes, qu'elle fasse appel à un nombre fixé de points. Après de longues recherches nous nous sommes arrêtés sur l'algorithme de reconstitution suivant, qui est assez simple. Il s'avère naturel pour les trois cas suivants:

a) écoulement plan unidimensionnel,

b) écoulement unidimensionnel à symétrie cylindrique,

c) écoulement à symétrie sphérique.

Cet aspect naturel est fort souhaitable, car une technique qui le possède permet de calculer les écoulements bidimensionnels différant peu des écoulements unidimensionnels et ayant un nombre de points de calcul peu élevé en fonction de variable spatiale dont la variation altère faiblement l'écoulement.

Soit une suite de points $0, 1, \ldots, L$ de coordonnées cartésiennes $(x, y)_0$, $(x, y)_1$, $\ldots$, $(x, y)_L$. Choisissons successivement les triplets de points $(x, y)_{i-1}$, $(x, y)_i$, $(x, y)_{i+1}$ et construisons sur chacun d'eux une circonférence dont le paramètre est l'angle $\tilde{\theta}$ de sommet au point $i - 1$ s'appuyant sur l'arc i, $i + 1$. Sa valeur est

$$\tilde{\theta}_{i+1/2} = \operatorname{arctg} \frac{(x_{i-1} - x_i)(y_{i-1} - y_{i+1}) - (x_{i-1} - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i)}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1}) + (y_{i-1} - y_i)(y_{i-1} - y_{i+1})}. \quad (31.1)$$

Reprenons l'opération décrite plus haut en choisissant successivement, depuis l'extrémité, les triplets de points $(x, y)_{i+2}$, $(x, y)_{i+1}$,

$(x, y)_i$. La valeur de l'angle de sommet au point $i + 2$ s'appuyant sur l'arc $i + 1$, i est désignée par $\tilde{\tilde{\theta}}_{i+1/2}$.

Il est évident que

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{i+1/2} = \operatorname{arctg} \frac{(x_{i+2}-x_{i+1})(y_{i+2}-y_i)-(x_{i+2}-x_i)(y_{i+2}-y_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i+1})(x_{i+2}-x_i)+(y_{i+2}-y_i)(y_{i+2}-y_{i+1})}. \quad (31.2)$$

Pour la courbe de reconstitution on prend l'ensemble des arcs de circonférence s'appuyant sur les couples de points (0,1), (1, 2), ..., $(L-1, L)$ et dont les demi-angles au centre sont égaux à

$$\theta_{1/2} = \tilde{\tilde{\theta}}_{1/2}, \quad \theta_{3/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{3/2} + \tilde{\tilde{\theta}}_{3/2}), \ \ldots$$

$$\ldots, \ \theta_{L-3/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{L-3/2} + \tilde{\tilde{\theta}}_{L-3/2}, \quad \theta_{L-1/2} = \tilde{\theta}_{L-1/2}. \quad (31.3)$$

En conséquence, pour réaliser la reconstitution choisie de la courbe il y a lieu, d'après la suite des coordonnées $\{(x, y)_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, L$, de calculer la suite des angles $\{\theta_{i+1/2}\}$, $i = 0, 1, \ldots, L-1$. A partir de ces suites, on parvient aisément à déterminer tous les paramètres métriques nécessaires de la courbe restituée.

Ecrivons maintenant les formules utilisées dans la mise en œuvre de l'algorithme du mouvement des frontières. La longueur de la frontière σ_L est donnée par la somme des longueurs des arcs de reconstitution :

$$\sigma_L = \sum_{i=0}^{L-1} s_{i+1/2},$$

$$s_{i+1/2} = \frac{\theta_{i+1/2}}{\sin \theta_{i+1/2}} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}; \quad (31.4)$$

$s_{i+1/2}$ étant la longueur de l'arc à restituer i, $i + 1$. La longueur l des arcs du début de la frontière $\sigma_l = \sum_{i=0}^{l} s_{i+1/2}$. Pour déterminer les coordonnées des points de la frontière à l'instant $t + \tau$ les composantes normale $W^n_{i+1/2}$ et tangentielle $W^h_{i+1/2}$ de la vitesse rapportées aux milieux des arcs de restitution sont réinterpolées sur les nœuds d'après les formules

$$W^n_i = \frac{s_{i-1/2}W^n_{i+1/2}+s_{i+1/2}W^n_{i-1/2}}{s_{i-1/2}+s_{i+1/2}},$$

$$W^h_i = \frac{s_{i-1/2}W^h_{i+1/2}+s_{i+1/2}W^h_{i-1/2}}{s_{i-1/2}+s_{i+1/2}}. \quad (31.5)$$

La position des coordonnées des nœuds x^*, y^* à l'instant $t + \tau$ est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \tau(\alpha_i' W_i^n + \beta_i' \delta W_i^h), \\ y_i^* &= y_i + \tau(\beta_i' W_i^n - \alpha_i' \delta W_i^h) \end{aligned} \tag{31.6}$$

sur les frontières représentant les lignes ξ, et

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i + \tau(-\alpha_i'' W_i^n + \beta_i'' \delta W_i^h), \\ y_i^* &= y_i + \tau(-\beta_i'' W_i^n - \alpha_i'' \delta W_i^h) \end{aligned} \tag{31.7}$$

sur les frontières représentant les lignes η, où τ est le pas en temps, δ le paramètre : $\delta = 0$ correspond au mouvement suivant la composante normale, $\delta = 1$ au mouvement suivant la vitesse résultante.

Rappelons qu'on entend par composante normale de la vitesse de la frontière, en fonction du type de celle-ci, la vitesse de la substance pour une frontière de contact. Ses points peuvent se déplacer non seulement suivant la composante normale de la vitesse mais aussi simultanément suivant les composantes normale et tangentielle de celle-ci. La vitesse d'onde pour les ondes de détonation et de choc dans ces cas de déplacement de la frontière est déterminée par la composante normale.

Notons que si la chute des grandeurs hydrodynamiques de part et d'autre de la frontière est petite et si son type est l'onde de choc, elle se déplacera automatiquement comme une caractéristique. Pour les frontières d'autres types la vitesse peut être donnée indépendamment du mouvement de la matière. Après la détermination des coordonnées des points frontières à l'instant $t + \tau$ la rupture de l'ordre de disposition des points frontières est révélée par celle de l'inégalité

$$\frac{(x_{i+1}^* - x_i^*)(x_{i+2}^* - x_{i+1}^*) + (y_{i+1}^* - y_i^*)(y_{i+2}^* - y_{i+1}^*)}{(x_{i+1}^* - x_i^*)^2 + (y_{i+1}^* - y_i^*)^2} > 0. \tag{31.8}$$

Si l'inégalité n'est pas satisfaite, l'élément portant le numéro $i + 1$ n'est pas inclus dans la suite et l'inégalité est à vérifier pour le triplet i, $i + 2$, $i + 3$.

Les nœuds à l'instant $t + \tau$ sont déterminés comme les points d'intersection des circonférences construites sur trois points les plus proches de chaque frontière (ces points peuvent être les trois premiers ou les trois derniers points frontières selon que la frontière aboutit au nœud en son point initial ou final). Nous laissons au lecteur le soin d'obtenir les formules correspondantes.

A l'instant $t + \tau$, les coordonnées définitives $[x]^l$, $[y]^l$ des points distribués d'une façon déterminée le long de la frontière sont trouvées

d'après les formules suivantes:

$$[x]^l = x_l^* + \frac{\approx{a}\,(x_{l+1}^* - x_l^*) - \sim{a}\,\approx{a}\,(y_{l+1}^* - y_l^*)}{\sim{a} + \approx{a}},$$
$$[y]^l = y_l^* + \frac{\approx{a}\,(y_{l+1}^* - y_l^*) + \sim{a}\,\approx{a}\,(x_{l+1}^* - x_l^*)}{\sim{a} + \approx{a}}. \tag{31.9}$$

La loi de distribution des points sur la frontière à l'instant $t + \tau$ permet de trouver les longueurs des arcs $[s]^{l+1/2}$ et $[\sigma]^l = \sum_{i=0}^{l-1} [s]^{i+1/2}$. L'arc l, $l+1$ étant choisi de façon à satisfaire à l'inégalité

$$\sigma_l^* \leqslant [\sigma]^k \leqslant \sigma_{l+1}^*,$$

on calcule ensuite $\sim{a}$, $\approx{a}$:

$$\sim{a} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_l^* - [\sigma]^k}{\sigma_{l+1}^* - \sigma_l^*}\,\theta_{l+1/2}^*\right),$$
$$\approx{a} = \operatorname{tg}\left(\frac{[\sigma]^k - \sigma_l^*}{\sigma_{l+1}^* - \sigma_l^*}\,\theta_{l+1/2}^*\right).$$

§ 32. Equations pour la construction des maillages

Formalisation mathématique du problème de la construction d'un maillage aux différences. Algorithme I utilisant les équations « inverses » de Laplace. Augmentation de son efficacité par l'introduction des paramètres variables. Application des représentations conformes et quasi conformes (algorithme II). Construction de maillages voisins de maillages orthogonaux (algorithme III).

Il est commode de représenter un domaine de calcul Ω dans le plan des variables x, y sous la forme d'un quadrilatère muni de frontières curvilignes que nous appellerons pour plus de clarté frontières inférieure, supérieure, gauche et droite. Chacune de ces frontières peut se composer de plusieurs portions de types physiques variés, ce qui est, pour le moment, sans importance, et nous supposons que tous les nœuds sur chacune d'elles sont numérotés l'un après l'autre. Le nombre de nœuds sur les frontières opposées est le même: on a l'indice $j = 0, 1, \ldots, J$ sur les frontières inférieure et supérieure, l'indice $k = 0, 1, \ldots, K$ sur celles de gauche et de droite.

Supposons, ensuite, avoir obtenu la position des nœuds sur les frontières du domaine Ω:

$$\{(x, y)_j^{\text{inf}}\}, \quad \{(x, y)_j^{\text{sup}}\}, \quad \{(x, y)_k^{\text{gauche}}\}, \quad \{(x, y)_k^{\text{droit}}\}. \tag{32.1}$$

Les points anguleux coïncident évidemment:

$$(x, y)_0^{\text{inf}} = (x, y)_0^{\text{gauche}}, \quad (x, y)_J^{\text{inf}} = (x, y)_0^{\text{droit}},$$
$$(x, y)_0^{\text{sup}} = (x, y)_K^{\text{gauche}}, \quad (x, y)_J^{\text{sup}} = (x, y)_K^{\text{droit}}.$$

On pose le problème du calcul des coordonnées des nœuds « intérieurs »

$$\{(x, y)_{j,k}; \quad j = 1, \ldots, J-1; \quad k = 1, \ldots, K-1\}$$

afin que les deux familles de courbes dont l'une est obtenue en reliant les nœuds voisins en indice j l'indice k étant fixe (appelons-la horizontale par convention) et l'autre en reliant les nœuds répondant aux valeurs successives de l'indice k l'indice j étant fixe (famille verticale de courbes), découpent le domaine de calcul en mailles qui ne doivent pas se recouvrir, s'entrecroiser ni dépasser les limites du domaine de calcul, tout en le remplissant sans interstices. En d'autres termes, les courbes des familles verticale et horizontale, considérées comme des lignes de coordonnées, doivent former un système de coordonnées non dégénéré.

Le problème posé peut être traité comme l'analogue aux différences du problème de la détermination des fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ assurant l'application univalente sur le domaine de calcul Ω d'un certain domaine paramétrique D dans le plan ξ, η tel, par exemple, un carré unitaire $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Les valeurs frontières de ces fonctions sont les fonctions données:

$$\begin{aligned}
&x(\xi, 0) = x^{\text{inf}}(\xi), && y(\xi, 0) = y^{\text{inf}}(\xi), && 0 \leqslant \xi \leqslant 1;\\
&x(\xi, 1) = x^{\text{sup}}(\xi), && y(\xi, 1) = y^{\text{sup}}(\xi), && 0 \leqslant \xi \leqslant 1;\\
&x(0, \eta) = x^{\text{gauche}}(\eta), && y(0, \eta) = y^{\text{gauche}}(\eta), && 0 \leqslant \eta \leqslant 1;\\
&x(1, \eta) = x^{\text{droit}}(\eta), && y(1, \eta) = y^{\text{droit}}(\eta), && 0 \leqslant \eta \leqslant 1,
\end{aligned} \tag{32.2}$$

qui représentent les analogues continus des ensembles discrets de points (32.1), donnant la position des frontières du domaine Ω:

$$x^{\text{inf}}(j/J) = x_j^{\text{inf}}, \quad x^{\text{gauche}}(k/K) = x_k^{\text{gauche}}, \ldots \tag{32.3}$$

Il est évident que dans cette formulation le problème de la construction du maillage est fort vague et le champ est libre pour diverses spéculations. Nous commençons par exposer l'algorithme généralisant celui proposé dans l'ouvrage [164]. Pour alléger les références, appelons-le *algorithme* I. Il consiste à rechercher deux familles de courbes du maillage en tant que lignes de niveau des fonctions $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ satisfaisant aux équations de Laplace

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \tag{32.4}$$

avec les conditions aux limites déterminées par l'exigence de correspondance entre les points situés sur le contour du domaine Ω

et les points situés sur le contour du domaine paramétrique D. Les équations (32.4) peuvent être converties en équations pour les fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \tag{32.5}$$

où

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2.$$

Notons que sous cette formulation l'existence de l'application univalente est assurée. En effet, introduisons une représentation conforme auxiliaire $x(p, q)$, $y(p, q)$ sur un domaine donné d'un certain rectangle $0 \leqslant p \leqslant p^*$, $0 \leqslant q \leqslant q^*$, qui fait correspondre aux quatre angles de ce dernier quatre « angles » du domaine Ω, ce qui est possible pour un certain rapport p^*/q^*. L'invariance des équations (32.4) par rapport à la représentation conforme $\xi(p, q)$, $\eta(p, q)$ du rectangle $\{0 \leqslant p \leqslant p^*, \ 0 \leqslant q \leqslant q^*\}$ sur le carré D entraîne qu'il existe une application univalente $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ satisfaisant aux équations (32.5) et que cette application est unique. On démontre sans peine que les applications $\xi(p, q)$, $\eta(p, q)$ sont univalentes en utilisant l'harmonicité du rapport

$$\frac{\xi_p \eta_q - \xi_q \eta_p}{\xi_p^2 + \xi_q^2}.$$

Les essais numériques effectués sur l'application des équations (32.4) au calcul des maillages aux différences ont montré la validité de ces dernières dans ce sens que même en cas de frontières « très courbes » les nœuds calculés sont situés à l'intérieur du contour du domaine et les mailles ne se recouvrent pas. Toutefois, dans certains cas le maillage obtenu est peu satisfaisant pour telle ou telle raison (par exemple, certaines de ses courbes approchent les frontières à un angle très faible ou bien on veut modifier les dimensions des mailles dans certaines régions du domaine sans perturber la distribution des points sur le contour). Ce genre d'objectifs peut être réalisé en rendant plus « souple » l'application grâce à l'introduction d'un certain nombre de paramètres variables. Pour ce faire opérons le changement de variables

$$\xi = \xi(\varphi, \psi), \quad \eta = \eta(\varphi, \psi).$$

(32.5) se voit alors remplacé par un système d'équations de cette forme:

$$\begin{aligned} \alpha x_{\varphi\varphi} - 2\beta x_{\varphi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} &= a x_\varphi + b x_\psi, \\ \alpha y_{\varphi\varphi} - 2\beta y_{\varphi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} &= a y_\varphi + b y_\psi, \end{aligned} \tag{32.6}$$

où

$$\alpha = x_\psi^2 + y_\psi^2, \quad \beta = x_\varphi x_\psi + y_\varphi y_\psi, \quad \gamma = x_\varphi^2 + y_\varphi^2,$$

$$a = \frac{\alpha\xi_{\varphi\varphi} - 2\beta\xi_{\varphi\psi} + \gamma\xi_{\psi\psi}}{\xi_\varphi\eta_\psi - \xi_\psi\eta_\varphi}\eta_\psi - \frac{\alpha\eta_{\varphi\varphi} - 2\beta\eta_{\varphi\psi} + \gamma\eta_{\psi\psi}}{\xi_\varphi\eta_\psi - \xi_\psi\eta_\varphi}\xi_\psi, \qquad (32.7)$$

$$b = \frac{\alpha\eta_{\varphi\varphi} - 2\beta\eta_{\varphi\psi} + \gamma\eta_{\psi\psi}}{\xi_\varphi\eta_\psi - \xi_\psi\eta_\varphi}\xi_\varphi - \frac{\alpha\xi_{\varphi\varphi} - 2\beta\xi_{\varphi\psi} + \gamma\xi_{\psi\psi}}{\xi_\varphi\eta_\psi - \xi_\psi\eta_\varphi}\eta_\varphi.$$

En supposant les fonctions $\xi(\varphi, \psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ données par l'ensemble de leurs valeurs $\{(\xi, \eta)_{j,k}\}$ aux nœuds du maillage on peut écrire un système d'équations aux différences finies approchant (32.6), (32.7). La solution de ce système fournit un maillage dont les lignes horizontales, images des droites $\psi = \psi_k = \text{const}$, représentent, du point de vue de l'application indiquée plus haut, les images des lignes $\xi = \xi(\varphi, \psi_k)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi_k)$. De façon analogue, les lignes verticales du maillage sont des images des lignes $\xi = \xi(\varphi_j, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi_j, \psi)$. En conséquence, en se donnant les diverses fonctions $\xi = \xi(\varphi, \psi)$, $\eta = \eta(\varphi, \psi)$, on a de larges possibilités de « commander » les lignes du maillage à l'intérieur du domaine sans modifier la distribution des points sur ses frontières.

Notons que les considérations exposées plus haut concernant l'existence de l'application univalente et son unicité restent en vigueur en application aux fonctions quelconques $\xi(\varphi, \psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ dont le jacobien n'est pas nul sur le carré D.

Pratiquement, il serait souhaitable que les fonctions $\xi(\varphi, \psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ se définissent par un petit nombre de paramètres. Pour ces paramètres on utilisera les quatre suites:

$$\{s_j^{\text{inf}}\}, \quad \{s_j^{\text{sup}}\}, \quad \{s_k^{\text{gauche}}\}, \quad \{s_k^{\text{droit}}\}$$

décrites au § 23 qui traduisent la disposition des nœuds du réseau le long du contour de la frontière. Elles servent à calculer, à l'aide des formules (23.4), les quantités $(\xi, \eta)_{j,k}$ participant à la construction des équations aux différences. La représentation $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ nous fournira les lignes du maillage, images des segments rectilignes reliant les points homologues des frontières inférieure et supérieure, gauche et droite (voir fig. 23.3).

Nous remettons au paragraphe suivant la composition du système d'équations aux différences finies et sa résolution.

Envisageons maintenant une autre approche du choix des équations pour le calcul des maillages aux différences finies. Celle-ci fait appel aux représentations conformes et quasi conformes. Il a été déjà indiqué que le domaine de calcul, qu'on a intérêt à représenter comme un quadrilatère à frontières curvilignes, peut être représenté de façon conforme sur un rectangle $\bar{D}$: $\{0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant p^*, 0 \leqslant \bar{\eta} \leqslant q^*\}$ avec un rapport déterminé des côtés $p^*/q^* = 1$, de ma-

nière à ce qu'aux quatre angles du domaine Ω correspondent quatre angles de $\overline{D}$. Admettons que cette représentation est décrite par les fonctions $\overline{x}(\overline{\xi}, \overline{\eta})$, $\overline{y}(\overline{\xi}, \overline{\eta})$. Il nous sera plus commode, par la suite, de considérer la représentation du domaine Ω sur un carré unité D: $\{0 \leqslant \xi \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$ décrite par les fonctions

$$x(\xi, \eta) = \overline{x}(p^*\xi, q^*\eta), \quad y(\xi, \eta) = \overline{y}(p^*\xi, q^*\eta).$$

On va l'appeler « conforme » en marquant par les guillemets le fait d'« allongement » des coordonnées.

Le problème de la recherche des fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ et du paramètre l peut être formulé comme le problème variationnel de minimisation de la fonctionnelle

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \left[l(x_\xi^2 + y_\xi^2) + \frac{1}{l}(x_\eta^2 + y_\eta^2) \right] d\xi\, d\eta \qquad (32.8)$$

sur la classe de fonctions munies des propriétés suivantes:

1) $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ sont définies sur le carré D;

2) sur chacun de ses côtés elles sont définies de telle sorte qu'elles établissent une bijection entre les points d'un côté du carré D et les points de la frontière correspondante de Ω;

3) $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ sont prolongeables à l'intérieur du carré D de façon arbitraire mais de telle manière que l'intégrale (32.8) existe.

Les fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ de la classe décrite et le nombre l assurant le minimum de la fonctionnelle Φ donnent la représentation « conforme » recherchée. En effet *)

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \left[\left(\sqrt{l} x_\xi - \frac{1}{\sqrt{l}} y_\eta \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{l}} x_\eta + \sqrt{l} y_\xi \right)^2 \right] d\xi\, d\eta + S, \qquad (32.9)$$

où $S = \iint_D (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)\, d\xi\, d\eta$ représente l'aire du domaine donné Ω. Le minimum $\Phi = S$ est atteint sur les fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ satisfaisant aux équations

$$\begin{cases} \sqrt{l} x_\xi - \dfrac{1}{\sqrt{l}} y_\eta = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{l}} x_\eta + \sqrt{l} y_\xi = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{\overline{\xi}} - y_{\overline{\eta}} = 0, \\ x_{\overline{\eta}} + y_{\overline{\xi}} = 0, \end{cases} \qquad (32.10)$$

ce qui établit la proposition.

Dans la représentation « conforme » décrite par les fonctions

*) Le principe variationnel de ce type ainsi que l'identité analogue furent étudiés dès Riemann.

$x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ s'établit une correspondance bien déterminée entre les points sur la frontière Γ du domaine Ω et les points situés sur les côtés du carré D. Notamment, aux points donnés $\{(x, y)_j^{\text{inf}}\}$ des suites (32.1) correspondent les points situés sur le côté inférieur de coordonnées $\{\xi_j^{\text{inf}}, 0\}$, aux points $\{(x, y)_j^{\text{sup}}\}$ les points situés sur le côté supérieur de coordonnées $\{\xi_j^{\text{sup}}, 1\}$, aux points $\{(x, y)_k^{\text{gauche}}\}$ les points situés sur le côté gauche de coordonnées $\{0, \eta_k^{\text{gauche}}\}$, aux points $\{(x, y)_k^{\text{droit}}\}$ les points situés sur le côté droit de coordonnées $\{1, \eta_k^{\text{droit}}\}$. Relions les points homologues sur les côtés opposés du carré D par des segments de droite. Le problème du calcul de la représentation « conforme » aux nœuds fixes sur la frontière du domaine Ω se ramène alors au calcul du paramètre l, des valeurs des coordonnées $\{\xi_j^{\text{inf}}\}$, $\{\xi_j^{\text{sup}}\}$, $\{\eta_k^{\text{gauche}}\}$, $\{\eta_k^{\text{droit}}\}$ et des coordonnées du maillage $\{(x, y)_{j, k}\}$, images des points d'intersection des segments envisagés sur le carré D. L'algorithme de la réalisation numérique de ce problème est exposé dans l'ouvrage [36]. Il s'est avéré assez compliqué surtout dans la partie concernant la recherche des suites $\{\xi_j^{\text{inf}}\}$, $\{\xi_j^{\text{sup}}\}$, $\{\eta_k^{\text{gauche}}\}$, $\{\eta_k^{\text{droit}}\}$.

On pourrait envisager une formulation légèrement différente du problème de la construction du maillage : il s'agit, en fixant la position des nœuds sur le carré paramétrique D, de permettre aux nœuds du maillage de « flotter » sur le profil donné des frontières du domaine Ω jusqu'à ce qu'ils occupent une position compatible avec la représentation « conforme ». Un tel algorithme est beaucoup plus facile à réaliser (cf. par exemple [90]). Toutefois, nous nous sommes abstenus de le faire pour diverses raisons, et nous avons insisté sur la formulation décrite plus haut. L'une de ces raisons réside dans le fait que dans les problèmes présentant une géométrie compliquée on est obligé de découper la « carte » du problème en plusieurs domaines et de calculer un maillage indépendamment pour chacun de ces derniers. Dans ce cas, le fait qu'il est possible de prescrire la position des nœuds du maillage sur les frontières permet de les donner communs sur la limite de deux domaines, ce qui allège le calcul, car on n'a plus à procéder à la réinterpolation obligatoire des grandeurs le long des frontières. En second lieu, le fait de pouvoir commander la distribution des points sur les frontières permet à l'opérateur d'utiliser rationnellement les « réserves » disponibles (très limitées, d'habitude) en s'inspirant du contenu concret du problème.

Revenons aux algorithmes de calcul du maillage la disposition des points sur les frontières du domaine étant prescrite, et remplaçons dans les raisonnements précédents la représentation « conforme » de métrique

$$dx^2 + dy^2 = \frac{1}{l} d\xi^2 + l\, d\eta^2$$

par la représentation quasi conforme pour laquelle

$$dx^2 + dy^2 = g_{11} d\xi^2 + 2g_{12}\, d\xi\, d\eta + g_{22}\, d\eta^2, \tag{32.11}$$

où g_{11}, g_{12}, g_{22} sont fonctions de ξ, η, l. La fonctionnelle (32.8) se met alors sous la forme

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_D \frac{g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{32.12}$$

Définissons la quantité ω $(0 < \omega < \pi)$ par la formule

$$\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}.$$

Par une vérification directe on établit qu'a lieu l'identité

$$g_{22}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2g_{12}(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + g_{11}(x_\eta^2 + y_\eta^2) \equiv$$
$$\equiv 2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + X^2 + Y^2,$$

où

$$X = \sqrt{g_{22}}\left(x_\xi \sin\frac{\omega}{2} + y_\xi \cos\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{g_{11}}\left(x_\eta \sin\frac{\omega}{2} - y_\eta \cos\frac{\omega}{2}\right),$$

$$Y = \sqrt{g_{22}}\left(-x_\xi \cos\frac{\omega}{2} + y_\xi \sin\frac{\omega}{2}\right) + \sqrt{g_{11}}\left(x_\eta \cos\frac{\omega}{2} + y_\eta \sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\Phi \geqslant \iint_D (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)\, d\xi\, d\eta = S.$$

La valeur minimale $\Phi = S$ est atteinte s'il existe des fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ satisfaisant aux équations $X = 0$, $Y = 0$ qui peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11}g_{12} - g_{12}^2}\, x_\xi &= g_{11} y_\eta - g_{12} y_\xi, \\ \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, x_\eta &= g_{12} y_\eta - g_{22} y_\xi \end{aligned} \tag{32.13}$$

et qui sont connues dans la théorie des représentations quasi conformes comme les équations de Beltrami.

Il nous paraît utile d'attirer l'attention du lecteur sur le problème suivant de la théorie des représentations quasi conformes : indiquer une classe de fonctions g_{11}, g_{12}, g_{22} de ξ, η, l telle que pour tout quadrilatère curviligne il existe pour un certain l une seule représentation quasi conforme sur un carré unité

$$\{0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}.$$

L'exemple des représentations « conformes » pour lesquelles $g_{11} = 1/l$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = l$ traité plus haut montre que cette classe n'est pas vide.

Un autre exemple instructif que l'on peut considérer comme la base de l'algorithme de calcul des maillages aux différences, est

étudié dans l'ouvrage [9]. On se propose d'isoler une classe spéciale de représentations quasi conformes en se donnant les coefficients g_{11}, g_{12}, g_{22} de la forme quadratique (32.11), définissant la métrique de la représentation, sous la forme

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^{2q(\xi)}, \quad g_{22} = e^{2p(\eta)}, \\ g_{12} &= \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos[\beta(\eta) - \alpha(\xi)], \end{aligned} \tag{32.14}$$

contenant quatre fonctions arbitraires d'un argument ξ ou η. Ces fonctions $q(\xi)$, $p(\eta)$, $\alpha(\xi)$, $\beta(\eta)$ sont à déterminer au cours de la procédure de minimisation de la fonctionnelle (32.12) sur la classe des fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ (analogue à celle décrite plus haut pour la fonctionnelle « conforme » (32.8)), qui prennent, sur la frontière du carré D, les valeurs données (32.2).

On démontre dans l'ouvrage [9] que la valeur minimale $\Phi = S$ est atteinte sur l'unique ensemble de fonctions

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \quad q = q(\xi), \quad \alpha = \alpha(\xi), \\ y &= y(\xi, \eta), \quad p = p(\eta), \quad \beta = \beta(\eta) \end{aligned}$$

à condition que p, q, α, β soient naturellement normés et qu'il y ait certaines restrictions au domaine Ω et à la répartition des points frontières, i.e. à la paramétrisation des courbes frontières. (Ces restrictions permettent l'existence des représentations de la classe envisagée pour lesquelles la valeur extrémale $\Phi = S$.) Nous n'allons pas présenter cette démonstration, car elle prendrait trop de place. Au paragraphe suivant, nous décrirons succinctement la réalisation numérique de l'algorithme correspondant de la construction du maillage (pour alléger les références ultérieures appelons-le *algorithme* II).

En conclusion de ce paragraphe envisageons un autre choix d'équations pour le problème envisagé, extrait de l'ouvrage [91]. Examinons la fonctionnelle « conforme » (32.8) et, en partant de l'exigence de sa minimisation, choisissons l localement en chaque point. Il est évident que l'on y parvient pour

$$l = \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}}. \tag{32.15}$$

En substituant l obtenu dans (32.8) on arrive à une fonctionnelle de la forme suivante

$$\Phi = \iint_D \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}\, d\xi\, d\eta. \tag{32.16}$$

En vertu de l'identité évidente

$$(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) = (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2,$$

la fonctionnelle (32.16) peut se mettre sous la forme

$$\Phi = \int\int_D \frac{(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2}{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}}\, d\xi\, d\eta + \\ + \int\int_D (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)\, d\xi\, d\eta.$$

En conséquence, si le minimum absolu Φ égal à S peut être atteint, les fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ qui l'assurent vérifient l'égalité

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \qquad (32.17)$$

qui n'est autre que la condition d'orthogonalité du maillage. Il reste à regretter que la fonctionnelle (32.16) ne soit pas convexe : on peut construire des exemples de la non-unicité de la solution d'un système correspondant d'équations d'Euler-Lagrange pour cette fonctionnelle. Toutefois, ceci ne représente pas un obstacle à la réalisation d'un algorithme numérique de calcul du maillage sur la base de la fonctionnelle (32.16). Pour le rendre plus souple du point de vue des propriétés du maillage aux différences à obtenir, on peut envisager une fonctionnelle plus générale :

$$\Phi = \int\int_D \omega \sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}\, d\xi\, d\eta, \qquad (32.18)$$

où $\omega > 0$ est une certaine fonction de pondération. En particulier, de bons maillages aux différences sont réalisés en utilisant comme cette fonction

$$\omega = |\, x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \,|. \qquad (32.19)$$

On convient d'appeler l'algorithme correspondant *algorithme* III.

Nous terminons ici l'analyse de la question de la formalisation mathématique du problème de la construction du maillage aux différences. Comme il a déjà été noté au début du paragraphe, ce problème est fort vague et il existe bien des possibilités pour les diverses solutions. L'exigence de l'optimisation imposée à telle ou telle classe de maillages pour certaines classes de problèmes représente une question fort importante qui présente un intérêt pour nos études ultérieures.

§ 33. Réalisation numérique des algorithmes de construction des maillages

Equations aux différences ayant lieu lors de la résolution numérique des systèmes d'équations répondant aux algorithmes I et II. Les procédures itératives les plus simples pour leur résolution. Réalisation numérique de l'algorithme III par la méthode des directions alternées. Optimisation des paramètres itératifs. Exemples illustrant les algorithmes de construction des maillages.

Comme il a déjà été indiqué au début du paragraphe précédent, par les mots « construire un maillage aux différences dans un domaine de calcul Ω » on entend le calcul des coordonnées des nœuds « intérieurs »

$$\{(x, y)_{j,k};\ j=1, \ldots, J-1;\ k=1, \ldots, K-1\}$$

d'après les coordonnées données (32.1) des nœuds sur les frontières du domaine. L'algorithme de leur calcul doit satisfaire au moins aux exigences suivantes:

1. Les nœuds du maillage $\{(x, y)_{j,k}\}$ se trouvent à l'intérieur du contour du domaine Ω.

2. Lors des petits déplacements des frontières du domaine de calcul les coordonnées des nœuds du maillage varient peu (i.e. les vitesses des nœuds intérieurs du maillage sont à concorder de manière raisonnable avec celles du mouvement des frontières).

3. Si on traite les deux familles de lignes du maillage construites sur ses nœuds (cf. § 32) comme des lignes de coordonnées, elles doivent former un système de coordonnées non dégénéré.

Pour déterminer les coordonnées $\{(x, y)_{j,k}\}$ on compose un système d'équations aux différences en partant de telles ou telles équations différentielles ou fonctionnelles variationnelles dont des exemples ont été traités au paragraphe précédent. Ces équations sont assez compliquées, car elles approchent un système d'équations non linéaires aux dérivées partielles du type elliptique. Leur résolution nécessite la mise en œuvre d'algorithmes itératifs spéciaux qui pourraient constituer l'objet de recherches spéciales. Aussi ne nous arrêtons-nous que sur la description des plus simples de ces algorithmes basés sur les itérations explicites. Leur convergence étant très lente, le problème de l'élaboration de processus rapidement convergents n'est pas levé. La situation est simplifiée par le fait que nous ne nous intéressons qu'au maillage aux différences et non à la résolution du système d'équations que nous avons inventé à dessein pour construire le maillage. Si bien qu'on peut d'habitude mettre fin à la procédure itérative sans avoir à se soucier de la conduire jusqu'à la convergence. Toutefois, il convient de noter que lors du calcul des problèmes instationnaires avec les frontières mobiles il faut s'assurer qu'une telle rupture de la procédure de l'itération des équations pour le maillage n'amène pas une augmentation artificielle injustifiée de la vitesse de ses nœuds par rapport aux vitesses des frontières. Il s'avérerait notamment plus rationnel de mener la procédure itérative pour les vitesses des nœuds du maillage parallèlement avec le calcul de leurs coordonnées ou au lieu de la procédure pour les coordonnées en déterminant ensuite les coordonnées des nœuds par intégration des vitesses par rapport au temps.

En exposant un algorithme pour le calcul des maillages on est immédiatement amené à considérer la question de l'approximation

de départ. Pour le pas de départ d'un problème instationnaire, quand on ne dispose que des contours des frontières, on peut prendre comme approximation initiale un maillage calculé par interpolation d'après le § 23. Par la suite, on utilise ordinairement comme approximation de départ soit le maillage du pas en temps précédent, soit le résultat de l'extrapolation d'après les deux pas précédents.

Faisons maintenant la description des algorithmes permettant de réaliser numériquement la construction d'un maillage aux différences. Occupons-nous tout d'abord de l'algorithme I fondé sur l'approximation des équations différentielles (32.6), (32.7). En vertu de leur invariance par rapport à l'allongement des variables φ et ψ on peut poser les pas du maillage $\Delta\varphi = \Delta\psi = 1$ et approcher les dérivées incluses dans ces équations par des relations aux différences simples, telles que, par exemple:

$$\begin{aligned}
x_\varphi &\approx [\hat{x}_\varphi]_{j,k} = \frac{1}{2}(x_{j+1,k} - x_{j-1,k}),\\
x_\psi &\approx [\hat{x}_\psi]_{j,k} = \frac{1}{2}(x_{j,k+1} - x_{j,k-1}),\\
x_{\varphi\varphi} &\approx [\hat{x}_{\varphi\varphi}]_{j,k} = x_{j+1,k} - 2x_{j,k} + x_{j-1,k},\\
x_{\varphi\psi} &\approx [\hat{x}_{\varphi\psi}]_{j,k} = \frac{1}{4}(x_{j+1,k+1} - x_{j-1,k+1} -\\
&\qquad - x_{j+1,k-1} + x_{j-1,k-1}),\\
x_{\psi\psi} &\approx [\hat{x}_{\psi\psi}]_{j,k} = x_{j,k+1} - 2x_{j,k} + x_{j,k-1}.
\end{aligned} \tag{33.1}$$

Des relations analogues sont utilisées également pour d'autres fonctions entrant dans les équations (32.6), (32.7). Les fonctions $\xi(\varphi, \psi)$, $\eta(\varphi, \psi)$ dans ce cas soit sont supposées données sous forme de table de leurs valeurs $\{(\xi, \eta)_{j,k}\}$ aux nœuds du maillage, soit, comme il a déjà été indiqué au § 32, ces valeurs sont déterminées à l'aide des formules (23.4).

Les équations aux différences sont écrites en chacun des nœuds intérieurs $j = 1, \ldots, J-1$; $k = 1, \ldots, K-1$. Les valeurs frontières $\{(x, y)_{j,0}\}$, $\{(x, y)_{j,K}\}$, $\{(x, y)_{0,k}\}$, $\{(x, y)_{J,k}\}$ sont données par les suites (32.1). Pour résoudre le système d'équations établi on applique le processus itératif explicite le plus simple:

$$\begin{aligned}
x_{j,k}^{(i+1)} &= x_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)}[\hat{\alpha}\hat{x}_{\varphi\varphi} - 2\hat{\beta}\hat{x}_{\varphi\psi} + \hat{\gamma}\hat{x}_{\psi\psi} - \hat{a}\hat{x}_\varphi - \hat{b}\hat{x}_\psi]_{j,k}^{(i)},\\
y_{j,k}^{(i+1)} &= y_{j,k}^{(i)} + \theta_{j,k}^{(i)}[\hat{\alpha}\hat{y}_{\varphi\varphi} - 2\hat{\beta}\hat{y}_{\varphi\psi} + \hat{\gamma}\hat{y}_{\psi\psi} - \hat{a}\hat{y}_\varphi - \hat{b}\hat{y}_\psi]_{j,k}^{(i)},
\end{aligned} \tag{33.2}$$

où

$$\theta_{j,k}^{(i)} = \frac{\theta}{2(\hat{\alpha}_{j,k} + \hat{\gamma}_{j,k}) + |\hat{\beta}_{j,k}|}.$$

Ici i est le numéro d'itération, θ le paramètre de relaxation usuel pouvant, en général, varier au cours du processus itératif. On trouve

des recommandations pour le choix de ce paramètre dans les ouvrages consacrés aux méthodes des différences finies de résolution des équations elliptiques (voir, par exemple, [95], [102]). D'après la théorie linéaire (coefficients « gelés » des équations) le processus est stable si $0 < \theta < 2$. Le processus converge lentement mais compte tenu des remarques faites plus haut, il convient à notre but.

Procédons maintenant à la description de l'algorithme II fondé sur la minimisation de la fonctionnelle (32.12). Après la substitution des coefficients (32.14) celle-ci prend la forme

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{p-q}(x_\xi^2 + y_\xi^2) - 2\cos(\beta-\alpha)(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) + e^{q-p}(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{\sin(\beta-\alpha)} d\xi\, d\eta, \tag{33.3}$$

où les fonctions $q = q(\xi)$, $p = p(\eta)$, $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\eta)$ sont à établir au cours de la procédure de minimisation, de même que les fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ dont les valeurs aux nœuds (j, k) fournissent le maillage recherché. On suppose que

$$0 < \beta(\eta) - \alpha(\xi) < \pi. \tag{33.4}$$

La technique de minimisation de la fonctionnelle Φ la plus simple s'appuie sur le processus itératif explicite pour les équations elliptiques suivantes qui représentent les équations aux variations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle Φ ne pouvant être minimisée que par rapport à x et y:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\xi} A \frac{\partial x}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta} C \frac{\partial x}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi} B \frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta} B \frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial\xi} A \frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta} C \frac{\partial y}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi} B \frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta} B \frac{\partial y}{\partial\xi}\right) = 0, \end{aligned} \tag{33.5}$$

où

$$A = \frac{e^{p(\eta)-q(\xi)}}{\sin[\beta(\eta)-\alpha(\xi)]}, \quad C = \frac{e^{q(\xi)-p(\eta)}}{\sin[\beta(\eta)-\alpha(\xi)]}, \quad B = \operatorname{cotg}[\beta(\eta)-\alpha(\xi)]. \tag{33.6}$$

On vérifie aisément qu'au point stationnaire de la fonctionnelle on doit avoir les égalités

$$\begin{aligned} p(\eta) - q(\xi) &= \ln \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \equiv \lambda(\xi, \eta), \\ \beta(\eta) - \alpha(\xi) &= \arccos \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}} \equiv \omega(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{33.7}$$

En calculant les valeurs des fonctions $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ à l'itération suivante on doit considérer les fonctions p, q, α, β comme des

paramètres entrant dans les coefficients des équations (33.5) et on doit les calculer d'après les valeurs actuelles $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ à l'aide des formules découlant de (33.7):

$$\begin{aligned}
p(\eta) &= \int_0^1 \lambda(\xi, \eta)\, d\xi - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \lambda(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\\
q(\xi) &= -\int_0^1 \lambda(\xi, \eta)\, d\eta + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \lambda(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\\
\beta(\eta) &= \int_0^1 \omega(\xi, \eta)\, d\xi - \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \omega(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\\
\alpha(\xi) &= -\int_0^1 \omega(\xi, \eta)\, d\eta + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \omega(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.
\end{aligned} \tag{33.8}$$

Dans l'écriture aux différences des dérivées dans les équations (33.5), on a recours aux opérateurs aux différences les plus simples. L'expression $-\frac{\partial}{\partial\xi} A \frac{\partial x}{\partial\xi}$ dans l'écriture aux différences se met sous la forme

$$-\frac{1}{2}(A_{j+1/2,\,k+1/2} + A_{j+1/2,\,k-1/2})(x_{j+1,\,k} - x_{j,\,k}) +$$

$$+\frac{1}{2}(A_{j-1/2,\,k+1/2} + A_{j-1/2,\,k-1/2})(x_{j,\,k} - x_{j,\,k-1}), \tag{33.9}$$

où les indices demi-entiers traduisent le fait que, par exemple, la grandeur $A_{j-1/2,\,k-1/2}$ est rapportée à la maille de numéro $(j - 1/2, k - 1/2)$ et se calcule d'après la formule (33.13) présentée plus bas. L'expression $-\frac{\partial}{\partial\eta} C \frac{\partial x}{\partial\eta}$ est remplacée par une formule analogue:

$$-\frac{1}{2}(C_{j+1/2,\,k+1/2} + C_{j-1/2,\,k+1/2})(x_{j,\,k+1} - x_{j,\,k}) +$$

$$+\frac{1}{2}(C_{j+1/2,\,k-1/2} + C_{j-1/2,\,k-1/2})(x_{j,\,k} - x_{j,\,k-1}). \tag{33.10}$$

L'écriture de la somme des dérivées mixtes $\frac{\partial}{\partial\xi} B \frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta} B \frac{\partial x}{\partial\xi}$ est un

peu plus compliquée:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}B_{j+1/2,\,k+1/2}(x_{j+1,\,k+1}-x_{j,\,k})-\\&-\frac{1}{2}B_{j-1/2,\,k+1/2}(x_{j-1,\,k+1}-x_{j,\,k})-\\&-\frac{1}{2}B_{j+1/2,\,k-1/2}(x_{j+1,\,k-1}-x_{j,\,k})+\\&+\frac{1}{2}B_{j-1/2,\,k-1/2}(x_{j-1,\,k-1}-x_{j,\,k}).\end{aligned}\tag{33.11}$$

Les expressions correspondantes pour la seconde équation (33.5) s'obtiennent de (33.9) à (33.11) en substituant y à x.

Les formules aux différences pour les fonctions $p(\eta)$, $q(\xi)$, $\beta(\eta)$, $\alpha(\xi)$, définies par les valeurs aux points « demi-entiers »: $\{p_{k-1/2}\}$, $\{q_{j-1/2}\}$, $\{\beta_{k-1/2}\}$, $\{\alpha_{j-1/2}\}$, s'obtiennent à partir de (33.8) après qu'on a remplacé les intégrales par les sommes correspondantes:

$$\begin{aligned}p_{k-1/2}&=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\lambda_{j-1/2,\,k-1/2}-\lambda^*,\\q_{j-1/2}&=-\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{j-1/2,\,k-1/2}+\lambda^*,\\\beta_{k-1/2}&=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\omega_{j-1/2,\,k-1/2}-\omega^*,\\\alpha_{j-1/2}&=-\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\omega_{j-1/2,\,k-1/2}+\omega^*,\end{aligned}\tag{33.12}$$

où

$$\lambda^*=\frac{1}{2JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{j-1/2,\,k-1/2},$$

$$\omega^*=\frac{1}{2JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\omega_{j-1/2,\,k-1/2}.$$

En calculant les quantités $\lambda_{j-1/2,\,k-1/2}$, $\omega_{j-1/2,\,k-1/2}$ entrant dans (33.12), on utilise les formules (33.7) pour les fonctions $\lambda(\xi, \eta)$, $\omega(\xi, \eta)$, pour lesquelles les dérivées x_ξ, x_η, y_ξ, y_η sont remplacées, dans la maille $(j-1/2,\ k-1/2)$, par les expressions aux diffé-

rences

$$(x_\xi)_{j-1/2,\,k-1/2}=\frac{1}{2}(x_{j,\,k}-x_{j-1,\,k}+x_{j,\,k-1}-x_{j-1,\,k-1}),$$

$$(x_\eta)_{j-1/2,\,k-1/2}=\frac{1}{2}(x_{j,\,k}-x_{j,\,k-1}+x_{j-1,\,k}-x_{j-1,\,k-1}),$$

les $(y_\xi)_{j-1/2,\,k-1/2}$, $(y_\eta)_{j-1/2,\,k-1/2}$ s'obtiennent en remplaçant x par y. Enfin, les formules pour les coefficients $(A,\ B,\ C)_{j-1/2,\,k-1/2}$ inclus dans (33.9) à (33.11) sont basées sur (33.6):

$$\begin{aligned} A_{j-1/2,\,k-1/2}&=\frac{e^{p_{k-1/2}-q_{j-1/2}}}{\sin\omega_{j-1/2,\,k-1/2}},\\ B_{j-1/2,\,k-1/2}&=\operatorname{ctg}\omega_{j-1/2,\,k-1,2},\\ C_{j-1/2,\,k-1/2}&=\frac{e^{q_{j-1/2}-p_{k-1/2}}}{\sin\omega_{j-1/2,\,k-1/2}}. \end{aligned} \tag{33.13}$$

Le processus itératif se définit par les égalités

$$\begin{aligned} x^{(i+1)}_{j,\,k}&=x^{(i)}_{j,\,k}+\theta^{(i)}_{j,\,k}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]_{j,\,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial x}{\partial\eta}\right]_{j,\,k}-\right.\\ &\qquad\left.-\left[\frac{\partial}{\partial\xi}B\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}B\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]_{j,\,k}\right\},\\ y^{(i+1)}_{j,\,k}&=y^{(i)}_{j,\,k}+\theta^{(i)}_{j,\,k}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]_{j,\,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial y}{\partial\eta}\right]_{j,\,k}-\right.\\ &\qquad\left.-\left[\frac{\partial}{\partial\xi}B\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}B\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]_{j,\,k}\right\}, \end{aligned} \tag{33.14}$$

où les crochets contiennent les expressions aux différences définies par les formules ci-dessus (33.9) à (33.11).

La quantité $\theta^{(i)}_{j,\,k}$ est donnée par les formules

$$\theta^{(i)}_{j,\,k}=\min\{\theta_{j-1/2,\,k-1/2},\quad\theta_{j-1/2,\,k+1/2},\quad\theta_{j+1/2,\,k-1/2},\quad\theta_{j+1/2,\,k+1/2}\},$$

$$\theta_{j-1/2,\,k-1/2}=\frac{\theta}{2(A_{j-1/2,\,k-1/2}+C_{j-1/2,\,k-1/2})+|B_{j-1/2,\,k-1/2}|}.$$

Ici θ est un paramètre de relaxation analogue à celui des formules (33.2). Pour des raisons de la stabilité analysée pour les coefficients « gelés » des équations il y a lieu de le soumettre à la condition $0<\theta<2$.

Ainsi s'achève la description de la réalisation des algorithmes numériques I et II de construction des maillages aux différences. En conclusion, soulignons une fois de plus qu'une lente convergence des itérations explicites pour les équations non linéaires compliquées utilisées à cette fin doit nous inciter à chercher d'autres méthodes plus perfectionnées permettant de résoudre ces équations. Dans les

ouvrages déjà cités [95], [102] le lecteur trouvera un aperçu des différentes techniques de résolution des équations aux différences rencontrées dans les problèmes du type elliptique.

En guise d'exemple, voici l'application de la méthode des directions alternées au problème de la construction des maillages aux différences d'après l'algorithme III fondé sur l'utilisation de la fonctionnelle (32.18) variationnelle munie de fonction de pondération donnée par la formule (32.19). Prenons les équations pour les fonctions cherchées $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \end{aligned} \tag{33.15}$$

où

$$\begin{aligned} A = \omega l = \sqrt{\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \, | x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta |, \\ C = \frac{\omega}{l} = \sqrt{\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{x_\eta^2 + y_\eta^2}} \, | x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta |. \end{aligned} \tag{33.16}$$

En fait, ces équations représentent les équations d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle variationnelle dans l'hypothèse que l et ω, définis par les formules (32.15) et (32.19) et donc dépendant des fonctions cherchées x et y, ne varient pas, toutefois nous les utiliserons pour ne pas alourdir l'algorithme de calcul.

En composant les équations aux différences pour le système (33.15) on utilise les opérateurs aux différences (33.9) et (33.10). Les coefficients $A_{j-1/2,\, k-1/2}$ et $C_{j-1/2,\, k-1/2}$ sont calculés selon les formules (33.16) où les dérivées x_ξ, x_η, y_ξ, y_η peuvent être calculées à l'aide d'expressions aux différences très simples, analogues à (33.1), ou à l'aide d'approximations aux différences du type suivant :

$$\begin{aligned} x_\xi^2 + y_\xi^2 \approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j-1,k})^2 + (y_{j,k} - y_{j-1,k})^2 + \\ + (x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1})^2 + (y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1})^2], \\ x_\eta^2 + y_\eta^2 \approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j,k-1})^2 + (y_{j,k} - y_{j,k-1})^2 + \\ + (x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1})^2 + (y_{j-1,k} - y_{j-1,k-1})^2], \\ x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta \approx \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j-1,k-1})(y_{j-1,k} - y_{j,k-1}) - \\ - (x_{j-1,k} - x_{j,k-1})(y_{j,k} - y_{j-1,k-1})]. \end{aligned}$$

En calculant les coefficients $A_{j-1/2,\, k-1/2}$, $C_{j-1/2,\, k-1/2}$ on impose certaines restrictions empêchant l'apparition de valeurs trop petites

ou trop grandes. Le lecteur intéressé en trouvera les détails dans l'ouvrage [91].

Le processus itératif pour la résolution du système d'équations aux différences obtenu consiste à effectuer successivement plusieurs cycles dont chacun se fait en deux étapes. Lors de la première étape on calcule, d'après le maillage disponible $\{(x, y)_{j,k}\}$ construit pendant le cycle précédent, les coefficients des équations aux différences $\{A_{j-1/2,\,k-1/2}\}$ et $\{C_{j-1/2,\,k-1/2}\}$ ainsi que les valeurs des deux paramètres itératifs d', d'' dont on précisera plus bas le rôle. A la seconde étape, on procède, les valeurs des coefficients $A_{j-1/2,\,k-1/2}$, $C_{j-1/2,\,k-1/2}$ étant fixées, à plusieurs itérations visant la correction du maillage. Chacune de ces itérations a la structure suivante.

D'abord, l'indice k étant fixé, on résout les systèmes d'équations « à trois points » par rapport à l'indice j pour les grandeurs $\bar{x}_{j,k}$, $\bar{y}_{j,k}$ $(j = 1, 2, \ldots, J-1)$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial\bar{x}}{\partial\xi}\right]_{j,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial x}{\partial\eta}\right]_{j,k}&=d'(\bar{x}_{j,k}-x_{j,k}),\\ \left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial\bar{y}}{\partial\xi}\right]_{j,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial y}{\partial\eta}\right]_{j,k}&=d'(\bar{y}_{j,k}-y_{j,k}),\end{aligned}\qquad(33.17)$$

aux valeurs frontières données

$$\begin{aligned}\bar{x}_{0,k}&=x_k^{\text{gauche}}, & \bar{x}_{J,k}&=x_k^{\text{droite}},\\ \bar{y}_{0,k}&=y_k^{\text{gauche}}, & \bar{y}_{J,k}&=y_k^{\text{droite}}\end{aligned}$$

définissant la position des nœuds de la frontière du maillage. Les expressions entre crochets dans (33.17) désignent les approximations aux différences correspondantes décrites plus haut. Ces systèmes d'équations sont résolus successivement pour les valeurs de l'indice $k = 1, 2, \ldots, K-1$ à l'aide du balayage exposé, par exemple, au § 5 du livre [133]. Convenons de l'appeler balayage horizontal.

Cela étant, en fixant l'indice j on résout les systèmes d'équations « à trois points » par rapport à l'indice k pour les grandeurs $\bar{\bar{x}}_{j,k}$, $\bar{\bar{y}}_{j,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, K-1)$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial\bar{x}}{\partial\xi}\right]_{j,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial\bar{\bar{x}}}{\partial\eta}\right]_{j,k}&=d''(\bar{\bar{x}}_{j,k}-\bar{x}_{j,k}),\\ \left[\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial\bar{y}}{\partial\xi}\right]_{j,k}+\left[\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial\bar{\bar{y}}}{\partial\eta}\right]_{j,k}&=d''(\bar{\bar{y}}_{j,k}-\bar{y}_{j,k}),\end{aligned}$$

avec les valeurs frontières données

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}_{j,0}&=x_j^{\text{inf}}, & \bar{\bar{x}}_{j,K}&=x_j^{\text{sup}},\\ \bar{\bar{y}}_{j,0}&=y_j^{\text{inf}}, & \bar{\bar{y}}_{j,K}&=y_j^{\text{sup}}.\end{aligned}$$

Ces systèmes d'équations sont résolus successivement pour les valeurs de l'indice $j = 1, 2, \ldots, J-1$. Appelons-les balayages verticaux. Le maillage obtenu $\{(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})_{j,k}\}$ sert de maillage de départ pour l'itération suivante.

La vitesse de convergence du processus itératif appliqué dépend sensiblement du choix des paramètres itératifs d', d''. Malheureusement, la théorie du choix de ces paramètres n'est élaborée que pour les cas les plus simples, lorsque les opérateurs unidimensionnels obtenus par factorisation au cours de l'opération d'itération sont commutables. Dans ce cas, en recourant à une technique assez laborieuse on arrive à calculer les suites de paramètres itératifs d_i', d_i'' qui assurent une convergence rapide.

Au cours des expériences nous avons tenté d'utiliser ce type d'algorithme de calcul des paramètres itératifs d_i', d_i'' en remplaçant les coefficients des équations aux différences $A_{j-1/2,\,k-1/2}$, $C_{j-1/2,\,k-1/2}$ par des valeurs moyennées par une méthode quelconque. Mais étant donné que les coefficients sont très variables à cause du caractère non linéaire des équations (33.15), (33.16), ces tentatives ont échoué pour le cas général.

En définitive nous nous sommes arrêtés sur la variante qui applique à toutes les itérations d'un cycle les valeurs constantes des paramètres d', d'' choisies de façon optimale en s'appuyant sur la théorie recommandée dans [95] pour le cas des opérateurs de factorisation non commutables utilisés au cours des balayages horizontaux et verticaux. L'application de la théorie mentionnée exige une connaissance des frontières du spectre pour ces opérateurs unidimensionnels auto-adjoints. Désignons ces frontières par $[\delta', \Delta']$ pour l'opérateur des balayages horizontaux, par $[\delta'', \Delta'']$ pour l'opérateur des balayages verticaux.

Alors, selon les recommandations de [95], les valeurs optimales des paramètres d', d'' sont données par les formules

$$d' = \alpha - \beta, \quad d'' = \alpha + \beta,$$

$$\beta = \frac{\delta'\Delta' - \delta''\Delta''}{\delta' + \Delta' + \delta'' + \Delta''},$$

$$\alpha = \sqrt{(\delta' - \beta)(\Delta' - \beta)} = \sqrt{(\delta'' - \beta)(\Delta'' - \beta)}$$

qui assurent une convergence au moins aussi rapide que suivant une exponentielle à l'exposant

$$\gamma = \ln \frac{(\Delta' - d'')(\Delta'' - d'')}{(\Delta' - d')(\Delta'' + d')}$$

dans une certaine norme de maillage spéciale que nous ne donnons pas ici.

Revenons à la question des frontières du spectre des opérateurs unidimensionnels mis en jeu lors des balayages. Afin de déterminer

les quantités δ', Δ' fixant les frontières du spectre de l'opérateur des balayages horizontaux il faut, pour chacune des valeurs de l'indice $k = 1, \ldots, K-1$, calculer les valeurs propres minimale δ'_k et maximale Δ'_k des matrices tridiagonales symétriques d'ordre $J-1$ associées à l'opérateur de différences finies $-\frac{\partial}{\partial\xi}A\frac{\partial}{\partial\xi}$ défini par la formule (33.9). Cela étant, on pose

$$\delta' = \min_{1\leqslant k\leqslant K-1} \delta'_k, \quad \Delta' = \max_{1\leqslant k\leqslant K-1} \Delta'_k.$$

Afin d'obtenir les quantités δ'', Δ'' fixant les frontières du spectre de l'opérateur des balayages verticaux il faut, pour chacune des valeurs de l'indice $j = 1, \ldots, J-1$, calculer les valeurs propres minimale δ''_j et maximale Δ''_j des matrices tridiagonales symétriques d'ordre $K-1$ associées à l'opérateur de différences finies $-\frac{\partial}{\partial\eta}C\frac{\partial}{\partial\eta}$ défini par la formule (33.10). Cela étant, on pose

$$\delta'' = \min_{1\leqslant j\leqslant J-1} \delta''_j, \quad \Delta'' = \max_{1\leqslant j\leqslant J-1} \Delta''_j.$$

La méthode à la fois simple et efficace proposée dans l'ouvrage [118] permet de déterminer les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique.

L'application de la méthode des directions alternées et l'optimisation du choix des paramètres itératifs permettent d'accélérer sensiblement la convergence du processus itératif pour l'algorithme III de construction des maillages aux différences. Sur lui s'achève notre description. L'élaboration expérimentale de cet algorithme a été en grande partie effectuée en collaboration avec R. Antonova.

A l'heure actuelle, la question de la construction des maillages fait l'objet de nombreux articles de revues; toutefois, une formulation définitive du problème à résoudre lors de l'élaboration d'un maillage n'a pas encore été donnée. Voici quelques-uns des ouvrages consacrés à ce sujet: [150], [115] à [117].

C'est précisément pour cela que nous avons dû exposer au § 32 quelques types d'équations éventuellement applicables à la construction des maillages aux différences et nous limiter dans ce paragraphe aux algorithmes numériques les plus simples du point de vue de la réalisation. Nous allons donner ci-dessous quelques exemples de maillages construits à l'aide de ces algorithmes. Tous ces exemples sont donnés à titre d'illustration et ont surtout pour but d'attirer l'attention sur les insuffisances qu'on découvre en les appliquant. Dans notre commentaire de ces illustrations nous omettons les détails techniques, indiquant seulement l'algorithme qui a permis de les obtenir.

Les figures 33.1 et 33.2 représentent les maillages calculés avec l'algorithme I. Malgré quelques imperfections que remarquera le

lecteur exigeant ces maillages sont valables pour le calcul des problèmes.

faut regretter qu'il n'y ait pas parmi les solutions des équations (32.5), base de l'algorithme I, de maillage polaire décrit par les fonctions

$$x = e^{\xi} \cos \eta, \quad y = e^{\xi} \sin \eta.$$

Ceci entraîne que le calcul du maillage dans un demi-cercle avec l'algorithme basé sur les équations (32.5) aboutit à la figure appro-

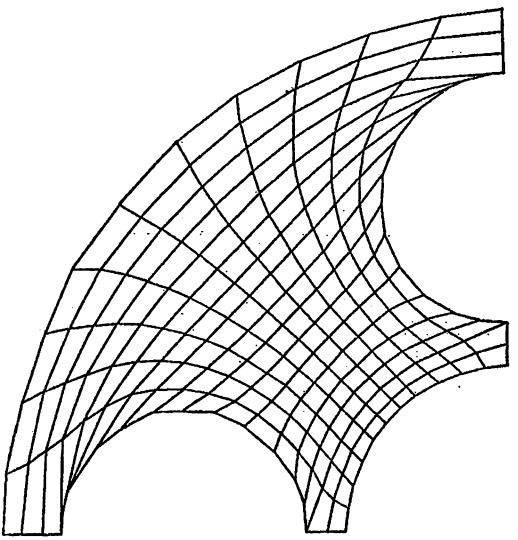


Fig. 33.1

ximativement représentée sur la figure 33.3. On peut empêcher le resserrement des lignes du maillage vers le diamètre du demi-cercle en introduisant de façon convenable des variables auxiliaires et en se servant des équations (32.6) plus souples. Le choix de ces variables peut être suggéré par le fait que les fonctions

$$x = e \cos \eta, \quad y = e \sin \eta$$

satisfont aux équations (32.5). Dans la situation plus compliquée de la figure 33.4 il est plus difficile d'inventer de tels paramètres. Le maillage de la figure 33.4 est également obtenu avec l'algorithme I. Une tentative de modifier le comportement des lignes du maillage dans la partie centrale en introduisant des paramètres auxiliaires visant à « attirer » le maillage vers la frontière correspondante peut aboutir à de mauvais résultats, tels que celui de la figure 33.5.

La figure 33.6 représente le maillage pour ce domaine calculé avec l'algorithme II utilisant les représentations quasi conformes. Un autre maillage obtenu grâce à l'algorithme II est donné sur la

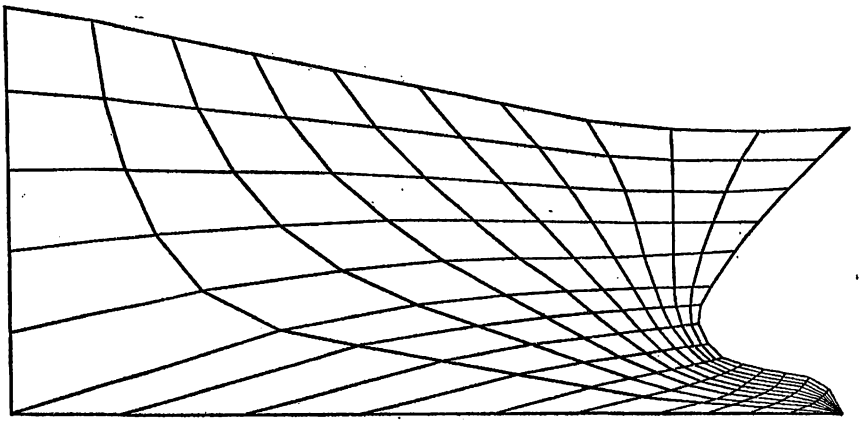


Fig. 33.2

figure 33.7. Notons que dans ce cas on était obligé de travailler au stade initial du calcul avec un maillage contenant des mailles qui se recouvrent, forment des plis et sortent des limites du contour du

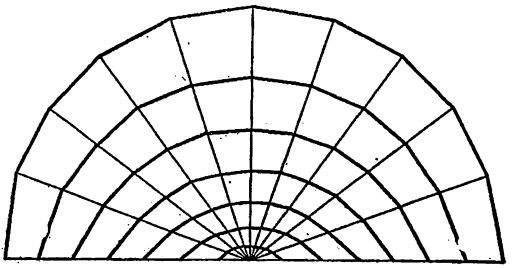


Fig. 33.3

domaine (fig. 33.8). Cette situation se rencontre assez fréquemment lorsqu'on calcule les maillages dans des domaines compliqués; les algorithmes de calcul doivent être assez minutieusement élaborés pour que, en opérant avec des approximations de départ de ce genre, il n'y ait pas de dépassement de capacité lors de l'exécution du calcul sur l'ordinateur.

Sur les figures 33.9, 33.10 sont donnés deux exemples de maillages calculés à l'aide de l'algorithme III dans lequel la fonction de pondération ω était définie par la formule (32.19).

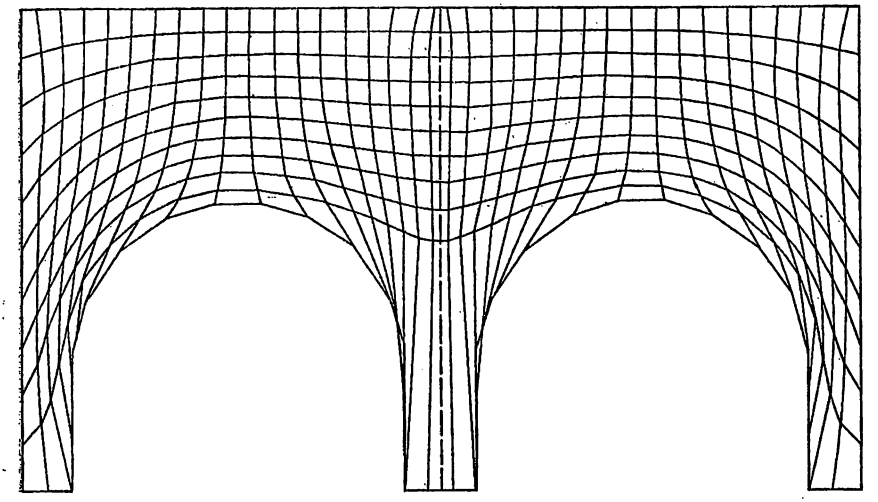


Fig 33.4

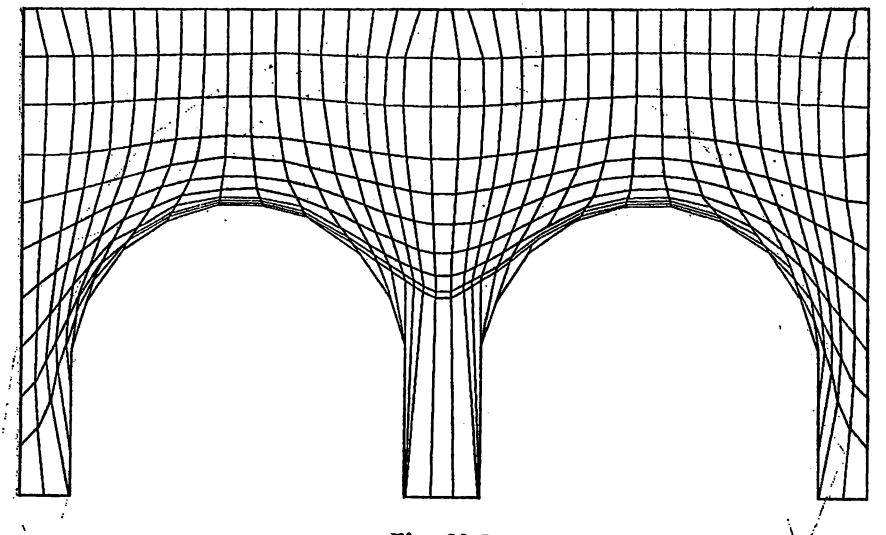


Fig. 33 5

En conclusion, signalons encore deux faits. Nous avons examiné les algorithmes de calcul des maillages en faisant correspondre au domaine de calcul un rectangle dans un plan paramétrique auxiliaire. Dans les problèmes compliqués on arrive, ordinairement, à

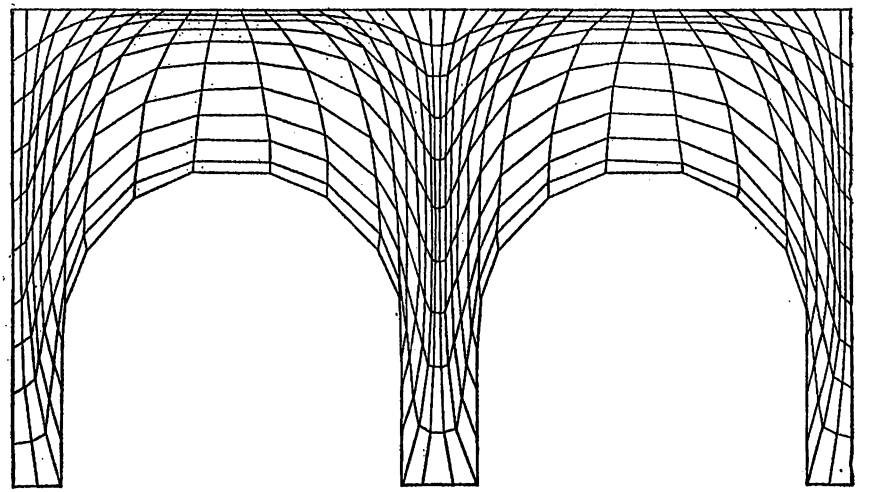


Fig. 33.6

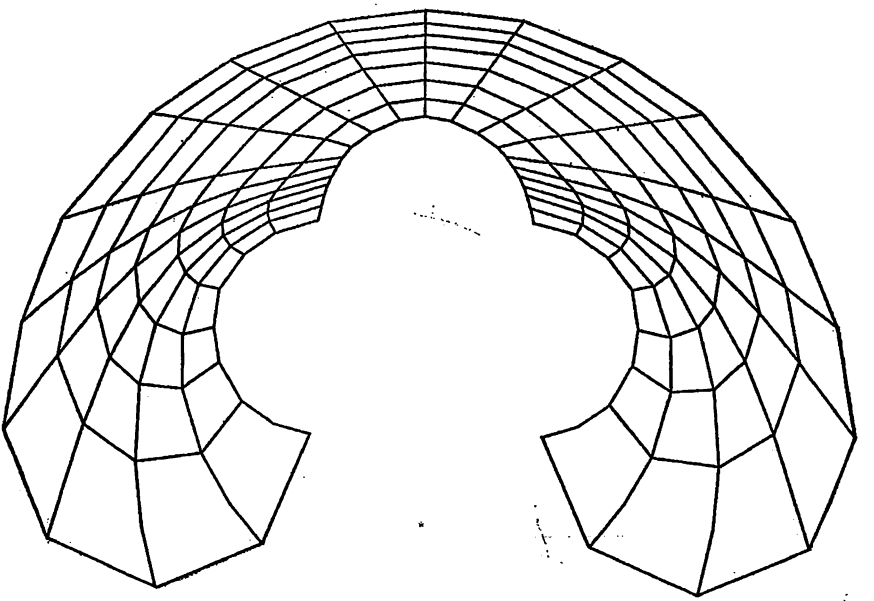


Fig. 33.7

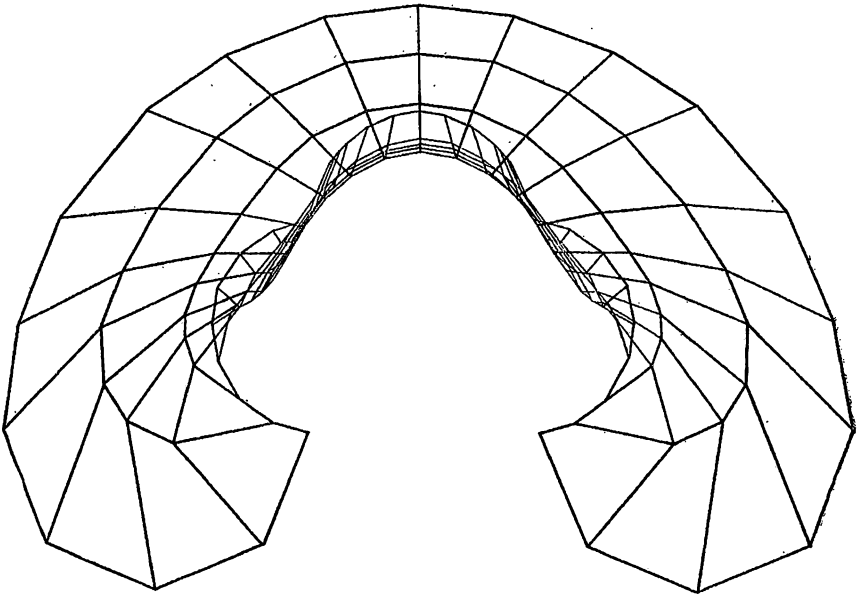


Fig. 33.8

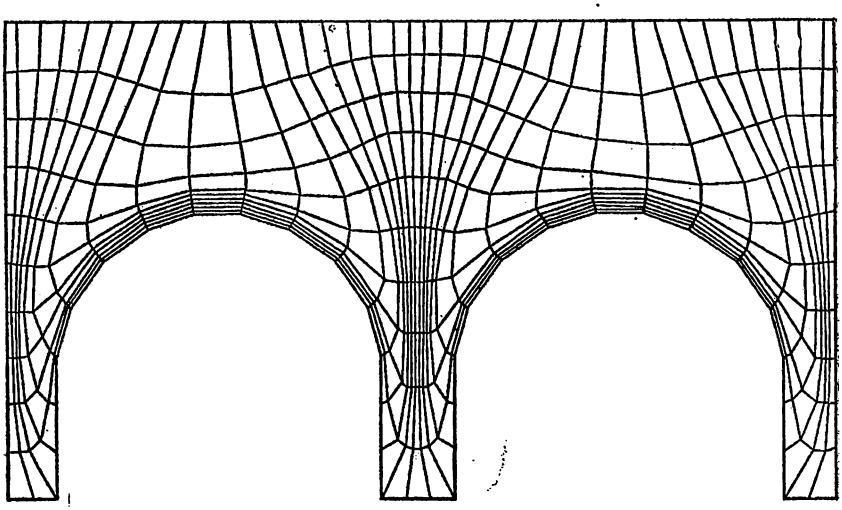


Fig. 33.9

découper tout le domaine de calcul en des sous-domaines isolés dans chacun desquels on peut appliquer soit les techniques d'interpolation les plus simples exposées au § 23, soit l'un des algorithmes décrits.

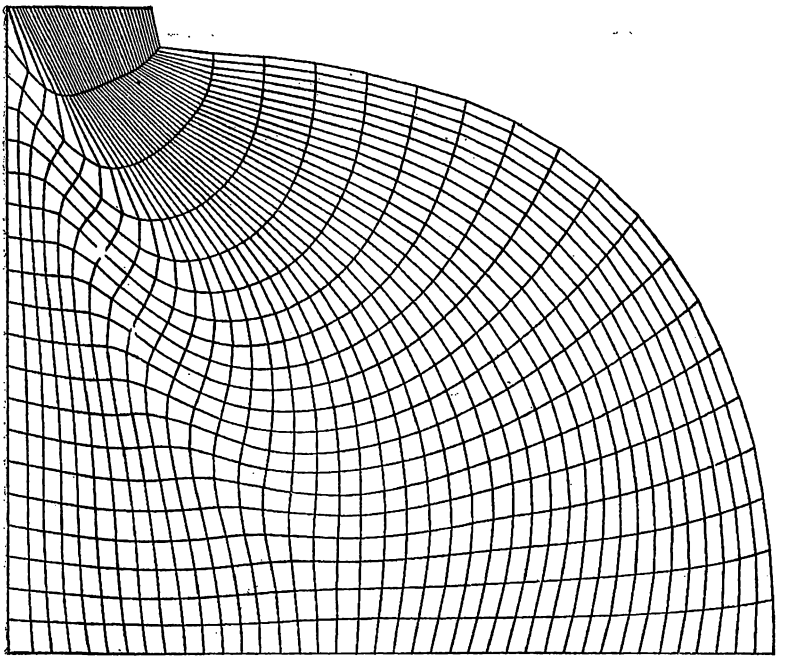


Fig. 33.10

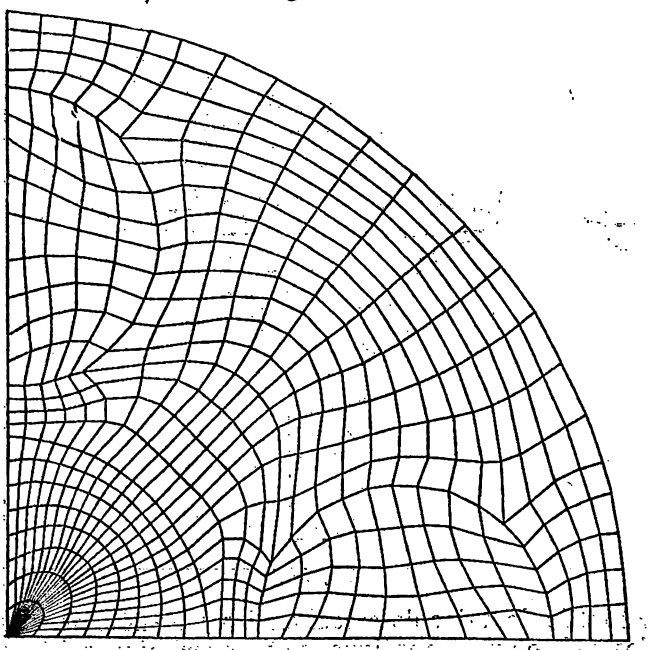


Fig. 33.11

Si pour certaines raisons il n'est pas rationnel de procéder ainsi, on peut proposer, par exemple, la possibilité suivante. En apportant de légères modifications dans l'algorithme on peut, lors du calcul, fixer la position des nœuds intérieurs particuliers, selon le choix de l'opérateur. En guise d'illustration, nous donnons la figure 33.11

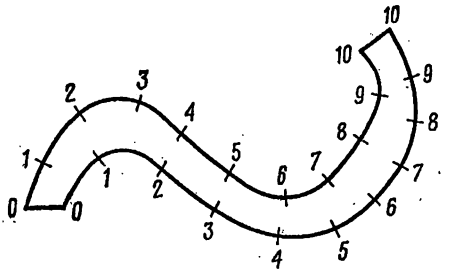


Fig. 33.12

où lors du calcul demeuraient immobiles les nœuds situés sur les trois arcs de circonférence à l'intérieur du domaine de calcul, les autres étant déterminés par l'algorithme III.

La seconde remarque concerne le principe de fixation des nœuds du maillage sur le contour de la frontière du domaine de calcul, principe auquel nous nous sommes efforcés d'adhérer pour des raisons déjà évoquées plus haut. Par exemple, dans le cas de la figure 33.12 la correspondance entre les points sur les frontières opposées d'un domaine « étiré » et « étroit » ne permet guère d'espérer un maillage satisfaisant (si le nombre de points dans la direction transversale est réduit). C'est dire qu'on doit empêcher l'éventualité de telles situations. Nous avons déjà signalé au § 32 en décrivant l'algorithme II, dont une description détaillée se trouve par exemple dans l'ouvrage [9], qu'une certaine restriction à la répartition des points frontières apparaît comme une condition nécessaire de l'existence de la représentation quasi conforme de la classe considérée.

§ 34. Système d'équations aux différences pour les problèmes instationnaires de la dynamique des gaz dans un système de coordonnées curviligne local

Construction dans l'espace x, y, t d'un volume élémentaire V. Substitution dans le système d'équations intégrales de la dynamique des gaz écrit dans une base locale au domaine d'intégration arbitraire du volume élémentaire V. Discrétisation des relations intégrales obtenues et construction du système d'équations aux différences.

Le présent paragraphe sera consacré à la déduction du système d'équations aux différences grâce auxquelles on effectue le calcul des grandeurs hydrodynamiques au pas en temps suivant, corres-

pondant au moment $t + \tau$. Comme on l'a dit plus haut, on peut construire, en partant de la position des frontières au moment t, un maillage de calcul et deux familles de lignes de coordonnées. Les lignes de coordonnées partagent notre domaine de calcul en un ensemble de quadrilatères curvilignes. Appelons-les mailles du réseau de calcul. Nous avons convenu de numéroter les points du maillage par un indice double. Considérons une maille quelconque dont les nœuds de calcul portent les numéros suivants (j, k), $(j + 1, k)$, $(j + 1, k + 1)$, $(j, k + 1)$. Convenons de lui associer le numéro $(j + 1/2, k + 1/2)$.

Nous admettons qu'au moment t les grandeurs hydrodynamiques : vecteur vitesse, densité, énergie, pression, se rapportent à son point médian et sont pourvues de l'indice $(j + 1/2, k + 1/2)$.

Nous donnerons à la fin de ce paragraphe les formules permettant de déterminer les coordonnées de ce point, sans nous y arrêter maintenant.

Rappelons que nous avons trouvé au § 31 les valeurs des coordonnées des points frontières au temps $t + \tau$. En connaissant les positions des frontières au pas en temps suivant nous pouvons les utiliser pour construire un maillage de calcul. A l'aide des coordonnées des points du maillage au temps $t + \tau$ on construira les deux familles de lignes de coordonnées qui diviseront le domaine de calcul en un ensemble de mailles. (Soulignons que l'ensemble de mailles du maillage construit au temps $t + \tau$ dans le plan x, y s'étend également sur tout le domaine marqué par la position des frontières au moment $t + \tau$.) Considérons dans l'espace x, y, t la position de la maille de numéro $(j + 1/2, k + 1/2)$ au temps $t + \tau$ et la position de la maille de même numéro au temps t.

Pour simplifier, adoptons une certaine terminologie : les points du maillage sur lesquels est construite la maille donnée sont appelés ses *sommets*, les arcs complémentaires joignant les sommets voisins, *arêtes*, les segments de droite joignant les sommets de même nom dans les plans t et $t + \tau$ *arêtes latérales*. Pour les maillages construits à chaque moment les tangentes en chaque sommet (j, k) aux lignes de la première et de la seconde famille forment un repère de coordonnées non dégénéré. Grâce à cette propriété et compte tenu des paramètres métriques du maillage on peut considérer les arêtes de la maille comme des lignes de coordonnées d'un système de coordonnées curviligne local. Ainsi les arêtes du maillage dans le plan $t = \text{const}$ figureront soit les lignes $\xi = \text{const}$, soit $\eta = \text{const}$. (Rappelons qu'au § 29 par les fonctions $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ nous avons défini la donnée du passage au système de coordonnées curvilignes.) A l'instant $t + \tau$, les arêtes de la maille de même numéro représenteront également des lignes de coordonnées mais, généralement parlant, d'un autre système de coordonnées construit au temps $t + \tau$.

Notre manière de décrire un écoulement hydrodynamique dans un système de coordonnées local mobile exigerait la construction des dépendances $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, i.e. nous obligerait de tenir également compte des modifications du système de coordonnées en fonction du temps. Or, les formules de passage à un tel système de coordonnées seraient beaucoup plus compliquées. Pour éviter cette complication inutile des formules nous allons proposer un autre procédé prenant en compte la mobilité du système de coordonnées avec la précision voulue.

Rappelons qu'il s'agit de construire un schéma précis au premier ordre en $\sqrt{g_{11}}\,\Delta\xi$, $\sqrt{g_{22}}\,\Delta\eta$; en conséquence, on a également le droit de construire un système de coordonnées approché à l'ordre de précision voulu. On tiendra compte de la dépendance du temps du système de coordonnées local en écrivant les relations liant les deux systèmes de coordonnées locaux construits pour les mailles de même numéro aux temps t et $t + \tau$.

Nous voulons maintenant lier ces deux systèmes. Soient deux mailles, de même numéro, dans les plans t_0 et $t_0 + \tau$.

Construisons dans l'espace x, y, t une surface quelconque passant par deux arêtes de même nom et par deux arêtes latérales joignant les sommets, pour les mailles choisies. Appelons-la *face latérale*. Soit $F(\xi, \eta, t) = 0$ l'équation de la face latérale, où ξ, η sont les coordonnées curvilignes du système de coordonnées local dans le plan $t = t_0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$. En utilisant la condition que les petits déplacements des frontières du domaine de calcul provoquent de faibles variations des coordonnées des points du maillage admettons que la fonction $F(\xi, \eta, t)$ est lisse. Développons-la en série de Taylor:

$$F(\xi, \eta, t) = a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3(t - t_0) + \ldots = 0. \quad (34.1)$$

En supposant les ξ, η faiblement variables dans les limites d'une maille on trouve, en se limitant aux termes du premier ordre,

$$a_0 + a_1(\xi - \xi_0) + a_2(\eta - \eta_0) + a_3(t - t_0) = 0. \quad (34.2)$$

Sur l'arête $\xi = \xi_0$ dans le plan de la base inférieure $t = t_0$ l'expression (34.2) doit être identiquement nulle. Ainsi donc, aux termes du premier ordre de petitesse près l'équation de la face latérale passant par l'arête $\xi = \xi_0$ sera

$$\xi = \xi_0 + \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}(t - t_0). \quad (34.3)$$

De façon analogue, l'équation de la face latérale passant par l'arête $\eta = \eta_0$ dans le plan $t = t_0$ acquiert la forme

$$\eta = \eta_0 + \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}(t - t_0), \quad (34.4)$$

où μ^*, ν^* sont des constantes. Par conséquent, chacune des lignes de coordonnées du système de coordonnées local au temps $t + \tau$ s'écrit dans le système de coordonnées local construit au temps t, aux termes du premier ordre près, sous la forme

$$\xi = \xi_0 + \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}\tau, \quad \eta = \eta_0 + \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\tau. \tag{34.5}$$

Cela étant, occupons-nous de la construction du système d'équations aux différences écrit dans le système de coordonnées local mobile. Comme système de départ, nous prenons le système (30.11). Choisissons dans l'espace x, y, t au lieu d'un volume arbitraire V le volume de la figure curviligne, dont la base inférieure est représentée par la maille $(j + 1/2, k + 1/2)$ au moment t, la base supérieure par la maille de même numéro au moment $t + \tau$ et dont les faces latérales sont données par les relations (34.3) ou (34.4) pour chacune des arêtes de la base inférieure. Introduisons pour la commodité de notre étude les désignations suivantes. Numérotons par les indices 1, 2, 3, 4 les sommets de la base inférieure correspondant aux numéros des nœuds de calcul (j, k), $(j + 1, k)$, $(j + 1, k + 1)$, $(j, k + 1)$. Numérotons respectivement par les indices 1', 2', 3', 4' les sommets de même nom de la base supérieure. Désignons les bases inférieures et supérieures et les faces latérales par les indices des quatre sommets qui leur appartiennent. En intégrant suivant la figure curviligne ci-dessus on doit attacher une importance particulière aux premiers termes dans la seconde et la troisième équation du système (30.11). Écrivons-les :

$$\iint_S \rho Q(y)\, \mu^k \sqrt{g}\, d\xi\, d\eta, \quad \iint_S \rho Q(y)\, \nu^k \sqrt{g}\, d\xi\, d\eta. \tag{34.6}$$

Les intégrales de surface contiendront les intégrales suivant la base supérieure. En conformité avec les notations que nous avons adoptées elles s'écrivent sous la forme

$$\iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y)\, \mu^k \sqrt{g}\, d\xi\, d\eta, \quad \iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y)\, \nu^k \sqrt{g}\, d\xi\, d\eta. \tag{34.7}$$

Les expressions sous le signe somme y sont écrites dans le système de coordonnées curviligne local construit sur la maille de la base inférieure. Il aurait été plus naturel de les exprimer au moyen du système de coordonnées curvilignes de la base supérieure ; les limites d'intégration seraient alors simples mais on devrait dans ce cas avoir deux systèmes de coordonnées pour t et $t + \tau$. Un tel passage ne présente pas de difficultés pour les grandeurs scalaires. Seules les transformations des intégrales (34.7) peuvent présenter quelques complications, puisque les expressions sous le signe somme contiennent les composantes du vecteur rapportées au système de coordon-

nées local de la base inférieure. Référons-nous aux relations (34.5) selon lesquelles les lignes de coordonnées du système de coordonnées local de la base supérieure au point (ξ, η) correspondent aux lignes de coordonnées du système de coordonnées de la base inférieure au point (ξ_0, η_0) et la liaison entre les coordonnées de ces points est donnée par les relations (34.5).

Nous définissons le système de coordonnées en donnant les cosinus directeurs des tangentes aux lignes de coordonnées. Par ailleurs, les points voisins vérifient, aux termes d'ordre de petitesse supérieur par rapport à la différence de coordonnées près, les relations

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \alpha'_0 - \left[\frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi}\Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta}\Big|_0 \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] \beta'_0 \tau + \ldots, \\
\beta' &= \beta'_0 + \left[\frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi}\Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta}\Big|_0 \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] \alpha'_0 \tau + \ldots, \\
\alpha'' &= \alpha''_0 - \left[\frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi}\Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta}\Big|_0 \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] \beta''_0 \tau + \ldots, \\
\beta'' &= \beta''_0 + \left[\frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi}\Big|_0 \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta}\Big|_0 \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] \alpha''_0 \tau + \ldots
\end{aligned} \tag{34.8}$$

Elles s'obtiennent à partir du développement en série de Taylor suivant ξ et η des fonctions $\alpha'(\xi, \eta)$, $\beta'(\xi, \eta)$, $\alpha''(\xi, \eta)$, $\beta''(\xi, \eta)$ à l'aide des relations (34.5) et (30.4).

Exprimons les composantes du vecteur vitesse $(\mu^*)^0$, $(\nu^*)^0$ rapportées au système de coordonnées local construit sur la maille de la base supérieure au moyen des composantes de la vitesse $(\mu^k)_0$, $(\nu^k)_0$ dans le système de coordonnées local construit sur la maille de la base inférieure. En effet,

$$\begin{aligned}
(\mu^k)^0 &= u\,(\alpha')^0 + v\,(\beta')^0, \\
(\nu^k)^0 &= u\,(\alpha'')^0 + v\,(\beta'')^0.
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (34.8) où par α', β', α'', β'' on entendra les cosinus directeurs au point de la base supérieure, on obtient

$$\begin{aligned}
(\mu^k)^0 &= u\,(\alpha')^0 + v\,(\beta')^0 = \\
&= u\alpha'_0 + v\beta'_0 + \left[\frac{\partial [x, \xi]}{\partial \xi}\frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \xi]}{\partial \eta}\frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] [v\alpha'_0 - u\beta'_0]\,\tau + \ldots, \\
(\nu^k)^0 &= u\,(\alpha'')^0 + v\,(\beta'')^0 = \\
&= u\alpha''_0 + v\beta''_0 - \left[\frac{\partial [x, \eta]}{\partial \xi}\frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial [x, \eta]}{\partial \eta}\frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right] [u\beta''_0 - v\alpha''_0]\,\tau + \ldots,
\end{aligned} \tag{34.9}$$

le développement recherché a donc la forme

$$(\mu^k)^0 = (\mu^k)_0 + \left[\frac{\partial[x,\xi]}{\partial\xi}\frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial[x,\xi]}{\partial\eta}\frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right]_0 \nu_0\beta_0\tau + o(\ldots),$$
$$(\nu^k)^0 = (\nu^k)_0 - \left[\frac{\partial[x,\eta]}{\partial\xi}\frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\partial[x,\eta]}{\partial\eta}\frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\right]_0 \mu_0\beta_0\tau + o(\ldots) \quad (34.10)$$

ou, en se servant de (30.10),

$$(\mu^k)^0 = (\mu^k)_0 + \left[K_{\eta=\text{const}}\mu^* + \left(K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\nu^*\right]_0 \nu_0\beta_0\tau + o(\ldots),$$
$$(\nu^k)^0 = (\nu^k)_0 - \left[\left(K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)\mu^* + K_{\xi=\text{const}}\nu^*\right]_0 \mu_0\beta_0\tau + o(\ldots). \quad (34.11)$$

Ici, comme dans la suite, nous négligerons les termes d'ordre de petitesse supérieur, car notre tache est de construire un schéma aux différences précis au premier ordre. En outre, dans ce qui suit on omettra (pour abréger l'écriture) l'indice inférieur 0 dans les cas où aucune confusion n'est possible. Revenons au système (30.11) et faisons l'intégration sur la figure curviligne décrite. En représentant les intégrales de surface comprenant les composantes de la vitesse et se rapportant à la base supérieure on utilise (34.11). Nous obtenons

$$\iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + \iint_{S_{1423}} \rho Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + \iint_{S_{\text{lat}}} \rho Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta - \iint_{S_{\text{lat}}} \rho Q(y)\nu^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt + \iint_{S_{\text{lat}}} \rho Q(y)\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt = 0, \quad (34.12_1)$$

$$\iint_{S_{1'2'3'4'}} \rho\left\{(\mu^k) + \left[K_{\eta=\text{const}}\mu^* + \left(K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\nu^*\right]\nu\beta\tau\right\} \times Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + \iint_{S_{1423}} \rho\mu^k Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + \iint_{S_{\text{lat}}} \rho\mu^k Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta - \iint_{S_{\text{lat}}} \rho\mu^k\nu^n Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt +$$

$$+\iint\limits_{S_{\text{lat}}}[p\beta+\rho\mu^k\mu^n]\,Q(y)\,\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-\iiint\limits_{V}p\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt-$$

$$-\iiint\limits_{V}\rho\Big[K_{\eta=\text{const}}\mu+\Big(K_{\xi=\text{const}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\Big)\nu\Big]\nu\beta Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt+o(\ldots)=0, \quad (34.12_2)$$

$$\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}}\rho\Big\{(\nu^k)-\frac{y}{}\Big[\Big(K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\Big)\mu^*+$$

$$+K_{\xi=\text{const}}\nu^*\Big]\mu\beta\tau\Big\}\,Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$\iint\limits_{S_{1423}}\rho\nu^kQ(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+\iint\limits_{S_{\text{lat}}}\rho\nu^kQ(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\iint\limits_{S_{\text{lat}}}[p\beta+\rho\nu^k\nu^n]\,Q(y)\,\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+\iint\limits_{S_{\text{lat}}}\rho\nu^k\mu^nQ(y)\,\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-$$

$$-\iiint\limits_{V}p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt+$$

$$+\iiint\limits_{V}\rho\mu\Big[\Big(K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\Big)\mu+$$

$$+K_{\xi=\text{const}}\nu\Big]\beta Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt+o(\ldots)=0, \quad (34.12_3)$$

$$\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}}\rho\Big[\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\Big]Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\iint\limits_{S_{1423}}\rho\Big[\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\Big]Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\iint\limits_{S_{\text{lat}}}\rho\Big[\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\Big]Q(y)\,\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\iint\limits_{S_{\text{lat}}}\rho\Big[\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\Big]\nu^nQ(y)\,\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+\iint\limits_{S_{\text{lat}}}\rho\Big[\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\Big]\mu^nQ(y)\,\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt=0, \quad (34.12_4)$$

où S_{lat} est la surface formée par les faces latérales de la figure choisie comme volume élémentaire.

Maintenant, pour déduire les relations aux différences approchant le système d'équations intégrales (30.11), il reste un dernier pas à franchir, celui de la formulation des conditions de mise en moyenne des grandeurs hydrodynamiques.

Nous supposons que les valeurs des grandeurs hydrodynamiques sont constantes sur chacune des faces latérales, sur les bases supérieure et inférieure. La procédure de la mise en moyenne consiste à étendre les valeurs que prennent les grandeurs hydrodynamiques aux points médians des éléments géométriques correspondants à tout l'élément. (Nous donnerons, à la fin du paragraphe, les formules de calcul des coordonnées des points médians pour les éléments géométriques suivant lesquels on procède à la mise en moyenne.)

Encore une remarque précisant les composantes de la vitesse supposées constantes suivant chacun des éléments géométriques:

suivant la base inférieure: les composantes contravariantes μ, ν;

suivant la base supérieure: les composantes μ^k, ν^k;

suivant les faces latérales: les composantes μ^k, ν^n pour chacune des faces engendrée par l'arête $\eta = \text{const}$ (ligne ξ) et les composantes ν^k, μ^n pour chacune des faces engendrée par l'arête $\xi = \text{const}$ (ligne η).

Toutes les autres composantes de la vitesse doivent être exprimées aux points médians des éléments géométriques correspondants à l'aide des relations (29.3).

Adoptons des notations.

Les grandeurs hydrodynamiques se rapportant au point médian de la maille de la base supérieure sont notées par l'indice $[\ ]^0$; celles se rapportant au point médian de la maille de la base inférieure par l'indice $[\ ]_0$. Les grandeurs se rapportant à la face latérale $ijj'i'$ sont notées par l'indice double $[\ ]_{ij}$ ou $[\ ]_{ji}$ (en fonction du sens du comptage adopté pour cette arête).

Par conséquent, les grandeurs affectées de l'indice supérieur se rapportent au temps $t + \tau$, celles affectées du double indice se rapportent au temps $t + \tau/2$ et celles affectées de l'indice inférieur au temps t.

De (34.12), compte tenu des règles de la mise en moyenne des grandeurs hydrodynamiques, on tire

$$[\rho]^0 \iint\limits_{s_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + [\rho]_0 \iint\limits_{s_{1432}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ [\rho]_{12} \iint\limits_{s_{122'1'}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + [\rho]_{23} \iint\limits_{s_{233'2'}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ [\rho]_{43} \iint\limits_{s_{344'3'}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta + [\rho]_{14} \iint\limits_{s_{411'4'}} Q(y)\sqrt{\bar{g}}\,d\xi\,d\eta -$$

$$-[\rho\nu^n]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt-[\rho\nu^n]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\rho\mu^n]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}} Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt+[\rho\mu^n]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}} Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt+$$

$$+o(\ldots)=0, \quad (34.13_1)$$

$$[\rho\mu^k]^0\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\rho\mu]_0\iint\limits_{S_{1432}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\rho\nu]_0\iint\limits_{S_{1432}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\rho\nu]_0\tau\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}}\Big[K_{\eta=\text{const}}\mu^*+$$

$$+\Big(K_{\xi=\text{const}}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\Big)\nu^*\Big]\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\rho\mu^k]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\rho]_{23}\Big\{[\mu^n]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\nu^k]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\Big\}+[\rho\mu^k]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\rho]_{14}\Big\{[\mu^n]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\nu^k]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\Big\}+$$

$$+[\rho]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt+[p_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt-$$

$$-[\rho\mu^k\nu^n]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt-[\rho\mu^k\nu^n]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt+$$

$$+[\rho\mu^n]_{23}\Big\{[\mu^n]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt+$$

$$+[\nu^k]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}\alpha Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt\Big\}+$$

$$+[\rho\mu^n]_{14}\Big\{[\mu^n]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt+$$

$$+[\nu^k]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}\alpha Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt\Big\}-$$

$$-\iiint\limits_V p\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\Big)\,d\xi\,d\eta\,dt-\iiint\limits_V\rho\nu\Big[K_{\eta=\text{const}}\mu+$$

$$+\left(K_{\xi=\text{const}}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\nu\right)\Big]Q(y)\beta\sqrt{g}\,d\xi d\eta dt+o(\ldots)=0, \tag{34.13$_2$}$$

$$[\rho\nu^k]^0\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+[\rho\nu]_0\iint\limits_{S_{1432}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+[\rho\mu]_0\iint\limits_{S_{1432}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta-[\rho\mu]_0\tau\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}}\Big[K_{\eta=\text{const}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\mu^*+K_{\xi=\text{const}}\nu^*\Big]\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+[\rho]_{12}\Big\{[\nu^n]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}}\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+[\mu^k]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta\Big\}+[\rho\nu^k]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+[\rho]_{43}\Big\{[\nu^n]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}}\beta Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+[\mu^k]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}}\alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta\Big\}+$$

$$+[\rho\nu^k]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta-[p]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\;\xi d-$$

$$-[p]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt-$$

$$-[\rho\nu^n]_{12}\Big\{[\nu^n]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt+$$

$$+[\mu^k]_{12}\iint\limits_{S_{122'1'}}\alpha Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt\Big\}-$$

$$-[\rho\nu^n]_{43}\Big\{[\nu^n]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt+$$

$$+[\mu^k]_{43}\iint\limits_{S_{344'3'}}\alpha Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt\Big\}+[\rho\nu^k\mu^n]_{23}\iint\limits_{S_{233'2'}}Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta dt+$$

$$+[\rho\nu^k\mu^n]_{14}\iint\limits_{S_{411'4'}}Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta dt-\iiint\limits_{V}p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi d\eta dt+$$

$$+\int\int_{\tilde{V}}\int \rho\mu\left[\left(K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)\mu+\right.$$

$$\left.+K_{\xi=\text{const}}\nu\right]Q(y)\beta\sqrt{g}\,d\xi d\eta dt+o(\ldots)=0, \quad (34.13_3)$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]^0\int\int_{S_{1'2'3'4'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_0\int\int_{S_{1432}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{12}\int\int_{S_{122'1'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{23}\int\int_{S_{233'2'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{43}\int\int_{S_{344'3'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{14}\int\int_{S_{411'4'}}Q(y)\sqrt{g}\,d\xi d\eta-$$

$$-\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\right)\nu^n\right]_{12}\int\int_{S_{122'1'}}Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt-$$

$$-\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\right)\nu^n\right]_{43}\int\int_{S_{344'3'}}Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\right)\mu^n\right]_{23}\int\int_{S_{233'2'}}Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta dt+$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{|q|^2}{2}\right)\mu^n\right]_{14}\int\int_{S_{411'4'}}Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta dt+o(\ldots)=0. \quad (34.13_4)$$

Rappelons que les équations des faces latérales passant par les arêtes $\xi = \text{const}$ ou $\eta = \text{const}$ ont la forme (34.5), i.e. les faces 1, 2, 2′, 1′ ; 3, 4, 4′, 3′ vérifient les relations

$$d\eta=\frac{\nu_{12}^*}{\sqrt{g_{22}}}dt, \quad d\eta=\frac{\nu_{43}^*}{\sqrt{g_{22}}}dt. \quad (34.14)$$

De façon analogue, sur les faces 2, 3, 3′, 2′ ; 4, 1, 1′, 4′

$$d\xi = \frac{\mu^*_{23}}{\sqrt{g_{11}}}\,dt, \quad d\xi = \frac{\mu^*_{14}}{\sqrt{g_{11}}}\,dt.$$

De sorte qu'en mettant à profit (34.14) on peut conférer aux intégrales étendues aux faces latérales dans le système (34.13) la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{s_{122'1'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \nu^*_{12} \iint\limits_{s_{122'1'}} \gamma Q(y)\,\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt,\\
&\iint\limits_{s_{344'3'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \nu^*_{43} \iint\limits_{s_{344'3'}} \gamma Q(y)\,\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt,\\
&\iint\limits_{s_{233'2'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \mu^*_{23} \iint\limits_{s_{233'2'}} \gamma Q(y)\,\beta\sqrt{g_{22}}\,dt\,d\eta,\\
&\iint\limits_{s_{411'4'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \mu^*_{14} \iint\limits_{s_{411'4'}} \gamma Q(y)\,\beta\sqrt{g_{22}}\,dt\,d\eta.
\end{aligned} \tag{34.15}$$

Pour abréger, par γ nous entendrons soit 1, soit α, soit β. Or, toutes les intégrales sur les faces latérales du système (34.13) sont écrites dans le système de coordonnées local de la base inférieure et, par conséquent, les éléments qui définissent ce dernier sont indépendants du temps.

Si bien que l'intégration par rapport au temps peut se faire indépendamment de celle par rapport à l'espace. (Il faudra seulement éviter de se tromper, en marquant correctement les limites d'intégration, sans oublier que l'on prend les intégrales de surface dans (34.13) sur la face extérieure de la surface.)

Compte tenu des remarques ci-dessus transformons les intégrales entrant dans (34.13) :

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{s_{122'1'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \nu^*_{12}\tau \int_1^2 \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,\beta\,d\xi,\\
&\iint\limits_{s_{344'3'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = -\nu^*_{43}\tau \int_4^3 \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,\beta\,d\xi,\\
&\iint\limits_{s_{233'2'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = -\mu^*_{23}\tau \int_2^3 \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,\beta\,d\eta,\\
&\iint\limits_{s_{411'4'}} \gamma Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \mu^*_{14}\tau \int_1^4 \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,\beta\,d\eta;
\end{aligned} \tag{34.16}$$

$$\iint\limits_{S_{122'1'}} \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt = \tau\int\limits_1^2 \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi,$$

$$\iint\limits_{S_{344'3'}} \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\,dt = -\tau\int\limits_4^3 \gamma Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi,$$

$$\iint\limits_{S_{233'2'}} \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt = \tau\int\limits_2^3 \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta, \qquad (34.17)$$

$$\iint\limits_{S_{411'4'}} \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\,dt = -\tau\int\limits_1^4 \gamma Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta.$$

Considérons maintenant les intégrales de volume incluses dans (34.13), à savoir:

$$\iiint\limits_V \rho\left[K_{\eta=\text{const}}\mu + \left(K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\nu\right]\nu Q(y)\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt,$$

$$\iiint\limits_V \rho\left[\left(K_{\eta=\text{const}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)\mu + K_{\xi=\text{const}}\nu\right]\mu Q(y)\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt, \qquad (34.18)$$

$$\iiint\limits_V p\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt,\ \iiint\limits_V p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt.$$

Nous admettons (ceci est vrai à l'ordre de précision imposé au schéma aux différences construit près) que les grandeurs hydrodynamiques entrant dans (34.18) sont constantes et égales aux valeurs moyennes sur la maille de la base inférieure *). On sera alors en mesure de ramener les intégrales de (34.18) à la forme suivante en utilisant la remarque sur l'indépendance du temps des éléments définissant le système de coordonnées local:

$$\iiint\limits_V \rho\nu Q(y)\left[K_{\eta=\text{const}}\mu + \left(K_{\xi=\text{const}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\nu\right]\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt =$$

$$= \tau(\rho\nu)\left[\mu\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\beta K_{\eta=\text{const}}\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta +\right.$$

*) On pourrait, si nécessaire, les prendre, par exemple, comme la demi-somme des valeurs sur les bases supérieure et inférieure.

$$+\nu\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\,\beta\left(K_{\xi=\text{const}}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\Big]+o\ (\ldots),$$

$$\iiint\limits_{V}\rho\mu Q(y)\Big[\Big(K_{\eta=\text{const}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\Big)\mu+K_{\xi=\text{const}}\nu\Big]\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\,dt=$$

$$=\tau(\rho\mu)\Big[\mu\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\left(K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\nu\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\,K_{\xi=\text{const}}\beta\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\Big]+o\ (\ldots),$$

$$\iiint\limits_{V} p\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{11}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt=$$

$$=p\tau\Big[\int\limits_{2}^{3}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta-\int\limits_{1}^{4}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\Big]+o\ (\ldots),$$

$$\iiint\limits_{V} p\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\sqrt{g}\,Q(y)}{\sqrt{g_{22}}}\right)d\xi\,d\eta\,dt=$$

$$=-p\tau\Big[\int\limits_{1}^{2} Q(y)\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi-\int\limits_{4}^{3} Q(y)\beta\sqrt{g_{11}}\,d\xi\Big]+o\ (\ldots).$$

Ecrivons le système (34.13) en nous servant des expressions établies pour les intégrales de volume et pour celles prises sur les faces latérales :

$$[\rho]^0\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\rho]_0\iint\limits_{S_{1432}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\tau[\rho]_{12}\left\{[v^n]_{12}\int\limits_{1}^{2} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[v^*]_{12}\int\limits_{1}^{2}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}+$$

$$+\tau[\rho]_{43}\left\{[v^n]_{43}\int\limits_{4}^{3} Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[v^*]_{43}\int\limits_{4}^{3}\beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}+$$

$$+\tau[\rho]_{23}\left\{[\mu^n]_{23}\int\limits_{2}^{3} Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta-[\mu^*]_{23}\int\limits_{2}^{3}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\}-$$

$$-\tau[\rho]_{14}\left\{[\mu^n]_{14}\int\limits_{1}^{4} Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta-[\mu^*]_{14}\int\limits_{1}^{4}\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\}=0,$$

(34.19$_1$)

$$[\rho\mu^k]^0 \iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta + [\rho\mu]_0 \iint\limits_{S_{1432}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ [\rho\nu]_0 \iint\limits_{S_{1432}} \alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta -$$

$$- \tau[\rho\mu^k]_{12}\left\{[\nu^n]_{12}\int_1^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi - [\nu^*]_{12}\int_1^2 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\} +$$

$$+ \tau[\rho\mu^k]_{43}\left\{[\nu^n]_{43}\int_4^3 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi - [\nu^*]_{43}\int_4^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\} +$$

$$+ \tau[\rho\mu^n]_{23}\left\{[\mu^n]_{23}\int_2^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta - [\mu^*]_{23}\int_2^3 \beta^2 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} +$$

$$+ \tau[\rho\nu^k]_{23}\left\{[\mu^n]_{23}\int_2^3 \alpha Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta - [\mu^*]_{23}\int_2^3 \alpha\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} -$$

$$- \tau[\rho\mu^n]_{14}\left\{[\mu^n]_{14}\int_1^4 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta - [\mu^*]_{14}\int_1^4 \beta^2 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} -$$

$$- \tau[\rho\nu^k]_{14}\left\{[\mu^n]_{14}\int_1^4 \alpha Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta - [\mu^*]_{14}\int_1^4 \alpha\beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} -$$

$$- \tau\left\{[p]_0 - [p]_{23}\right\}\int_2^3 \beta Q\sqrt{g_{22}}\,d\eta + \tau\{[p]_0 - [p]_{14}\}\int_1^4 \beta Q\sqrt{g_{22}}\,d\eta -$$

$$- \tau[\rho\nu]_0\left\{[\mu]_0 \iint\limits_{S_{1234}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta +\right.$$

$$\left. + [\nu]_0 \iint\limits_{S_{1234}} \beta\left[K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right] Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\right\} +$$

$$+ \tau[\rho\nu]_0\left\{[\mu^*]_0 \iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta +\right.$$

$$\left. + [\nu^*]_0 \iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} \beta\left[K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right] Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\right\} +$$

$$+ o(\ldots) = 0, \qquad (34.19_2)$$

$$-\tau[\rho\nu^k]_{14}\left\{[\mu^n]_{14}\int_1^4 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta-[\mu^*]_{14}\int_1^4 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\}-$$

$$-\tau\{-[p]_0+[p]_{12}\}\int_1^2 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi+$$

$$+\tau\{-[p_0]+[p]_{43}\}\int_4^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi+$$

$$+\tau[\rho\mu]_0\left\{[\mu]_0\iint_{S_{1234}} \beta Q(y)\left[K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right]\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+\right.$$

$$\left.+[\nu]_0\iint_{S_{1234}} \beta Q(y)K_{\xi=\text{const}}\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\right\}-$$

$$-\tau[\rho\mu]_0\left\{[\mu^*]_0\iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta Q(y)\left[K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right]\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+\right.$$

$$\left.+[\nu^*]_0\iint_{S_{1'2'3'4'}} \beta Q(y)K_{\xi=\text{const}}\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta\right\}+o(\ldots)=0, \qquad (34.19_3)$$

$$[\rho\nu^k]^0\iint_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+[\rho\nu]_0\iint_{S_{1432}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta+$$

$$+[\rho\mu]_0\iint_{S_{1432}} \alpha Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta-$$

$$-\tau[\rho\nu^n]_{12}\left\{[\nu^n]_{12}\int_1^2 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[\nu^*]_{12}\int_1^2 \beta^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}-$$

$$-\tau[\rho\mu^k]_{12}\left\{[\nu^n]_{12}\int_1^2 \alpha Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[\nu^*]_{12}\int_1^2 \alpha\beta\, Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}+$$

$$+\tau[\rho\nu^n]_{43}\left\{[\nu^n]_{43}\int_4^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[\nu^*]_{43}\int_4^3 \beta^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}+$$

$$+\tau[\rho\mu^k]_{43}\left\{[\nu^n]_{43}\int_4^3 \alpha Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi-[\nu^*]_{43}\int_4^3 \alpha\beta\, Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\}+$$

$$+\tau[\rho\nu^k]_{23}\left\{[\mu^n]_{23}\int_2^3 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta-[\mu^*]_{23}\int_2^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\}-$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]^0 \iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_0 \iint\limits_{S_{1432}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\tau\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{12}\left\{[v^n]_{12}\int\limits_1^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi -\right.$$

$$\left.-[v^*]_{12}\int\limits_1^2 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\} -\tau\,[pv^n]_{12}\int\limits_1^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi +$$

$$+\tau\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{43}\left\{[v^n]_{43}\int\limits_4^3 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi -\right.$$

$$\left.-[v^*]_{43}\int\limits_4^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi\right\} +\tau\,[pv^n]_{43}\int\limits_4^3 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi +$$

$$+\tau\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{23}\left\{[\mu^n]_{23}\int\limits_2^3 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta -\right.$$

$$\left.-[\mu^*]_{23}\int\limits_2^3 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} +\tau\,[p\mu^n]_{23}\int\limits_2^3 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta -$$

$$-\tau\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{14}\left\{[\mu^n]_{14}\int\limits_1^4 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta -\right.$$

$$\left.-[\mu^*]_{14}\int\limits_1^4 \beta Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta\right\} -\tau\,[p\mu^n]_{14}\int\limits_1^4 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta + o(\ldots)=0. \tag{34.19$_4$}$$

Le système de relations (34.19) contient un nombre considérable d'intégrales. Nous chercherons d'abord à éclaircir leur signification géométrique et à réduire au minimum le nombre d'intégrales de divers types tout en restant dans le cadre de l'ordre de précision choisi pour l'écriture du système d'équations aux différences.

Soit l'expression $\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta$; pour $Q(y)\equiv 1$ c'est l'aire de la maille de la base supérieure; pour $Q(y)=y$ le volume de la figure engendrée par la révolution, autour de l'axe des x, de la maille de la base supérieure. De façon analogue, $\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta$

pour $Q(y) \equiv 1$ représente l'aire de la maille de la base inférieure et pour $Q(y) = y$ le volume de la figure engendrée par la révolution, autour de l'axe des x, de la maille de la base inférieure. Les intégrales $\int_i^j Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi$ et $\int_i^j Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta$, pour $Q(y) \equiv 1$, sont respectivement égales aux longueurs des arêtes de la maille de la base inférieure, arêtes formées par l'arc ij des lignes ξ et par l'arc ij des lignes η. Lorsque $Q(y) = y$, ce sont les aires des surfaces des figures engendrées par la révolution autour de l'axe des x de ces arcs. En construisant un système de coordonnées local il est légitime de poser que

$$\alpha,\ \beta,\ K_{\xi=\text{const}},\quad K_{\eta=\text{const}},\quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi},\quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}$$

sont des fonctions lisses.

Calculons leurs valeurs au point médian de la base inférieure. Les expressions écrites ci-dessous sont équivalentes entre elles si l'on se limite à l'ordre de précision choisi pour la construction du schéma aux différences:

$$\iint_{S_{1234}} \beta K_{\eta=\text{const}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = [\beta K_{\eta=\text{const}}]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_{S_{1234}} \beta\left(K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right) Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \left[\beta\left(K_{\xi=\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)\right]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta, \qquad (34.20)$$

$$\iint_{S_{1234}} \beta\left(K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right) Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \left[\beta\left(K_{\eta=\text{const}} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)\right]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_{S_{1234}} \beta\,(K_{\xi=\text{const}})\,Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = [\beta K_{\xi=\text{const}}]_0 \iint_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta.$$

On procédera de même avec les intégrales prises le long des arêtes de la base inférieure en choisissant les valeurs des fonctions correspondantes sous le signe somme aux points médians.

Ces transformations équivalentes permettent de réduire à deux seulement le nombre des différents types d'intégrales, ce qui restreint sensiblement le volume du calcul. Pour abréger, introduisons

les notations suivantes:

$$\iint\limits_{S_{1'2'3'4'}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \mathcal{J}^0,$$

$$\iint\limits_{S_{1234}} Q(y)\sqrt{g}\,d\xi\,d\eta = \mathcal{J}_0,$$

$$\int\limits_1^2 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi = \mathcal{J}_{12}, \qquad (34.21)$$

$$\int\limits_4^3 Q(y)\sqrt{g_{11}}\,d\xi = \mathcal{J}_{43},$$

$$\int\limits_2^3 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta = \mathcal{J}_{23},$$

$$\int\limits_1^4 Q(y)\sqrt{g_{22}}\,d\eta = \mathcal{J}_{14}.$$

En partant de (34.20) et en tenant compte de ce qui précède écrivons la forme définitive du système d'équations aux différences approchant les équations instationnaires de la dynamique des gaz dans un système de coordonnées curviligne local:

$$[\rho]^0\mathcal{J}^0 - [\rho]_0\mathcal{J}_0 - \tau[\rho]_{12}\{[\nu^n]_{12} - [\beta\nu^*]_{12}\}\mathcal{J}_{12} +$$
$$+ \tau[\rho]_{43}\{[\nu^n]_{43} - [\beta\nu^*]_{43}\}\mathcal{J}_{43} + \tau[\rho]_{23}\{[\mu^n]_{23} - [\beta\mu^*]_{23}\}\mathcal{J}_{23} -$$
$$- \tau[\rho]_{14}\{[\mu^n]_{14} - [\beta\mu^*]_{14}\}\mathcal{J}_{14} = 0, \qquad (34.22_1)$$

$$[\rho\mu^k]^0\mathcal{J}^0 - [\rho(\mu+\alpha\nu)]_0\mathcal{J}_0 - \tau[\rho\mu^k]_{12}\{[\nu^n]_{12} - [\beta\nu^*]_{12}\}\mathcal{J}_{12} +$$
$$+ \tau[\rho\mu^k]_{43}\{[\nu^n]_{43} - [\beta\nu^*]_{43}\}\mathcal{J}_{43} +$$
$$+ \tau[\rho(\beta\mu^n + \alpha\nu^k)]_{23}\{[\mu^n]_{23} - [\beta\mu^*]_{23}\}\mathcal{J}_{23} -$$
$$- \tau[\rho(\beta\mu^n + \alpha\nu^k)]_{14}\{[\mu^n]_{14} - [\beta\mu^*]_{14}\}\mathcal{J}_{14} -$$
$$- \tau\{[p]_0 - [p]_{23}\}\beta_{23}\mathcal{J}_{23} + \tau\{[p]_0 - [p]_{14}\}\beta_{14}\mathcal{J}_{14} -$$
$$- \tau[\rho\nu]_0\Big\{([\mu]_0 - [\mu^*]_0)[K_{\eta=\text{const}}]_0 +$$
$$+ ([\nu]_0 - [\nu^*]_0)\Big[K_{\xi-\text{const}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\Big]_0\Big\}\beta_0\mathcal{J}_0 = 0, \qquad (34.22_2)$$

$$[\rho\nu^k]^0\mathcal{J}^0 - [\rho(\nu+\alpha\mu)]_0\mathcal{J}_0 - \tau[\rho(\beta\nu^n + \alpha\mu^k)]_{12}\{[\nu^n]_{12} - [\beta\nu^*]_{12}\}\mathcal{J}_{12} +$$
$$+ \tau[\rho(\beta\nu^n + \alpha\mu^k)]_{43}\{[\nu^n]_{43} - [\beta\nu^*]_{43}\}\mathcal{J}_{43} +$$
$$+ \tau[\rho\nu^k]_{23}\{[\mu^n]_{23} - (\beta\mu^*)_{23}\}\mathcal{J}_{23} - \tau[\rho\nu^k]_{14}\{[\mu^n]_{14} - [\beta\mu^*]_{14}\}\mathcal{J}_{14} +$$

$$+\tau\{[p]_0-[p]_{12}\}\beta_{12}\mathcal{J}_{12}-\tau\{[p]_0-[p]_{43}\}\beta_{43}\mathcal{J}_{43}+$$
$$+\tau[\rho\mu]_0\left\{([\mu]_0-[\mu^*]_0)\left[K_{\eta=\text{const}}-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right]_0+\right.$$
$$\left.+([\nu]_0-[\nu^*]_0)\,[K_{\xi=\text{const}}]_0\right\}\beta_0\mathcal{J}_0=0, \qquad (34.22_3)$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]^0\mathcal{J}^0-\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_0\mathcal{J}_0-$$
$$-\tau\left\{\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{12}([\nu^n]_{12}-[\beta\nu^*]_{12})+[p\nu^n]_{12}\right\}\mathcal{J}_{12}+$$
$$+\tau\left\{\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{43}([\nu^n]_{43}-[\beta\nu^*]_{43})+[p\nu^n]_{43}\right\}\mathcal{J}_{43}+$$
$$+\tau\left\{\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{23}([\mu^n]_{23}-[\beta\mu^*]_{23})+[p\mu^n]_{23}\right\}\mathcal{J}_{23}-$$
$$-\tau\left\{\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{|q|^2}{2}\right)\right]_{14}([\mu^n]_{14}-[\beta\mu^*]_{14})+[p\mu^n]_{14}\right\}\mathcal{J}_{14}=0. \qquad (34.22_4)$$

Si l'on admet que les grandeurs hydrodynamiques se rapportant aux faces latérales et marquées par l'indice double appartiennent à la couche intermédiaire et se calculent suivant les valeurs associées au temps t, d'après les formules appropriées, alors le système de relations (34.22) représente une famille de schémas aux différences à triple couche, construits dans un système de coordonnées curviligne local sur la base des lois de conservation. Après avoir calculé avec (34.22) les valeurs des grandeurs hydrodynamiques $[\rho]^0$, $[\mu^k]^0$, $[\nu^k]^0$, $[\varepsilon]^0$ on déterminera, au centre de la maille de la base supérieure, les composantes cartésiennes de la vitesse $[u]^0$, $[v]^0$, en exécutant ainsi un pas en temps qui nous conduit à l'état de départ pour le pas suivant.

Il nous reste à donner les formules permettant de déterminer le point médian de la maille et celles permettant de calculer μ^*, ν^*.

Si les arêtes de la maille sont approchées par les arcs de circonférence (ou par les segments de droite), l'on prend comme point médian de la maille celui où les arcs de circonférence (segments de droite), menés par les milieux des arêtes opposées, se croisent et se divisent en deux.

Les coordonnées de ce point x_0, y_0 se déterminent par les formules

$$x_0=-\frac{1}{2\Delta}\{[x_{23}^2-x_{14}^2+y_{23}^2-y_{14}^2](y_{12}-y_{43})-$$
$$-[x_{43}^2-x_{12}^2+y_{43}^2-y_{12}^2](y_{14}-y_{23})\},$$
$$y_0=-\frac{1}{2\Delta}\{[x_{43}^2-x_{12}^2+y_{43}^2-y_{12}^2](x_{14}-x_{23})- \qquad (34.23)$$
$$-[x_{23}^2-x_{14}^2+y_{23}^2-y_{14}^2](x_{12}-x_{43})\},$$

où

$$\Delta = (x_{14} - x_{23})(y_{12} - y_{43}) - (x_{12} - x_{43})(y_{14} - y_{23}),$$

et l'indice ij désigne le milieu de l'arête $[ij]$. Tirons au clair la signification des quantités μ^*, ν^* et donnons-en les formules de calcul. Rappelons que

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta t} = \frac{\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{\Delta\eta}{\Delta t} = \frac{\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}.$$

En utilisant (29.5) on obtient

$$\begin{aligned} \mu^* &= \left(\beta'' \frac{\Delta x}{\Delta t} - \alpha'' \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \frac{1}{\beta}, \\ \nu^* &= \left(\beta' \frac{\Delta x}{\Delta t} - \alpha' \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \frac{1}{\beta}, \end{aligned} \tag{34.24}$$

où Δx, Δy sont les différences des coordonnées des points homologues des bases supérieure et inférieure. En comparant (34.24) avec (29.2) on voit sans peine que μ^*, ν^* sont les composantes contravariantes de la vitesse du mouvement du maillage.

Nous terminons le paragraphe par les formules de calcul des intégrales (34.21). Si la construction des lignes du réseau se réalise, comme il a été dit, par les arcs de circonférence, les intégrales incluses dans le système de relations aux différences (34.19) se calculent d'après les formules précises suivantes.

Sur l'arête $[ij]$

$$\mathcal{J}_{ij} \frac{Q(y_i) + Q(y_j)}{2} s_{ij} - \alpha \frac{l_{ij}(x_j - x_i)}{2} \left[\frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\sin^2\theta}\right]_{ij}, \tag{34.25}$$

où θ_{ij} est l'angle égal à la moitié de l'arc

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2},$$

s_{ij} la longueur de l'arête.

Pour les bases inférieure et supérieure

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= 0{,}5\,(Z_{12} + Z_{23} - Z_{43} - Z_{14}), \\ \mathcal{J}^0 &= 0{,}5\,(Z^{12} + Z^{23} - Z^{43} - Z^{14}), \end{aligned} \tag{34.26}$$

où

$$\begin{aligned} Z_{ij} = -(x_j - x_i) &\frac{(y_i + y_j)[Q(y_i) + Q(y_j)] - \alpha y_i y_j}{2 + \alpha} + \\ &+ \frac{Q(y_i) + Q(y_j)}{4} l_{ij}^2 \left[\frac{\sin\theta\cos\theta - \theta}{\sin^2\theta}\right]_{ij} + \\ &+ \alpha l_{ij}^2 \frac{(x_j - x_i)}{4} \left[\frac{1}{3} + \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\sin^3\theta}\right]_{ij}. \end{aligned}$$

Les Z^{ij} sont calculés de façon analogue.

§ 35. Calcul des grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire

Obtention des schémas explicite et implicite selon la technique de calcul des grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire. Interprétation d'une décomposition de discontinuité plane dans le cas où deux états d'un gaz sont séparés par une frontière curviligne. Schéma implicite. Construction, sur la base d'un système d'équations en coordonnées curvilignes locales, de deux systèmes dont chacun dépend d'une coordonnée spatiale. Linéarisation de ces systèmes et leur utilisation pour la construction d'un schéma aux différences implicite.

Ce paragraphe sera consacré au calcul des grandeurs hydrodynamiques rapportées conventionnellement dans le paragraphe précédent aux faces latérales, au pas en temps intermédiaire. Le lecteur a certes deviné qu'il s'agit de l'analogue des « grandes » valeurs décrites au § 7. C'est la raison pour laquelle on se servira ici également de ce terme. Ces grandeurs peuvent être déterminées par diverses méthodes. Nous en considérerons deux.

Première méthode. Calcul de « grandes » valeurs à partir d'une décomposition de discontinuité plane. Si l'on prend les valeurs au moment t_0 dans deux mailles voisines comme les valeurs de gauche et de droite par rapport à la paroi rigide passant par leur arête commune, on peut, par analogie avec le § 7, traiter le problème de la décomposition de discontinuité.

Comme données de départ pour ce problème, on prend les valeurs des grandeurs hydrodynamiques des mailles considérées, les valeurs scalaires étant choisies égales à celles des points médians des mailles. Les valeurs des composantes normales et tangentielles restent à préciser.

Soient deux mailles de numéros $(i - 1/2,\ j - 1/2)$ et $(i - 1/2,\ j + 1/2)$ voisinant suivant l'arête représantant la ligne ξ. Conformément aux notations adoptées, pour la maille de numéro $(i - 1/2,\ j + 1/2)$ c'est l'arête dotée de l'indice 12, pour la maille $(i - 1/2,\ j - 1/2)$ c'est l'arête affectée de l'indice 43. Les composantes normale et tangentielle de la vitesse par rapport à l'arête commune seront respectivement :

pour la maille $(i - 1/2,\ j + 1/2)$

$$[v^n_{i-1/2,\ j+1/2}]_{12} = [\alpha'' u + \beta'' v]_{i-1/2,\ j+1/2}\beta_{12} + [\alpha'' v - \beta'' u]_{i-1/2,\ j+1/2}\alpha_{12}, \tag{35.1}$$

$$[\mu^k_{i-1/2,\ j+1/2}]_{12} = [\beta'' u - \alpha'' v]_{i-1/2,\ j+1/2}\beta_{12} + [\alpha'' u - \beta'' v]_{i-1/2,\ j+1/2}\alpha_{12};$$

pour la maille $(i - 1/2,\ j - 1/2)$

$$[v^n_{i-1/2,\ j-1/2}]_{43} = [\alpha'' u + \beta'' v]_{i-1/2,\ j-1/2}\beta_{43} + [\alpha'' v - \beta'' u]_{i-1/2,\ j-1/2}\alpha_{43},$$

$$[\mu^k_{i-1/2,\ j-1/2}]_{43} = [\beta'' u - \alpha'' v]_{i-1/2,\ j-1/2}\beta_{43} + [\alpha'' u - \beta'' v]_{i-1/2,\ j-1/2}\alpha_{43},$$

où β_{12}, α_{12} sont le sinus et le cosinus de l'angle formé par les lignes de coordonnées au milieu de l'arête 12 et β_{43}, α_{43} ceux au milieu de

l'arête 43. Les valeurs des grandeurs hydrodynamiques des deux côtés de l'arête étant connues on peut calculer la décomposition de discontinuité plane. En comparant les vitesses des discontinuités et celles du maillage on sélectionne les valeurs sur la face latérale passant par l'arête considérée. Les valeurs obtenues (« grandes » valeurs d'après notre terminologie) entreront, comme valeurs définitives, dans les termes correspondants du système (34.22).

On définit de façon analogue les « grandes » valeurs sur les arêtes représentant les lignes η. La différence n'existe que dans les formules de calcul des valeurs initiales des vitesses normale et tangentielle dans les mailles voisines de part et d'autre de l'arête se confondant avec la ligne η. Les voici.

Pour la maille $(i - 1/2,\ j - 1/2)$

$$[\mu^n_{i-1/2,\ j-1/2}]_{23} = \beta_{23}\,[u\alpha' + v\beta']_{i-1/2,\ j-1/2} - \alpha_{23}\,[-u\beta' + v\alpha']_{i-1/2,\ j-1/2}, \tag{35.2}$$

$$[\nu^k_{i-1/2,\ j-1/2}]_{23} = \alpha_{23}\,[u\alpha' + v\beta']_{i-1/2,\ j-1/2} + \beta_{23}\,[-u\beta' + v\alpha']_{i-1/2,\ j-1/2};$$

pour la maille $(i + 1/2,\ j - 1/2)$

$$[\mu^n_{i+1/2,\ j-1/2}]_{14} = \beta_{14}\,[u\alpha' + v\beta']_{i+1/2,\ j-1/2} - \alpha_{14}\,[-u\beta' + v\alpha']_{i+1/2,\ j-1/2},$$

$$[\nu^k_{i+1/2,\ j-1/2}]_{14} = \alpha_{14}\,[u\alpha' + v\beta']_{i+1/2,\ j-1/2} + \beta_{14}\,[-u\beta' + v\alpha']_{i+1/2,\ j-1/2}.$$

Cette technique de calcul des grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire et le système de relations (34.22) forment un schéma aux différences explicite dont les principes de construction remontent aux idées exposées au ch. I.

S e c o n d e m é t h o d e. Or, au cours de calcul, il peut s'avérer indiqué d'appliquer les schémas aux différences implicites. On donne plus bas la technique de calcul de « grandes » valeurs qui, jointe à (34.22), aboutit à un schéma aux différences implicite. Tel qu'il est décrit plus bas il représente une généralisation au cas du système de coordonnées curvilignes du schéma implicite construit aux §§ 11, 21.

Ecrivons le système d'équations de la mécanique des fluides dans le système de coordonnées curvilignes (ξ, η, t) et en composantes de la vitesse introduites au § 29. (Nous ne présentons pas ici le système. Le lecteur peut le reconstituer, au besoin.) Divisons en deux (en barrant alternativement une partie des termes) le système de départ de telle sorte que chaque système représente un système d'équations à une variable d'espace.

Supposons que l'un d'eux représente le système à variables ξ, t, l'autre celui à variables η, t (le premier s'obtient en éliminant tous les termes contenant les dérivées par rapport à η, le second, les dérivées par rappor à ξ). La séparation des termes non pourvus des dérivées des grandeurs hydrodynamiques se fait de façon à ce que chacun des systèmes donne, dans le cas de l'écoulement unidimensionnel,

un système d'équations à une dimension de la mécanique des fluides. Ecrivons les deux systèmes auxquels aboutissent les opérations décrites sur le système de base.

Le premier système:

$$\frac{\partial \mu^n}{\partial t} + \frac{\mu-\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} =$$

$$= [(\mu-\mu^*)\alpha + (\nu-\nu^*)]\frac{\nu^k}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi}, \quad (35.3_1)$$

$$\frac{\partial \nu^k}{\partial t} + \frac{\mu-\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \nu^k}{\partial \xi} = -[(\mu-\mu^*)\alpha + (\nu-\nu^*)]\frac{\mu^n}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi}, \quad (35.3_2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mu-\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\rho}{\beta\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} =$$

$$= -\frac{\rho}{2\sqrt{g}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}\mu^n - \frac{dQ}{dy}\frac{\rho}{y}\frac{\sin[\xi, x]}{\beta}\mu^n, \quad (35.3_3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mu-\mu^*}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\rho c^2}{\beta\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} =$$

$$= -\frac{\rho c^2}{2\sqrt{g}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}\mu^n - \frac{dQ}{dy}\frac{\rho c^2}{y}\frac{\sin[\xi, x]}{\beta}\mu^n. \quad (35.3_4)$$

Le second système:

$$\frac{\partial \nu^n}{\partial t} + \frac{\nu-\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \nu^n}{\partial \eta} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} =$$

$$= [(\nu-\nu^*)\alpha + (\mu-\mu^*)]\frac{\mu^k}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta}, \quad (35.4_1)$$

$$\frac{\partial \mu^k}{\partial t} + \frac{\nu-\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \mu^k}{\partial \eta} = -[(\nu-\nu^*)\alpha + (\mu-\mu^*)]\frac{\nu^n}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta}, \quad (35.4_2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\nu-\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\rho}{\beta\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \nu^n}{\partial \eta} =$$

$$= -\frac{\rho}{2\sqrt{g}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial \eta}\nu^n - \frac{dQ}{dy}\frac{\rho}{y}\frac{\sin[\eta, x]}{\beta}\nu^n, \quad (35.4_3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\nu-\nu^*}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \nu}{\partial \eta} + \frac{\rho c^2}{\beta\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial \nu^n}{\partial \eta} =$$

$$= -\frac{\rho c^2}{2\sqrt{g}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial \eta}\nu^n - \frac{dQ}{dy}\frac{\rho c^2}{y}\frac{\sin[\eta, x]}{\beta}\nu^n, \quad (35.4_4)$$

où c est la vitesse du son dans le milieu (les notations des autres grandeurs ont déjà été rencontrées).

L'étape suivante consiste à construire des schémas implicites pour chacun des systèmes (35.3), (35.4).

Pour rendre notre exposé plus succinct utilisons la forme d'écriture vectorielle pour les systèmes (35.3), (35.4) respectivement :

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial t} + A'(\Psi', \xi, \eta, t)\frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} + H'(\Psi', \xi, \eta, t)\Psi' = 0, \qquad (35.5)$$

$$\Psi' = \begin{bmatrix} \mu^n \\ \nu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Psi''}{\partial t} + A''(\Psi'', \xi, \eta, t)\frac{\partial \Psi''}{\partial \eta} + H''(\Psi'', \xi, \eta, t)\Psi'' = 0, \qquad (35.6)$$

$$\Psi'' = \begin{bmatrix} \nu^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}.$$

Tant que nous n'en avons pas besoin, nous ne concrétisons pas la forme de ces matrices. Pour mettre en œuvre un schéma aux différences implicite il y a lieu de linéariser les systèmes (35.5), (35.6).

Nous supposons connus les vecteurs Ψ', Ψ'' entrant dans les matrices A et H et nous considérons au lieu des systèmes de départ le système linéaire de la forme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + A(\Psi_0, z, t)\frac{\partial \Psi}{\partial z} + H(\Psi_0, z, t)\Psi = 0, \qquad (35.7)$$

où Ψ est le vecteur cherché, z, t sont les variables indépendantes, A, H les matrices connues calculables au moyen du vecteur Ψ_0 qui représente les valeurs au temps t.

Rappelons qu'aux §§ 11, 21 nous avons décrit et mis en œuvre un schéma aux différences implicite. Nous utiliserons ce schéma qui est celui à trois points de la forme

$$B_k^{\text{gauche}}[\Psi]^{k-1} - B_k[\Psi]^k + B_k^{\text{droite}}[\Psi]^{k+1} + G_k = 0. \qquad (35.8)$$

L'indice supérieur du vecteur Ψ signifie que les composantes sont prises au point correspondant au temps $t + \tau$.

Les matrices B_k^{gauche}, B_k, B_k^{droite} et le vecteur G_k se déterminent à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} B_k^{\text{gauche}} &= A_k A_{k-1/2}, \\ B_k^{\text{droite}} &= A_k A_{k+1/2}, \\ B_k &= I + B_k^{\text{gauche}} + B_k^{\text{droite}} - H_k, \end{aligned} \qquad (35.9)$$

$$G_k = \frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}-z_{k-1}}[\Psi]_{k-1/2} + \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1}-z_{k-1}}[\Psi]_{k+1/2} - \\ - A_k([\Psi]_{k+1/2} - [\Psi]_{k-1/2}),$$

$$A_k = \frac{2(z_k - z_{k-1})(z_{k+1}-z_k)}{(z_{k+1}-z_{k-1})^2}(A_{k-1/2} + A_{k+1/2}),$$

$$H_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1}-z_{k-1}} H_{k+1/2} + \frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}-z_{k-1}} H_{k-1/2}.$$

Rappelons que $[\Psi]_{k-1/2}$, $[\Psi]_{k+1/2}$ sont les valeurs du vecteur dans les mailles correspondantes au temps de départ.

On établit les conditions aux limites pour ce système en recourant à la seconde méthode exposée au § 21, i.e. en donnant les vecteurs $[\Psi]^0$, $[\Psi]^K$ sur les deux frontières au temps actuel.

La résolution du système (35.9) se fait par balayage comme on l'a vu au § 21.

Pour effectuer l'application de cette méthode de construction d'un schéma aux différences aux systèmes (35.3), (35.4) il nous reste à écrire les formules de calcul des éléments des matrices A', H', A'', H''.

Pour le système (35.5) (nous conservons les notations adoptées au paragraphe précédent) les matrices A' et H' ont la forme

$$A'_{i-1/2,\, j-1/2} = \frac{\tau}{S'_{n-1/2,\, m-1/2}} \left\| \begin{matrix} \mu-\mu^* & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\rho} \\ 0 & \mu-\mu^* & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{\beta} & 0 & \mu-\mu^* & 0 \\ \frac{\rho c^2}{\beta} & 0 & 0 & \mu-\mu^* \end{matrix} \right\|_{i-1/2,\, j-1/2}, \tag{35.10}$$

$$H'_{i-1/2,\, j-1/2} = \\ = \frac{\tau}{2} \left\| \begin{matrix} 0 & [(\mu-\mu^*)\alpha + (\nu-\nu^*)]\frac{\delta'}{\beta} & 0 & 0 \\ -[(\mu-\mu^*)\alpha + (\nu-\nu^*)]\frac{\delta'}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\beta}\left[\delta' + \frac{\beta'}{y}\frac{dQ(y)}{dy}\right] & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho c^2}{\beta}\left[\delta' + \frac{\beta'}{y}\frac{dQ(y)}{dy}\right] & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|_{i-1/2,\, j-1/2}.$$

Si l'on désigne, pour abréger, le point médian de la maille $(i - 1/2, j - 1/2)$ par 0 et les sommets par 1, 2, 3, 4 comme au paragraphe précédent, alors

$$\delta'_{i-1/2,\, j-1/2} \equiv \delta'_0 = \frac{S''_{23} - S''_{14}}{S'_0 S''_0};$$

S' et S'' sont les longueurs correspondantes des arcs des lignes ξ et η, $[\mu, \nu]_0$ les composantes contravariantes de la vitesse du milieu, ρ, p, c la densité, la pression et la vitesse du son dans la maille au temps de départ, $[\mu^*, \nu^*]_0$ les composantes contravariantes de la vitesse du maillage (du point médian de la maille), α, β le cosinus et le sinus de l'angle formé par les lignes de coordonnées.

En considérant une chaîne de mailles, l'indice j ayant une valeur fixée et la valeur de i ($i = 1, \ldots, I - 1$) étant variable, nous aboutirons au système d'équations aux différences reliant les valeurs des grandeurs hydrodynamiques dans les mailles le long d'une ligne ξ fixée. Les valeurs des vecteurs

$$\Psi'_{0,\, j-1/2} = \begin{bmatrix} \mu^n \\ \nu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{0,\, j-1/2}, \qquad \Psi'_{I,\, j-1/2} = \begin{bmatrix} \mu^n \\ \nu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{I,\, j-1/2}$$

étant connues sur les frontières de gauche et de droite du domaine au temps $t + \tau$, on peut résoudre cette chaîne d'équations et trouver les valeurs que prennent les vecteurs Ψ' sur les arêtes 23 et 14 de toutes les mailles de cette chaîne.

En procédant ainsi pour chacune des chaînes nous déterminerons les valeurs des quantités μ^n, ν^k, ρ, p au temps $t + \tau$ sur les arêtes portant l'indice 23, 14 pour toutes les mailles du domaine. (Rappelons qu'en conformité avec notre schéma de calcul nous déterminons avant tout les valeurs des grandeurs sur les frontières du domaine.)

Nous adoptons une procédure analogue pour le système (35.4) en l'appliquant à chaque chaîne de mailles le long d'une ligne η de la frontière inférieure à la frontière supérieure du domaine.

Les matrices A'', H'' s'écrivent pour le système (35.6)

$$A''_{i-1/2,\, j-1/2} = \frac{\tau}{S''_{i-1/2,\, j-1/2}} \left\| \begin{matrix} \nu - \nu^* & 0 & 0 & \frac{1}{\beta\rho} \\ 0 & \nu - \nu^* & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{\beta} & 0 & \nu - \nu^* & 0 \\ \frac{\rho c^2}{\beta} & 0 & 0 & \nu - \nu^* \end{matrix} \right\|_{i-1/2,\, j-1/2},$$

$$H''_{i-1/2,\, j-1/2} =$$

$$= \frac{\tau}{2} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & [(\nu-\nu^*)\alpha+(\mu-\mu^*)]\frac{\delta_0''}{\beta} & 0 & 0 \\ -[(\nu-\nu^*)\alpha+(\mu-\mu^*)]\frac{\delta''}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\beta}\left[\delta_0''+\frac{\beta''}{y}\frac{dQ(y)}{dy}\right] & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho c^2}{\beta}\left[\delta_0''+\frac{\beta''}{y}\frac{dQ(y)}{dy}\right] & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|_{\substack{i-1/2, \\ j-1/2}},$$

$$\delta_0'' = \frac{S_{43}' - S_{12}'}{S_0' S_0''}.$$

La résolution du système d'équations aux différences écrit pour une chaîne de mailles le long de la ligne η de la frontière inférieure à la frontière supérieure où les valeurs des vecteurs

$$\Psi''_{i-1/2,\,0} = \begin{bmatrix} \nu^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{i-1/2,\,0} \quad \text{et} \quad \Psi''_{i-1/2,\,J} = \begin{bmatrix} \nu^n \\ \mu^k \\ \rho \\ p \end{bmatrix}^{i-1/2,\,J}$$

sont connues à partir des conditions aux limites, fournira les valeurs des quantités ν^n, μ^k, ρ, p sur les arêtes portant les indices 12, 43 au temps $t + \tau$.

En opérant de la façon décrite sur chacune des chaînes de mailles le long de la ligne η trouvons les valeurs des vecteurs Ψ'' sur toutes les arêtes 12, 43 du domaine.

C'est ainsi que s'achève le calcul des grandeurs hydrodynamiques au temps $t + \tau$ sur toutes les arêtes des mailles du domaine, d'après le schéma implicite décrit.

§ 36. Quelques remarques sur les principes de la mise en œuvre de la technique

Exigences concernant l'algorithme aux différences, formulées à partir de l'application expérimentale de la méthode. Approches et tactique de la résolution des problèmes.

Les idées et les principes que nous avons essayé d'exposer tout au long de ce livre ont été formés et vérifiés pendant près de vingt ans. Au cours de ces années, un grand nombre de complexes programmés a été créé dont le premier a démarré dès 1956-1957. Sa définition logique a été élaborée par V. Loutzikovitch et sa programmation a été effectuée par G. Novojilova. Depuis, les auteurs et les autres chercheurs ont résolu bien des problèmes complexes. Au fur et à mesure que les connaissances s'accumulaient et se généralisaient on

perfectionnait les algorithmes en étendant leurs possibilités, on créait de nouvelles réalisations des programmes. Nous signalons à ce propos que l'un des derniers complexes programmés pour le calcul des écoulements complexes, basé sur les principes du ch. IV, a été crée par G. Alalykin, G. Novojilova, L. Plyner, V. Meltsas, A. Nikoulina. La contribution des autres collaborateurs des auteurs de cette monographie à la mise en œuvre des algorithmes numériques et à la réalisation des recherches de calcul nécessaires est soulignée aux paragraphes traitant des résultats correspondants.

Etant donné leur expérience personnelle, les auteurs et leurs collègues ont dû reconnaître que les problèmes de la mécanique des milieux continus posés par la pratique sont à l'heure actuelle si complexes que le progrès de la technique des ordinateurs n'y suffit plus. Leur résolution n'est donc possible qu'à condition d'avoir des algorithmes numériques efficaces. Ajoutons encore que le choix et l'utilisation des algorithmes décrits dépendent dans une large mesure des principes généraux et des idées dont s'inspire l'opérateur en élaborant une technique de calcul. Les auteurs pensent que, comme le prouve l'expérience, ceci est d'une importance capitale et mérite un examen spécial. Formulons donc les exigences auxquelles doivent répondre les méthodes numériques et les schémas aux différences et dont l'application, si elle n'est pas nécessaire, est au moins très utile pour notre entreprise.

L'une des exigences essentielles imposées aux méthodes numériques actuelles est que l'algorithme doit s'adapter aux particularités des écoulements à calculer. En particulier, il est essentiel que les domaines d'influence soient correctement pris en compte. La propriété du schéma aux différences de traduire de façon adéquate les domaines d'influence des équations différentielles aux dérivées partielles de départ ne donne pas seulement la possibilité de choisir un domaine de calcul minimal, mais elle permet naturellement de résoudre la question des conditions aux limites. Les schémas jouissant de cette propriété ne nécessitent généralement aucune condition aux limites complémentaire sauf celles qu'exige la formulation précise de problème. Ce fait est souvent déterminant dans la recherche des solutions d'une structure quelque peu compliquée.

Le caractère complexe des domaines où l'on a à effectuer les calculs contraint souvent le chercheur à appliquer un large éventail des maillages aux différences très variés (curvilignes, mobiles, etc.), à isoler les surfaces de discontinuité, les singularités du type des points de cassure des frontières, etc.

La variété de l'éventail des conditions aux limites, la facilité de leur changement entraînent univoquement un algorithme explicite de calcul des frontières. Le désir d'étendre la technique de calcul aux problèmes munis d'une géométrie compliquée conduit naturellement à la répartition du calcul par domaines.

Au cours de la résolution d'un problème les circonstances concrètes peuvent inciter à choisir une tactique de calcul admettant l'utilisation non seulement de schémas explicites mais aussi dans certains cas de schémas implicites. Par ailleurs, la simplicité logique, qui fait préférer les schémas explicites, ne doit pas faire oublier les considérations suivantes. Pour les équations de la dynamique des gaz les intervalles caractéristiques de variation des différents paramètres sont presque partout définis, *grosso modo*, par les caractéristiques acoustiques ou cônes caractéristiques. Or, ceux-ci déterminent, en vertu des critères de stabilité des schémas aux différences explicites, les pas d'intégration correspondants. D'où il est clair que lors de la résolution de tels problèmes, l'absence des contraintes sur le pas d'intégration sur l'une des variables, admissible du point de vue des schémas implicites, ne peut pas être réalisée pour des raisons de précision de calcul. C'est pourquoi le pas d'intégration est pratiquement limité par la même condition de Courant, Friedrichs et Lewy que dans le cas des schémas aux différences explicites. Dans les cas contraires (notamment, lors du calcul des couches dites d'entropie) lorsque le critère de stabilité impose trop de contraintes sur le pas en temps, il apparaît naturel d'appliquer les schémas implicites à l'intégration des solutions lisses. Par ailleurs, pour le calcul des sous-domaines d'écoulement présentant de fortes discontinuités non isolées les schémas aux différences explicites semblent, ordinairement, plus indiqués.

Les raisonnements suivants s'appuient sur le fait que la plupart des écoulements rencontrés dans les applications pratiques se caractérisent par la présence de diverses surfaces de discontinuité dont la configuration et la position, même approximative, sont parfois inconnues au préalable. Cela rend très problématique l'application des méthodes basées sur l'isolation obligatoire de toutes les surfaces de discontinuité, qui font alors place aux méthodes dites méthodes « shock-capturing ». Ces dernières opèrent non sur les surfaces de discontinuité, mais sur les domaines pourvus de paramètres gazodynamiques aux gradients élevés. Les méthodes « shock-capturing » doivent elles aussi satisfaire à certaines exigences complémentaires. Notamment, il faut essayer de limiter l'étalement des discontinuités à un nombre aussi petit que possible de mailles du maillage aux différences.

Il est ensuite fort souhaitable qu'un schéma aux différences permette, sans qu'on ait à introduire des algorithmes supplémentaires assez compliqués, d'isoler les surfaces de discontinuité dont la structure soit est connue au préalable (onde de choc de tête, interface entre les jets), soit est mise en évidence au cours du calcul.

En parlant de la tactique d'isolement au cours de calcul des singularités il convient de citer la technique suivante. En isolant le front d'onde on n'a pas besoin de le suivre sans cesse depuis le début

jusqu'à la fin. On peut le « perdre » pendant des brefs laps de temps ou dans des petits domaines de l'espace pour le « retrouver » ensuite. Eclaircissons cela sur un exemple. Supposons qu'on ait à suivre le passage d'une onde de choc à travers deux substances (deux domaines physiques) séparées par une discontinuité de contact de forme compliquée. Bien qu'un calcul total de l'interaction de l'onde incidente avec une telle discontinuité de contact représente un problème fort ardu, le passage de l'onde proprement dit peut être calculé sans qu'on fasse les détails de l'interaction. Pour ce faire procédons comme suit. Comme premier domaine de calcul prenons une partie de domaine physique se trouvant en arrière du front de l'onde incidente. Dans le second domaine physique nous isolons comme frontière de calcul une certaine surface proche de la discontinuité de contact. Disons que cette surface est un front d'onde. Il est évident que tant qu'elle n'est pas affectée par la perturbation, elle représentera une surface caractéristique. La partie du second domaine physique incluse entre la discontinuité de contact et la surface caractéristique sera le second domaine de calcul. La tactique de calcul ultérieure est la suivante.

Dès que l'onde incidente aura atteint une portion de la frontière de contact, elle change de type et devient une discontinuité de contact. Après quoi une onde de choc « étalée » se met à se propager à l'intérieur du second domaine. Là où l'onde étalée affecte la surface caractéristique, celle-ci devient une portion du front de choc. De sorte que c'est seulement dans un petit voisinage de discontinuité de contact que le calcul s'effectue sans particularisation d'un front de choc précis, le pas en espace y étant petit.

Le schéma doit être « souple » dans ce sens qu'il doit permettre le calcul avec un petit pas en temps (ou en variable jouant un rôle analogue), i.e. avec des nombres de Courant sensiblement inférieurs à l'unité. Cette dernière exigence est due au fait que le pas d'intégration maximal admissible peut, l'écoulement n'étant pas homogène, différer sensiblement dans les différents points du domaine à calculer.

Enfin, une autre propriété qui tout en n'étant pas indispensable, est néanmoins fort souhaitable selon les auteurs. Il s'agit de la monotonie du schéma aux différences, i.e. de la propriété du schéma de transformer les distributions monotones de paramètres (plus précisément, de leurs combinaisons — invariants riemanniens des équations linéarisées correspondantes) en celles monotones. La non-monotonie du schéma lors du calcul des écoulements pourvus d'assez fortes discontinuités peut conduire à des situations catastrophiques (par exemple, à l'obtention des densités ou des températures négatives). Dans le cas des schémas non monotones ce genre d'inconvénients doit être évité au préalable lors de l'élaboration des algorithmes.

La méthode qui est à la base de la présente monographie satisfait non seulement aux exigences mentionnées plus haut mais encore elle permet d'y satisfaire souvent mieux que les autres méthodes. Ainsi, par exemple, de nombreuses études comparatives ont montré qu'elle n'étale pas plus les chocs de compression dans les problèmes de la dynamique des gaz que toute autre méthode « shock-capturing ».

Soulignons que malgré que la méthode assure formellement le premier ordre d'approximation, elle permet de résoudre un grand nombre de problèmes avec une précision satisfaisante pour les buts pratiques, et voici pourquoi. Si l'on prend en compte le fait que par leur structure les solutions des équations de la dynamique des gaz représentent les alternances des domaines où elles sont lisses (où les fonctions hydrodynamiques sont constantes ou proches des fonctions linéaires) qui sont séparés par des discontinuités, et si l'on isole, au cours du calcul, celles qui sont essentielles, on obtient en fait plus de précision qu'en utilisant les schémas d'ordre supérieur mais sans individualisation des discontinuités.

En conclusion, soulignons une fois de plus certaines particularités de la technique d'intégration des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz, technique s'inspirant des principes exposés.

a) Elle est valable pour une vaste classe de problèmes de structure compliquée munis d'un ensemble étendu de types de frontières.

b) La description et la résolution de chaque problème isolé peuvent se faire dans le système de coordonnées le mieux adapté aux particularités du problème.

c) Le fait que les lois de conservation soient observées assure un calcul satisfaisant des solutions discontinues même sans qu'on isole la discontinuité.

d) En combinant les schémas explicite et implicite pour le calcul de la couche intermédiaire on peut élaborer une tactique de calcul optimale.

e) Le schéma aux différences peut avoir une large application avec les différents maillages flottants.

f) La propriété de traduire de façon adéquate les domaines d'influence permet de choisir les domaines de calcul minimaux et d'utiliser, ordinairement, le nombre de conditions aux limites qu'exige une formulation précise du problème.

L'efficacité des principes et des idées formulés plus haut, qui sont à la base de construction des algorithmes numériques correspondants, est confirmée non seulement par les nombreux problèmes résolus à l'heure actuelle par la présente méthode, mais également par le fait qu'un bon nombre de ces problèmes n'ont été résolus par aucune autre méthode malgré les grands efforts qui y ont été déployés. La deuxième partie du livre est consacrée à certains de ces problèmes.

Le progrès réalisé à l'aide de la méthode décrite dans la dynamique des gaz et l'aérodynamique permet d'espérer son application fructueuse à la résolution numérique d'autres problèmes décrits par les systèmes quasi linéaires hyperboliques. Il est important de souligner à cet égard qu'en envisageant les conclusions concernant les avantages et les succès de cette méthode il ne faut pas perdre de vue les buts visés par les auteurs, le calcul automatique, les progrès dans l'automatisation de la programmation et les succès dans le perfectionnement des autres méthodes numériques et des algorithmes *).

*) Les auteurs expriment leur gratitude à N. Anoutchina pour avoir lu le manuscrit de la première partie et y avoir apporté plusieurs remarques utiles.

PARTIE DEUXIÈME

ILLUSTRATION DES POSSIBILITÉS DE LA MÉTHODE

On donne ci-dessous les résultats de la résolution numérique d'une assez vaste classe de problèmes de la dynamique des gaz, qui illustrent les possibilités des schémas décrits dans la première partie de la monographie. La majeure partie de la matière traitée a été publiée par les auteurs, leurs collaborateurs et d'autres chercheurs. Pour cette raison, et aussi vu le caractère illustratif des résultats présentés on a omis, là où cela était possible, la description technique détaillée (formules donnant les surfaces des corps contournés, caractéristiques des maillages aux différences, type du calculateur et du programme de traduction, temps machine, etc.) que l'on peut d'ailleurs restituer en remontant aux sources. Exception est faite pour les données concernant l'initialisation, la position des conditions aux limites et la précision de la méthode. Muni de ces connaissances, le lecteur pourra plus aisément s'orienter dans la résolution des problèmes posés. Sauf mention du contraire, tous les exemples se rapportent à l'écoulement du gaz parfait dont l'indice adiabatique $\varkappa = 1{,}4$.

CHAPITRE V

PROBLÈMES INSTATIONNAIRES DE LA DYNAMIQUE DES GAZ

Dans ce chapitre sont présentées les solutions de certains problèmes instationnaires illustrant les performances des schémas aux différences finies exposés dans la première partie de la monographie. Outre les résultats obtenus par les auteurs, personnellement ou en collaboration, on envisage également ceux obtenus par A. Fonarev et V. Kolgan (§ 37), A. Fonarev et V. Podloubny (§ 38), L. Chourchalov (§ 39) et N. Isakova (§ 41).

§ 37. Diffraction d'une onde de choc par un corps bidimensionnel

Diffraction d'une onde de choc plane (avec, en aval, un écoulement super- et subsonique) par un profil en losange, par un cylindre perpendiculaire au plan d'écoulement et par une sphère. Evolution de l'écoulement dans le temps et établissement d'une figure d'écoulement stationnaire.

Nous commençons à analyser les résultats de la résolution numérique des problèmes instationnaires de la dynamique des gaz en envisageant le problème de diffraction d'une onde de choc par des corps plans ou à symétrie axiale. Ce problème est formulé de la façon suivante.

Soit une onde de choc plane aux paramètres constants (avant l'interaction avec le corps) en aval de son front attaquant un profil symétrique plan ou un corps de révolution. La résolution du problème s'effectue dans les systèmes de coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (x, r, φ) l'axe des x se confondant avec l'axe de symétrie ou étant situé dans le plan de symétrie du corps. Plaçons l'origine des coordonnées au point amont du corps. Nous nous limitons aux cas où le front d'onde avant le contact avec le corps est perpendiculaire à l'axe des x, et le gaz en amont du front est au repos et est homogène. Si les conditions mentionnées sont remplies, le caractère bidimensionnel de l'écoulement n'est pas non plus compromis une fois que l'onde de choc (et le flux qui se déplace derrière elle) entre en interaction avec le corps baigné. Prenons comme origine du temps t le temps du début de l'interaction coïncidant avec celui

où l'onde atteint le point amont du corps ($x = 0$). L'initialisation du problème consiste donc à donner les distributions constantes par morceaux des paramètres de gaz pour $t = 0$:

$$u = u_1 = 0,\ v = v_1 = 0,\ p = p_1,\ \rho = \rho_1 \text{ pour } x > 0,$$

$$u = u_2 > 0,\ v = v_2 = 0,\ p = p_2,\ \rho = \rho_2 \text{ pour } x < 0.$$

Ici l'indice 1 (2) est associé aux paramètres en amont (en aval) du choc. Les paramètres mentionnés, i.e. p_1, ρ_1, ... sont des constantes données satisfaisant aux relations sur le choc, ces dernières contenant, de plus, la vitesse du choc D_0.

Les conditions aux limites se composent de: la condition d'imperméabilité de la surface du corps, la condition analogue sur le plan ou sur l'axe de symétrie ainsi que l'égalité des paramètres à leurs valeurs initiales u_1, u_2, ... suffisamment loin du corps. De plus, sur les frontières « latérales » du domaine de calcul les grandeurs correspondantes doivent être prises compte tenu du déplacement de l'onde de choc dont le mouvement loin du corps est régi par la loi $x = D_0 t$. Le domaine de calcul doit être suffisamment grand pour que les perturbations créées par le corps n'aient pas le temps, au moment donné, de modifier le flux « non perturbé ». En pratique, dans les exemples ci-dessous extraits de [77], [103] cette condition n'était pas toujours remplie et l'on a posé, en plus de conditions aux limites précises, certaines conditions approchées (suffisamment « lâches ») qui, sans introduire des erreurs notables dans les résultats, ont permis, semble-t-il, de tirer les données nécessaires sur l'évolution de l'écoulement en utilisant des domaines de calcul sensiblement plus réduits. En passant sur les autres détails que le lecteur peut trouver dans [77], [103], abordons l'exposé de certains résultats obtenus dans ces ouvrages à l'aide du schéma aux différences du § 24.

Les deux premiers diagrammes se rapportent au problème de la diffraction d'une onde de choc par un profil en losange symétrique. Sur les figures 37.1, *a* à *c* sont représentées les lignes isobares pour trois instants dans le cas où le nombre de Mach M_0 du flux en aval du front de l'onde de choc non perturbée est égal à 1,5. Les chiffres figurant à côté des isobares représentent les valeurs de la pression rapportée à p_2, le temps est échelonné en l/c_2, où l est la longueur de la corde du profil, c_2 la vitesse du son en aval de l'onde de choc (dans la « veine incidente non perturbée »). Le calcul était effectué sur le réseau fixe, ce qui explique la représentation des ondes de choc par l'entassement des isobares. Pour estimer la précision, on a tracé en trait interrompu sur la figure 37.1, *c* l'onde de choc qui s'obtient de la résolution stationnaire. En comparant les valeurs des paramètres sur la surface du profil qui ont été obtenues dans le problème considéré au cours de l'établissement avec les valeurs stationnaires précises on a relevé que les erreurs sur la pression n'excèdent pas

2 % et celles sur la densité sont incluses dans les limites de 4 %, atteignant leurs maxima aux points anguleux du profil.

L'évolution instationnaire de l'écoulement autour du même profil au cas de $M_0 = 0{,}8$ est donnée sur la figure 37.2, *a* à *c*. On voit qu'après le passage de l'onde de choc au-dessus du corps il se crée dans la veine des régions de vitesses sub- et supersoniques (la

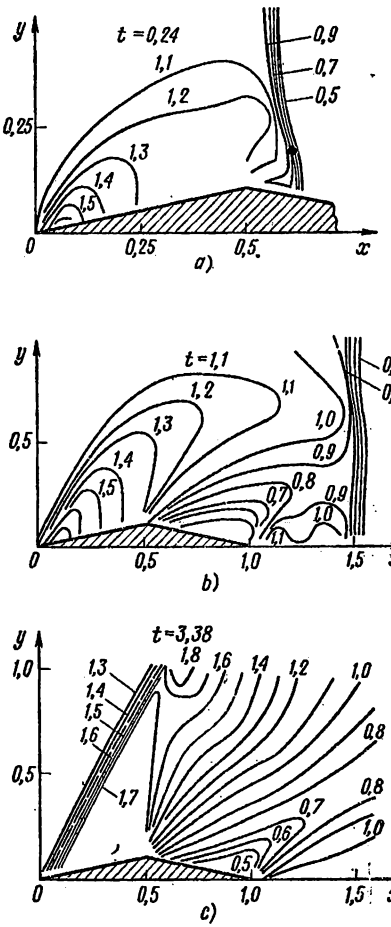


Fig. 37.1

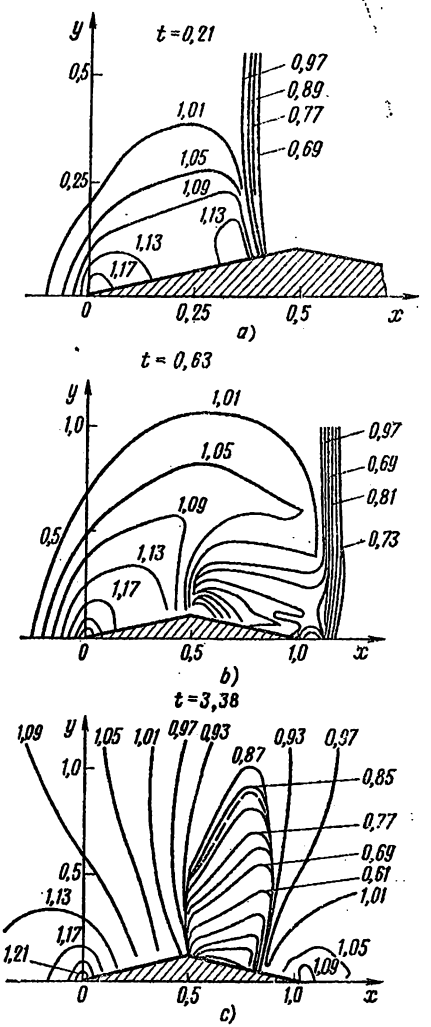


Fig. 37.2

ligne en trait interrompu figure la ligne sonique) et un choc de compression fermant la zone supersonique locale.

Les autres exemples se rapportent à la diffraction d'une onde de choc par un cylindre perpendiculaire au plan d'écoulement et par une sphère. Les figures 37.3, *a* à *c* donnent, pour certains instants,

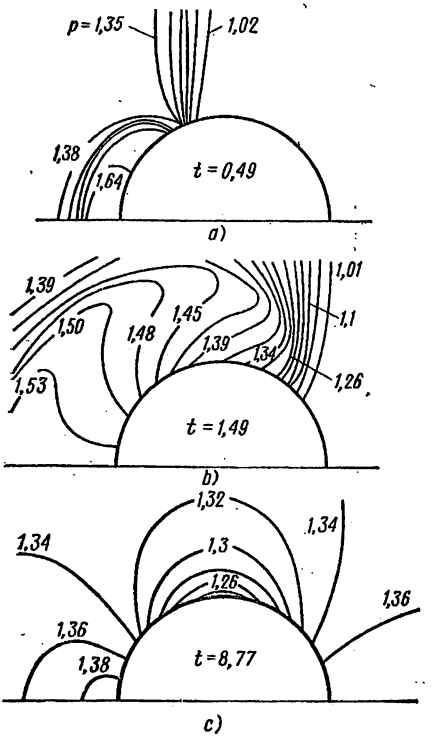


Fig. 37.3

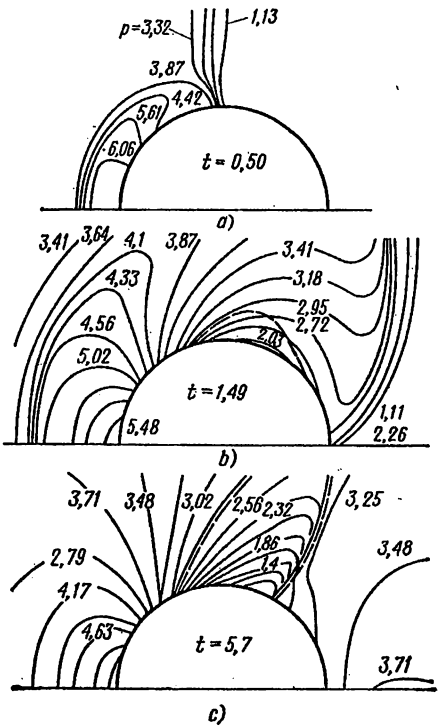


Fig. 37.4

les diagrammes des isobares traduisant la diffraction d'une onde de choc par un cylindre, pour $M_0 = 0{,}21$. Sur cette figure et sur les suivantes la pression est rapportée non pas à p_2, comme précédemment, mais à p_1, le temps est échelonné en rapport R/a_1, où R est le rayon du cylindre ou de la sphère et a_1 la vitesse du son dans un gaz au repos. Dans le cas envisagé un écoulement stationnaire subsonique s'établit autour d'un cylindre.

La figure 37.4, *a* à *c* donne les résultats illustrant l'évolution de l'écoulement autour d'une sphère dans le cas du Mach $M_0 = 0{,}8$, celui-ci dépassant, en écoulement stationnaire, la valeur critique correspondante. Il se forme donc au voisinage de la sphère une zone supersonique locale dont la frontière est tracée en pointillé sur la

figure 37.4 (cette frontière comprend la ligne sonique et le choc de compression étalé).

Amesure que s'accroît le nombre de Mach de la veine en aval de l'onde de choc incidente et lorsqu'on passe au régime supersonique ($M_0 > 1$) il se forme par diffraction autour des corps contournés un écoulement avec onde de choc détachée, comme en témoigne la figure 37.5, *a* à *c*, représentant un écoulement autour d'une sphère pour $M_0 = 1{,}5$. La ligne en pointillé en amont du corps de la figure reproduit une ligne sonique. Notons que dans le cas envisagé, l'établissement de la veine en aval du corps a eu lieu beaucoup plus lentement que dans les autres régions. De plus, le calcul conduit à une zone de jet de retour dont la nature serait due, dans le cadre du modèle sans viscosité utilisé, aux erreurs de calcul, ce qui exige une étude supplémentaire.

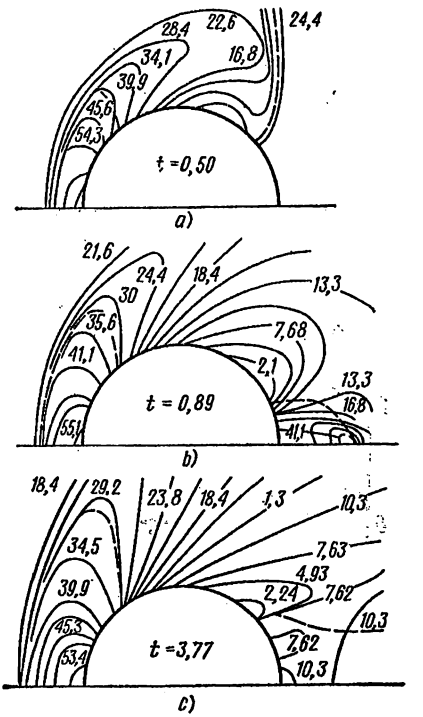


Fig. 37.5

Ecoulement spatial résultant de l'interaction avec un plan d'un flux à symétrie sphérique engendré par une explosion ponctuelle. Evolution de la réflexion d'une onde de choc — de la réflexion régulière à la réflexion irrégulière (« de Mach »).

§ 38. Interaction d'une explosion sphérique avec une surface plane

Envisageons le problème de l'interaction entre le flux engendré par l'explosion d'une charge sphérique supposée ponctuelle et la surface plane située à une distance finie X de l'épicentre de l'explosion. Le schéma de l'interaction est représenté fig. 38.1, où x, r sont les axes du système de coordonnées cylindriques, l'unité de longueur est posée égale à la distance séparant le centre d'explosion du plan le temps t étant compté à partir de l'instant où l'onde de choc sphérique engendrée par explosion effleure le plan. Pour $t < 0$ les distributions des paramètres satisfont à la solution du problème à une dimension (à symétrie sphérique) instationnaire de l'explosion ponctuelle au sein d'un milieu homogène ayant la pression p_1 et la

densité ρ_1. Pour la description de la formulation et des méthodes de solution de ce problème nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [89] où il trouvera également les résultats nécessaires. En se réfléchissant sur le plan l'écoulement à symétrie sphérique (dont le centre de symétrie se trouve au point $x = 1$, $r = 0$) se transforme dans la région de l'interaction en un flux bidimensionnel, conservant, toutefois, la symétrie axiale. Dans le plan méridien x, r la zone de l'écoulement bidimensionnel est limitée par l'axe de symétrie des x, par l'axe des r donnant le plan de l'interaction et par l'onde de choc se propageant vers le haut et à droite. D'abord, l'onde de choc est constituée par une portion lisse, comme le montre la figure 38.1 au temps $t = t_1$. Avec le temps, la réflexion régulière du choc engendré par l'explosion devient impossible, et elle fait place à la réflexion dite *irrégulière* (ou « de Mach ») représentée, au temps $t = t_2$, sur la figure 38.1. L'onde de choc limitant la zone du flux bidimensionnel comprend alors deux portions lisses: un choc quasi normal au plan filant à droite (« disque de Mach ») et un choc lisse se propageant vers le haut, dans la région du flux à symétrie sphérique. Le second choc rattrape, avec le temps, le front de l'onde de choc sphérique sur toute son étendue y compris dans la direction de l'axe des x. Après cela tout le champ d'écoulement se partage en deux régions: la région du flux bidimensionnel (à symétrie axiale) instationnaire et la région de repos qui se trouve en dehors de celle-ci. Jusqu'à l'instant indiqué les trois ondes (« disque de Mach », front de choc sphérique et onde ascendante) se coupent en formant une configuration connue sous le nom de « point triple ».

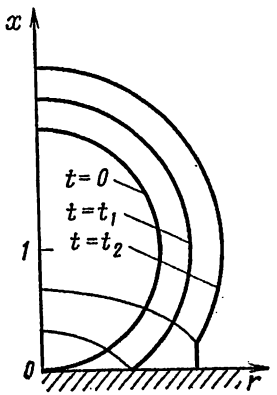


Fig. 38.1

Si le domaine de calcul est suffisamment grand, on formule les conditions aux limites en donnant les paramètres non perturbés $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $u = v = 0$ sur sa frontière de droite et sa frontière supérieure et les égalités $v = 0$ pour $r = 0$ et $u = 0$ pour $x = 0$, où u et v représentent les composantes du vecteur vitesse du gaz en x et r. Omettant les détails concernant la substitution des conditions aux limites approchées à celles exactes (ce qui pourrait être conditionné par les restrictions des dimensions de la région étudiée liées aux capacités de l'ordinateur utilisé), abordons la description des résultats du calcul extraits de l'ouvrage [89]. Ceux-ci ont été obtenus à l'aide du schéma aux différences décrit au § 24.

La figure 38.2, *a* à *c* donne, pour trois instants, les isobares permettant de se représenter nettement l'évolution de l'écoulement.

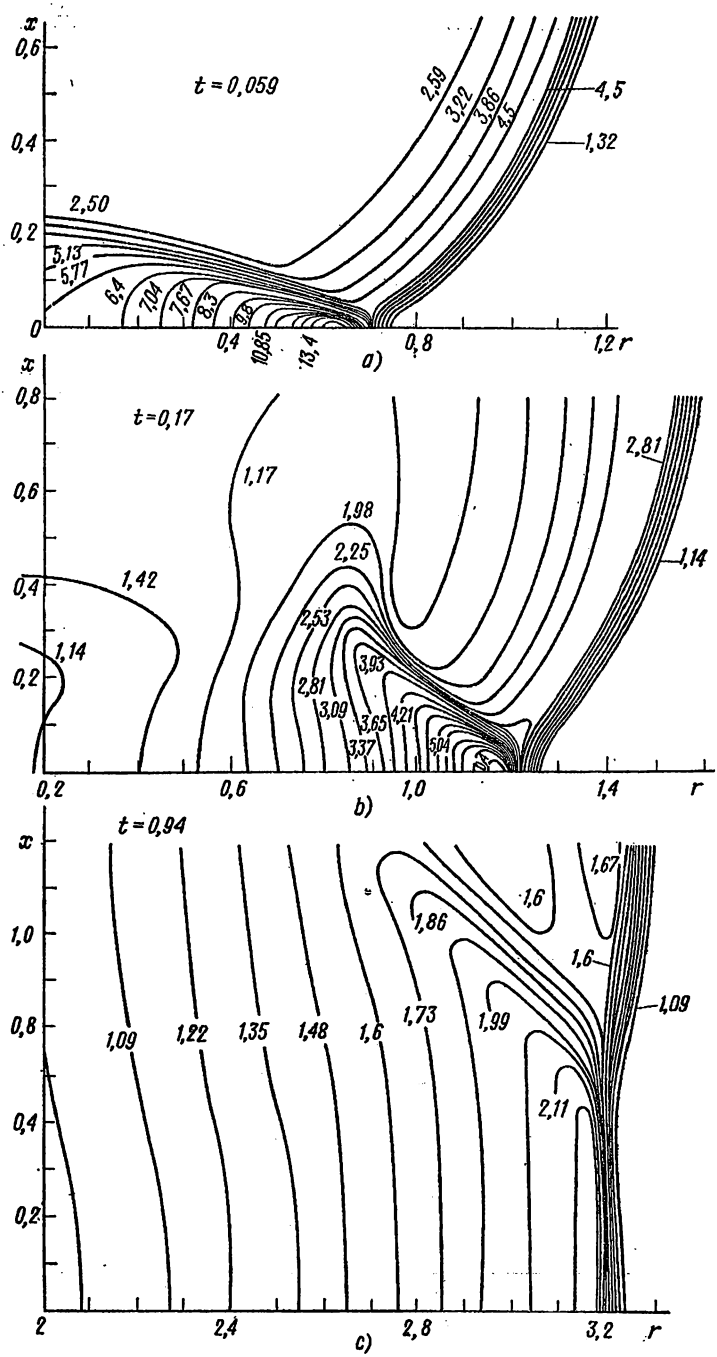

x
t = 0,059
2,59
3,22
3,86
4,5
4,5
1,32
2,50
5,13
5,77
6,4
7,04
7,67
8,3
9,5
10,85
13,4
0,6
0,4
0,2
0
0,4
0,8
1,2 r
a)
x
t=0,17
1,17
1,98
2,25
2,53
3,93
2,81
3,09
3,65
4,21
3,37
5,04
2,81
1,14
1,42
1,14
0,8
0,6
0,4
0,2
0,2
0,6
1,0
1,4
r
b)
t = 0,94
1,67
1,6
1,86
1,6
1,09
1,09
1,22
1,35
1,48
1,6
1,73
1,99
2,11
x
1,0
0,8
0,4
0,2
2
2,4
2,8
3,2
r
c)

Fig. 38.2

Les chiffres qui se trouvent à côté des isobares figurent les valeurs de la pression rapportée à p_1, le temps t est rapporté à X/c_1, où c_1 est la vitesse du son dans le gaz au repos. Le cas envisagé est caractérisé par la chute de pression initiale (à $t = 0$) sur le front du choc sphérique, $\Delta p_0 = 7{,}9\ p_1$. Pour les valeurs fixées de X et les paramètres du gaz au repos cette dernière valeur est univoquement liée à l'énergie dégagée lors de l'explosion ponctuelle. Sur la figure 38.3 sont représentées pour divers instants les courbes de distribution de la pression sur la paroi. Ces courbes se rapportent au même cas ($\Delta p_0 = 7{,}9\ p_1$) et sont obtenues par un procédé spécial consistant à passer du choc étalé à la discontinuité infiniment large (pour plus de détails voir [89]). Enfin, la figure 38.4 représente les trajectoires du point triple pour trois valeurs de $\Delta p_0/p_1$ marquées par des chiffres à côté des courbes. Comme les calculs dans [89] ont été effectués sans particularisation des surfaces de discontinuité, la précision de ces trajectoires ne saurait être grande.

§ 39. Explosion d'une charge non sphérique

Idéalisation du problème consistant à remplacer la région du dégagement de l'énergie d'explosion par une région de gaz au repos ayant une pression élevée. Utilisation d'un maillage aux différences flottant particularisant l'onde de choc de tête et la surface de contact. Formation d'une onde de choc secondaire. Influence de la forme de la charge.

Au paragraphe précédent, le caractère bidimensionnel de l'écoulement était dû à l'interaction entre un obstacle plan et un flux à symétrie sphérique engendré par l'explosion ponctuelle. On considère ci-dessous un problème bidimensionnel (à symétrie axiale) instationnaire lié à l'explosion également, mais cette fois l'écoulement diffère dès le début de l'écoulement à symétrie sphérique par la forme de la charge. Comme on l'a déjà indiqué, ce paragraphe fait appel aux résultats de l'ouvrage [112] où les auteurs ont appliqué une version de la méthode du § 24 à la résolution du problème correspondant. Avant de passer en revue les résultats faisons une brève description de la formulation du problème simulant l'explosion d'une charge à symétrie axiale au sein d'un gaz homogène au repos.

Considérons un écoulement engendré par l'explosion d'une charge à symétrie axiale ayant un plan de symétrie supplémentaire perpendiculaire à son axe. Rapportons-le au système de coordonnées cylindriques x, r, φ avec comme axe des x celui de symétrie de la charge. Plaçons l'origine des coordonnées dans ce plan de symétrie supplémentaire. En vertu de la symétrie existante et du choix des coordonnées on peut se borner à considérer la partie du plan méridien x, r pour laquelle $x > 0$, $r > 0$. Pour l'origine de lecture du temps $t = 0$ prenons l'instant où la charge est complètement consumée en remplaçant la zone occupée par ses produits gazeux par la zone de pression

élevée $p \equiv p_2 > p_1$ et de densité constante $\rho \equiv \rho_2 \neq \rho_1$. Ici p_1 et ρ_1 sont la pression et la densité du milieu ambiant, p_2 et ρ_2 les constantes données. Supposons, en outre, qu'à $t = 0$ le gaz soit immobile dans la région indiquée. Par suite, à $t > 0$ la chute de pression aidant, la région de pression élevée se met à se dilater, une onde de

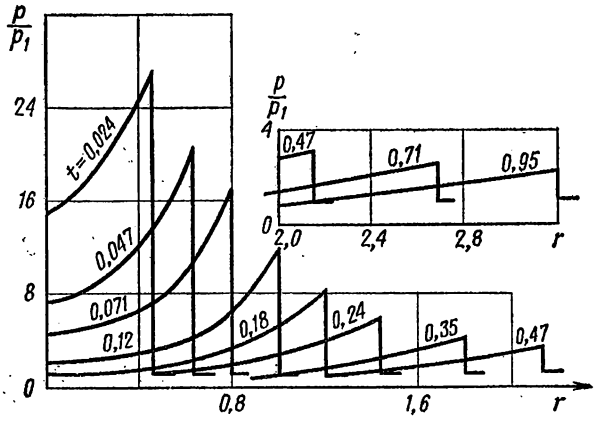


Fig. 38.3

choc se crée en amont de cette dernière, à l'intérieur se propagent, d'abord, les ondes de détente, et les produits de combustion de la charge sont isolés du gaz restant par une surface de contact. Les calculs dont les résultats sont reproduits plus bas ont été effectués

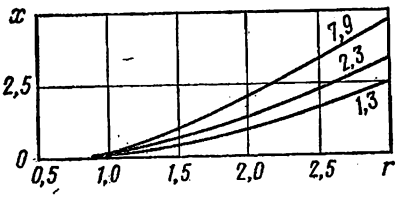


Fig. 38.4

à l'aide d'un maillage aux différences flottant comprenant comme frontières des mailles l'onde de choc et la surface de contact. Les constantes caractérisant les propriétés thermodynamiques des deux gaz, notamment, leurs indices adiabatiques, ont été supposées égales. Sans entrer dans les autres détails de la construction de la solution numérique que le lecteur intéressé trouvera dans [112], passons à la description des résultats du calcul.

Les figures 39.1 à 39.3, *a*, *b* se rapportent à l'explosion d'une charge cylindrique ayant les paramètres suivants: $p_2/p_1 = 10^4$,

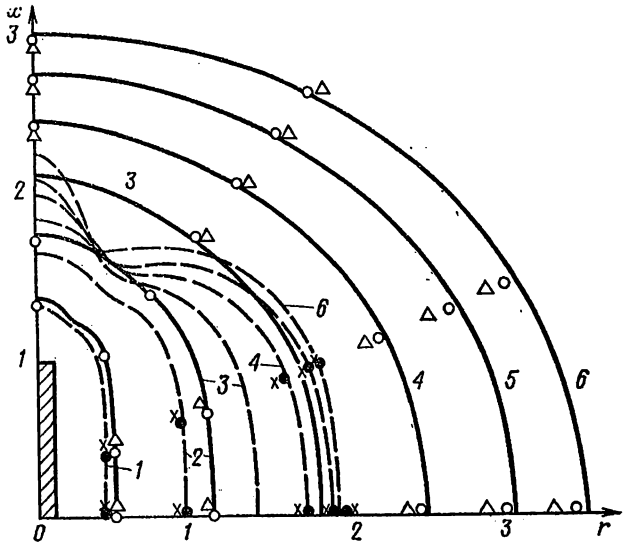


Fig. 39.1

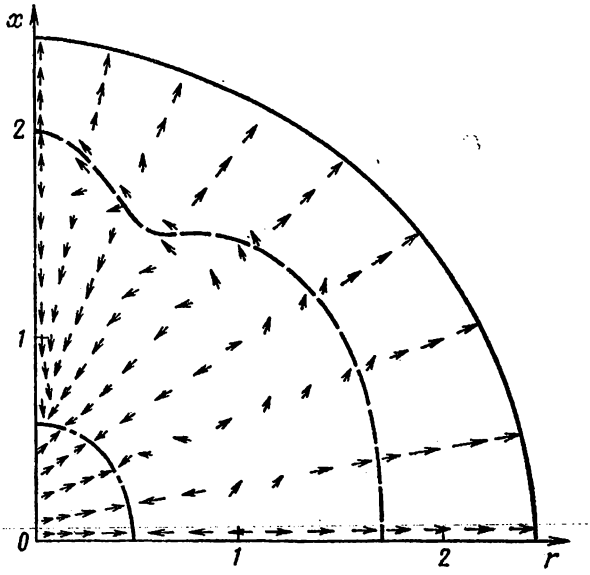


Fig. 39.2

$\rho_2/\rho_1 = 10^2$ et $d/l = 0{,}1$, d et l étant le diamètre et la longueur du cylindre renfermant les produits de combustion de la charge au temps $t = 0$. Sur la figure 39.1 les lignes pleines représentent, pour les six instants $t \approx 0{,}024$; 0,07; 0,15; 0,27; 0,40; 0, 53, l'onde de choc

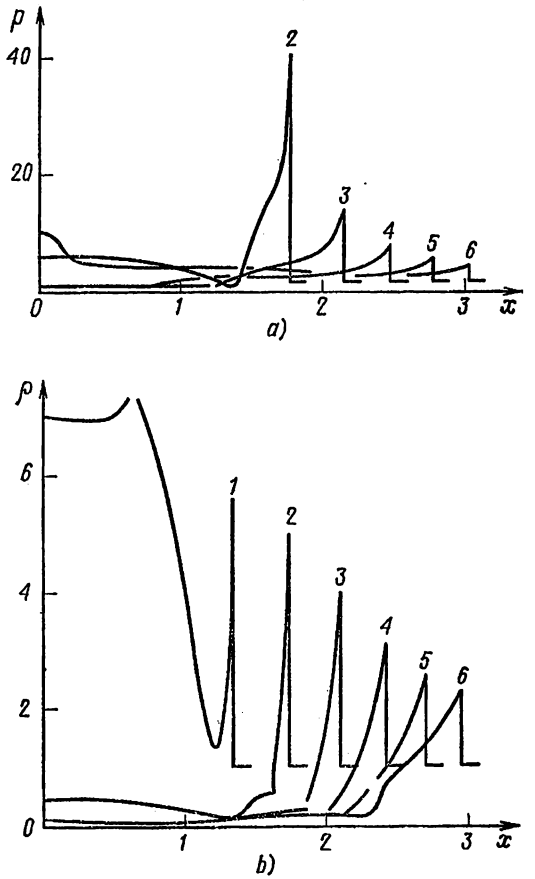


Fig. 39.3

de tête, les lignes en trait interrompu la surface de contact. La région occupée par un gaz comprimé à $t = 0$ est hachurée sur la figure. Ici et plus loin on prend comme échelle de longueur $l/2$, le temps est rapporté à $l/(2c_1)$, où c_1 est la vitesse du son au sein du gaz au repos et les courbes correspondant aux instants envisagés sont numérotées par les chiffres de 1 à 6. On peut se faire une idée sur la précision du calcul grâce aux petits triangles, cercles et croix montrant les résultats des calculs qui ont été effectués avec un nombre réduit de mailles de calcul : les cercles clairs et noirs pours un nombre de mailles deux

fois plus petit, alors que les triangles et les croix pour un nombre quatre fois plus petit que dans la variante principale. Le fléchissement de la surface de contact observé sur la figure 39.1 provient de l'action de l'onde de choc secondaire apparaissant dans les produits de combustion de la charge. Cette onde qui se déplace vers l'origine des coordonnées non seulement ralentit le flux de gaz en expansion mais, qui plus est, modifie le sens du déplacement de celui-ci. Ceci ressort clairement de la figure 39.2 qui représente le champ du vecteur vitesse à l'instant $t = 0{,}27$ et où l'onde de choc secondaire est tracée en trait interrompu mixte. Soulignons que le fléchissement de la surface de contact s'observe au voisinage de la zone où l'onde de choc secondaire apparaît avant tout et où elle a la plus grande intensité. Une fois l'onde de choc secondaire réfléchie sur le voisinage de l'origine des coordonnées le gaz reprend son expansion. Le lecteur peut se faire une idée assez nette de la distribution des paramètres à l'intérieur du domaine perturbé en se référant à la figure 39.3, *a*, *b* traitant du même cas. Cette figure représente la distribution sur l'axe des x de la pression et de la densité rapportées respectivement à p_1 et ρ_1.

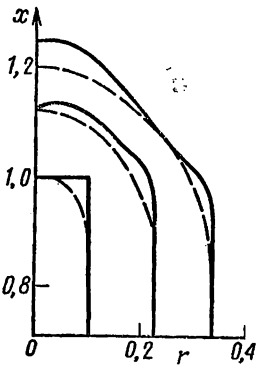


Fig. 39.4

L'influence de la forme de la charge sur la figure d'écoulement est illustrée par la figure 39.4 où sont comparées des ondes de choc de tête pour $t = 0{,}006$ et $t = 0{,}012$, les paramètres primitifs étant les mêmes que dans l'exemple décrit plus haut. Les lignes pleines correspondent à la variante de base (« charge cylindrique »), alors que les lignes en trait interrompu correspondent au cas où l'extrémité de la charge accuse une forme d'hémisphère.

En terminant l'exposé des résultats concernant l'explosion d'une charge non sphérique il faut noter qu'à l'heure actuelle il n'existe aucune publication, où un problème analogue serait résolu à l'aide d'autres schémas aux différences. Une suite au travail [112] cité dans le présent paragraphe a été donnée dans l'étude [79]. Celle-ci applique le même schéma aux différences à la résolution approchée du problème simulant l'explosion d'un gros météorite au voisinage d'une surface donnée.

§ 40. Quelques problèmes de la dynamique des écoulements instationnaires dans les canaux

Ecoulement dans un tube à choc de section variable. Evolution de l'écoulement dans la manche d'entrée d'air, qui est supersonique en amont, avec un choc de compression « terminal » au voisinage du col géométrique et subsonique en

aval pour des paramètres variables dans les sections d'entrée ou de sortie. Processus dynamiques dans les canaux munis de parois longitudinales. Réflexion des ondes planes sur les tranches sub- et transsonique de la tuyère de Laval.

Le présent paragraphe rassemble les résultats illustrant les possibilités que permet de réaliser l'application du schéma aux différences du § 24 à l'étude d'une grande variété d'écoulements instationnaires dans les canaux (tubes à choc, entrées d'air des réacteurs et tuyères). On utilise partout l'approximation bidimensionnelle (ordinairement, à symétrie axiale). Pour évaluer l'influence du caractère bidimensionnel on a procédé parfois à une comparaison avec les résultats obtenus dans le cas où l'on prenait une seule maille dans la section du canal (i.e. dans la direction de l'axe des r). La dernière approche s'avère néanmoins plus complète que l'approximation unidimensionnelle (« hydraulique »), car dans ce cas aussi le calcul s'effectue à l'aide du schéma bidimensionnel et, en particulier, la composante verticale de la vitesse du gaz est prise en compte.

Les exemples ci-dessous ont été décrits pour la première fois dans les travaux [39], [40], [41], [55], [81]. Sans nous arrêter sur les multiples détails que le lecteur peut trouver dans les ouvrages originaux passons à la description succincte des formulations des problèmes correspondants et, ensuite, à l'exposé des résultats fournis par leur résolution numérique.

Nous commençons par le problème de l'écoulement instationnaire d'un gaz dans un tube à choc à section variable. Ce problème se pose ainsi. Soit un tube à choc à symétrie axiale de longueur finie, composé d'un tronçon cylindrique et d'une tuyère convergente-divergente. Le tronçon cylindrique est séparé par une paroi (« membrane ») à laquelle nous attachons l'origine du système de coordonnées cylindriques x, r, φ. A $t \leqslant 0$ le gaz est au repos dans tout le tube, $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$, les indices 1 et 2 étant associés aux paramètres à droite et à gauche de la membrane, i.e. pour $x > 0$ et $x < 0$ respectivement. Cela étant, après la rupture de la « membrane », à $t = 0$, une onde de choc et la surface de discontinuité de contact se mettent à se propager à droite de celle-ci et à gauche, une onde de détente. L'évolution ultérieure de l'écoulement est régie par l'interaction du gaz en mouvement avec les parois de la tuyère et le bout gauche du tube.

On donne plus bas quelques résultats du calcul de l'écoulement dans un tube à choc pour $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 100$. Le calcul a été effectué sur un réseau immobile, comme échelle de longueur on prend le rayon du col de la tuyère r_*, comme échelle de temps r_*/c_1 où c_1 est la vitesse du son. La figure 40.1 donne pour dix instants $t \approx$ $\approx$ 1,4; 2,6; 4,4; 7,2; 9,7; 14,6; 19,7; 23,4; 27,2; 32,3 les courbes de distribution de la pression, rapportée à p_1, sur la paroi du tube (les courbes correspondantes sont numérotées de *1* à *10* selon t croissant, l'échelon figure la distribution initiale de p). Les résultats pré-

sentés sur la figure sont obtenus en utilisant quatre mailles sur le rayon du tube. Pour évaluer l'influence du caractère bidimensionnel, le calcul de cette même variante a été effectué avec une seule maille suivant le rayon (cette approche sera appelée « quasi unidimensionnelle »). Sur la figure 40.2 sont données, pour un certain instant, les courbes de distribution de la pression obtenues grâce aux approximations bidimensionnelle et quasi unidimensionnelle. Les lignes pleine et en trait interrompu mixte traduisent les répartitions de p

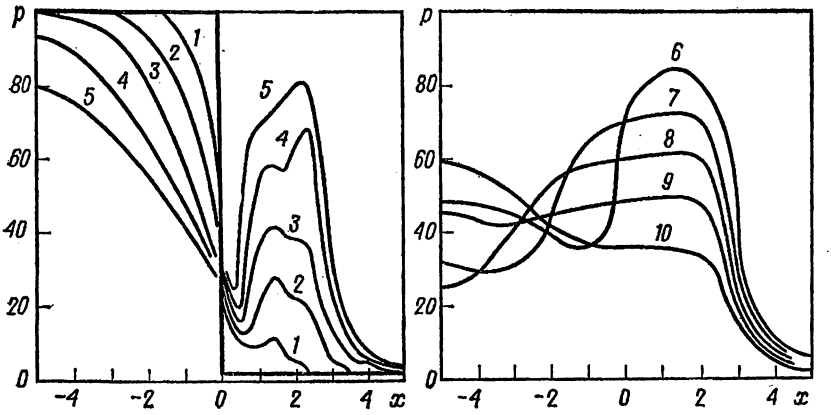


Fig. 40.1

suivant la paroi et l'axe du tube fournies par le calcul bidimensionnel, la courbe en trait interrompu la répartition obtenue à l'approximation quasi unidimensionnelle. En bas de la figure un trait plein fort figure le contour du tube à choc. Il importe de noter qu'à la différence des valeurs locales les caractéristiques intégrales de l'écoulement définies aux approximations bidimensionnelle et quasi unidimensionnelle sont moins distinctes. Ce que prouve la figure 40.3 où est représentée la variation dans le temps de la masse du gaz m subsistant dans le tube (m est rapporté à sa valeur initiale, la courbe pleine traduit le résultat de l'approximation bidimensionnelle, celle en trait interrompu le résultat de l'approximation unidimensionnelle).

Les exemples suivants illustrent la dynamique de l'écoulement dans les manches d'entrée d'air des réacteurs. On a étudié les canaux de deux types: canaux annulaires non partitionnés par des parois longitudinales et canaux plans ou à symétrie axiale pourvus de deux sorties pour une entrée (c'est le cas où une manche d'entrée d'air travaille sur deux réacteurs) et inversement. Dans tous les cas traités on suppose que l'écoulement à l'entrée de la manche en régime stationnaire est supersonique. Etant donné que dans la direction de l'é-

coulement la manche d'entrée d'air d'abord converge puis diverge, la veine supersonique se trouve légèrement décélérée dans la portion initiale (convergente). La convergence du canal est choisie telle qu'au col l'écoulement demeure supersonique. De sorte qu'à droite du col le gaz est de nouveau accéléré. Les conditions à la sortie de la manche d'entrée d'air rendent toutefois impossible une restitution complète de l'écoulement supersonique, ce qui provoque l'apparition d'un choc dit « terminal » localisé dans la partie divergente du canal (l'écoulement présentant un choc terminal dans une conduite convergente est le plus souvent instable [42]). En régime stationnaire, la localisation du choc se fait de telle façon que

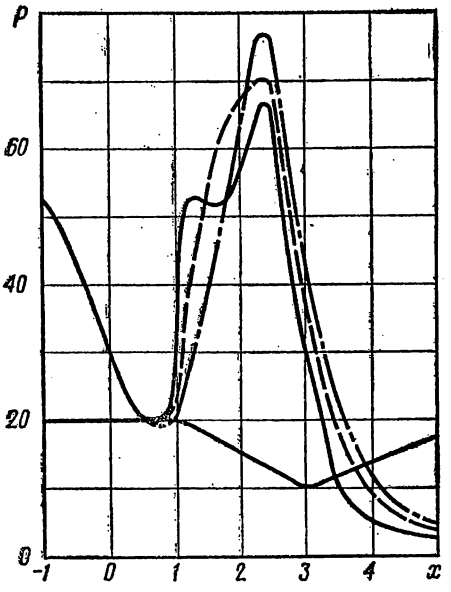


Fig. 40.2

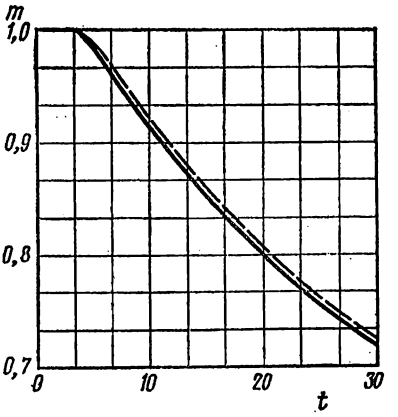


Fig. 40.3

la décélération ultérieure de l'écoulement subsonique dans le canal divergent assure l'élévation de la pression dans la section de sortie jusqu'à la valeur indiquée.

On étudie ensuite les phénomènes dynamiques occasionnés par la variation des conditions à l'entrée (pour $x = 0$) ou à la sortie (pour $x = L$) de la manche d'entrée d'air. Aux régimes envisagés, elles peuvent consister soit dans la variation, suivant une loi déterminée, de tous les paramètres dans la section $x = 0$ (l'écoulement à l'entrée étant supposé supersonique pendant l'intervalle de temps correspondant), soit dans une pression variable (dans le temps) et, sous certaines conditions, d'autres paramètres variables pour $x = L$. En donnant la pression $p = p_L(t)$ à la sortie du canal il faut tenir compte de deux facteurs. Premièrement, l'abaissement de la pression ne peut dépasser (en module) la valeur nécessaire pour l'accélération

instationnaire de l'écoulement jusqu'à la vitesse du son. Deuxièmement, si la hausse de pression engendre un « courant de retour », il y a lieu, outre la fonction $p_L(t)$ dans la section de sortie du canal, de donner également la variation de la densité (ou de la température) et de la composante verticale de la vitesse. Mis à part les autres détails que le lecteur peut trouver dans les ouvrages [39] à [41], voici la description de quelques-uns des résultats du calcul.

Nous commençons par la description d'un écoulement instationnaire dans l'entrée d'air à symétrie axiale à corps central, résultant d'une brusque variation de pression d'une valeur Δp_L à sa sortie.

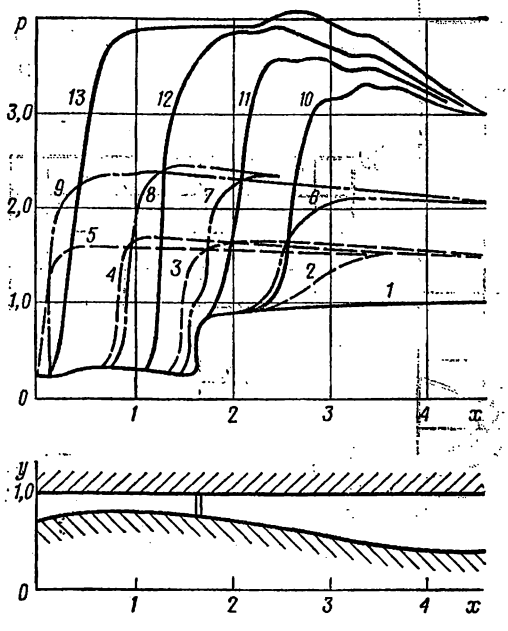


Fig. 40.4

La méridienne du canal de la manche d'entrée d'air est représentée en bas de la figure 40.4. En haut y sont données les courbes traduisant les répartitions de pression suivant la coordonnée x aux divers instants pour diverses valeurs de Δp_L. Comme échelle de longueur on y a pris le rayon de la paroi extérieure du canal r_*, la pression est rapportée à $\rho_* q_*^2$ et le temps à r_*/q_*, où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques à l'entrée du canal (dès maintenant, la position stationnaire du choc terminal est figurée par une ligne double). La courbe *1* correspond à la répartition stationnaire de la pression. Les autres courbes pleines correspondent à $\Delta p_L = 2$, celles en trait interrompu mixte à $\Delta p_L = 1$ et en trait interrompu à $\Delta p_L = 0{,}5$. Dans tous les cas envisagés un courant de retour se formait dans la section de sortie. La composante verticale de la vitesse v_L était alors fixée nulle et la température T_L était supposée égale à $^5/_3$ de sa valeur stationnaire. Les courbes de *2* à *13* correspondent aux instants suivants (comptées à partir du moment où la pression dans la section de sortie se met à croître) : *2* (1, 7), *3* (3, 4), *4* (4, 7), *5* (6, 0), *6* (1, 7), *7* (2, 6), *8* (3, 4), *9* (4, 3), *10* (1, 3), *11* (1, 7), *12* (2, 2), *13* (2, 7).

La figure 40.5 représente les courbes de répartition de p correspondant à la fermeture, à $t = 0$, de la section de sortie et à la réou-

верture de celle-ci à $t = \Delta t$. Au temps $t = \Delta t$ le canal s'ouvre, la pression p_L est supposée égale à sa valeur stationnaire. Comme dans le cas de la figure 40.4, la courbe *1* fournit la répartition stationnaire de la pression. Les autres courbes pleines correspondent à $\Delta t = 5$, celles en trait interrompu à $\Delta t = 1$. Les courbes de *2* à *9* se rapportent aux instants suivants: *2* (2, 1), *3* (3, 4), *4* (5, 1), *5* (6, 4), *6* (2, 1), *7* (3, 4), *8* (5, 1), *9* (6, 4).

La figure 40.6 représente « les oscillogrammes » de la variation de pression dans trois sections marquées sur la figure 40.4 par les

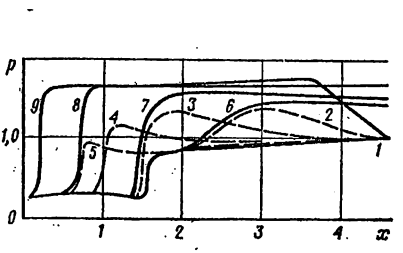


Fig. 40.5

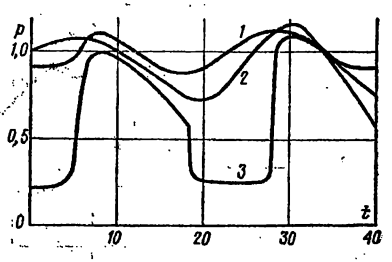


Fig. 40.6

mêmes chiffres au cas d'une variation « harmonique » de la pression à la sortie du canal: $p_L(t) = 1 + \Delta p_L \sin 2\pi\omega t$ pour $\Delta p_L = 0{,}1$ et $\omega = {}^1/_{22}$. Il est curieux de constater qu'une périodicité s'établit rapidement dans la loi de variation de la pression dans le temps (comme dans les cas précédents, la pression se met à varier dans la section de sortie à l'instant $t = 0$). La variation intense de p dans la section *3* révélée par la courbe *3* est due à l'oscillation du choc de pression terminal.

Les exemples suivants illustrent les possibilités offertes par la méthode dans le calcul des écoulements instationnaires dans les canaux présentant une paroi longitudinale à leurs extrémités. La figure 40.7 représente, pour quelques instants (chiffres à côté des courbes), les courbes de répartition de la pression sur la coordonnée x. On obtient le canal étudié de celui qui a été envisagé dans l'exemple précédent en ajoutant la paroi de longueur l conformément au schéma se trouvant au bas de la figure. L'origine du temps coïncidait avec l'instant de la brusque variation de la pression de valeur Δp dans la section de sortie du canal inférieur. Pour $0 < t < \Delta t$ la pression dans cette section était maintenue constante, puis elle s'abaissait brusquément, comme précédemment, jusqu'à sa valeur initiale. La pression dans la section de sortie du canal supérieur était définie, à $t > 0$, par la constance du nombre de Mach moyen sur la section. Notons que bien que dans les exemples cités cette condition ait toujours été remplie, il existe des situations où l'on ne peut maintenir

constant le nombre de Mach moyen lors de la variation de la pression dans la section de sortie.

Les courbes $p = p(x, t)$ représentées en haut de la figure 40.7 correspondent à $\Delta p = 1$, $\Delta t = 3$ et à deux valeurs de la longueur de la paroi séparatrice. Les lignes pleines et en trait interrompu correspondent à $l = 2$, celle en pointillé à $l = 0{,}5$. Les lignes en pointillé et les lignes pleines donnent la répartition de p au voisinage de la paroi inférieure, celles en trait interrompu sa répartition au voisinage de la paroi supérieure. Pour évaluer la précision on a effectué le calcul de ces mêmes variantes en diminuant de quatre fois le nombre total de mailles (de deux fois par rapport à chacune des variables x et r). La différence entre les résultats obtenus est telle que les erreurs sur la détermination des dépendances de la figure 40.7 se trouvent dans les limites de la précision de leur représentation graphique.

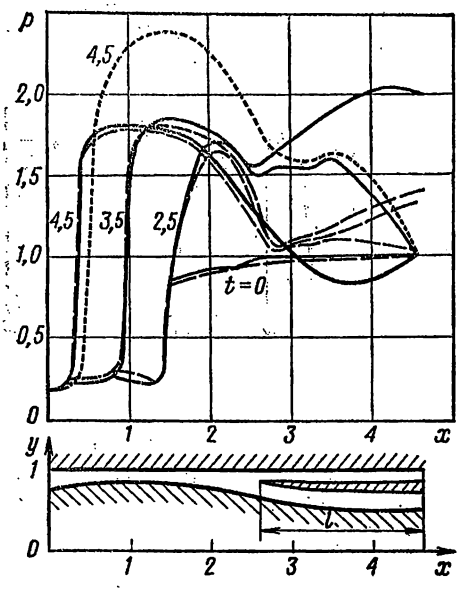


Fig. 40.7

Les deux figures suivantes concernent un écoulement dans l'entrée d'air symétrique plane dont la partie initiale est divisée par un corps central. Ce canal est montré sur la figure 40.8, où, en outre, les lignes doubles figurent les chocs terminaux en régime stationnaire. En régime stationnaire, la composante x de la vitesse dans les sections d'entrée des deux canaux $u(0, y) \approx 1{,}6q_*$, alors que la pression dans le plan de la sortie $p(L, y) = 0{,}86\,\rho_*\,q_*^2$, où ρ_* et q_* sont définis comme dans les exemples précédents. Pour l'échelle de longueur on a pris la moitié de la hauteur du canal dans la section de sortie H, pour l'échelle du temps H/q_*.

Au temps $t = 0$, dans la section de l'extrémité gauche (i.e. pour $x = 0$) de la conduite inférieure se produisait une brusque élévation de pression. Les accroissements des autres paramètres dans cette section s'obtenaient à partir des relations sur l'onde de choc cheminant à droite et perpendiculaire à l'axe des x. Cette perturbation constante agissait pendant un temps limité $t \leqslant \Delta t$. A $t = \Delta t$, tous les paramètres de la section $x = 0$ revenaient par saut à leurs valeurs initiales (stationnaires) qui étaient par la suite maintenues cons-

tantes. La condition aux limites dans la section $x = L$ était posée égale à celle à la sortie du canal supérieur de l'exemple précédent, i.e. le nombre de Mach moyen sur la section était maintenu constant.

Sur la figure 40.9 les courbes pleines figurent les trajectoires des chocs terminaux dans les canaux inférieur (courbe *1*) et supérieur (courbe *2*) en présence de la perturbation à l'entrée au canal inférieur (hausse de la pression de 1,7 fois pour $\Delta t = 2$). Sur l'axe des ordonnées on porte le déplacement du choc $X = x_{se} - x_s$, où x_s et x_{se} sont les abscisses courante et stationnaire du point médian du choc terminal. Il faut noter qu'à cause de l'«étalement» des discontinuités les instants du début de l'interaction des perturbations avec les chocs terminaux ont lieu un peu plus tôt qu'en réalité (le comportement des portions initiales des courbes correspondantes voisin du comportement correct est montré sur le dessin par des lignes en trait interrompu).

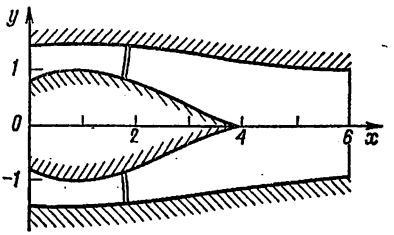


Fig. 40.8

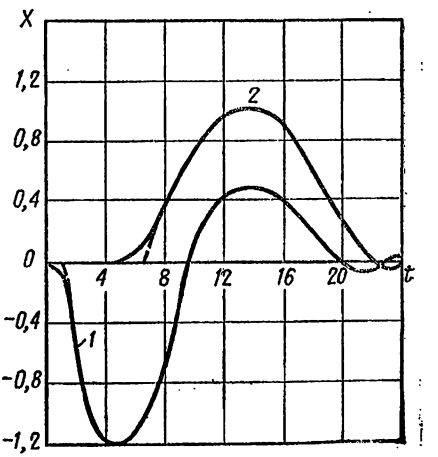


Fig. 40.9

L'explication du comportement des courbes représentées sur la figure 40.9 s'appuie essentiellement sur le fait que les chocs terminaux cheminent à gauche par rapport au gaz. Au contraire, l'onde de choc arrivée à l'entrée du canal se déplace à droite par rapport au gaz, entraînant l'augmentation de la vitesse (et du nombre de Mach) de l'écoulement qui lui fait suite. Il en résulte que le choc terminal se met lui aussi à migrer à droite (ce qui est traduit par la région des valeurs négatives de X, croissantes en module, sur la courbe *1*). L'onde de choc qui se déplace à droite dans le canal inférieur plus vite que le choc terminal s'affaiblit après la diffraction par le bord du corps central, engendrant une onde de détente dans le canal inférieur et une onde de choc dans le canal supérieur qui remontent le flux. A $t \approx 6$ l'onde de choc entre en interaction avec le choc terminal dans le canal supérieur et l'entraîne vers la section d'entrée au canal.

Les ondes de détente se propageant dans le canal inférieur depuis le bord du corps central et depuis la section d'entrée où elles apparais-

sent au temps $t = \Delta t = 2$ d'abord freinent le mouvement du choc terminal dans la conduite inférieure puis elles en changent le sens. Il s'ensuit que pour $11 < t < 18$ ce choc se trouve plus près de la section d'entrée que dans le cas stationnaire. Après l'interaction avec le choc terminal inférieur suivie de la diffraction par le bord, l'onde de détente provenant de l'entrée du canal inférieur arrive dans le canal supérieur en changeant ici aussi le sens du mouvement du choc terminal. A partir de $t \approx 20$ les deux chocs terminaux effectuent de petites oscillations et se relaxent rapidement vers leur position stationnaire initiale. Soulignons que le temps $t \approx 20$ pendant lequel sont observées dans le canal des perturbations considérables des paramètres est d'un ordre de grandeur supérieur non seulement au temps d'application ($\Delta t = 2$) de la perturbation extérieure asymétrique pour $x = 0$, mais aussi au temps $t \approx 3$ nécessaire pour que la perturbation atteigne la section de sortie.

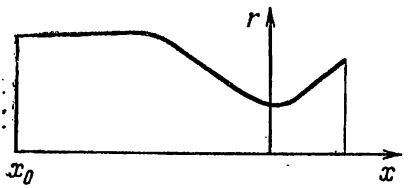


Fig. 40.10

En guise de dernier exemple voici quelques résultats concernant la résolution du problème de la réflexion d'une onde « sinusoïdale » plane de Riemann sur les tranches sub- et transsonique de la tuyère de Laval [81]. Ce problème est posé de la façon suivante. Soit une tuyère de Laval à symétrie axiale prolongée en amont de façon régulière par un tube cylindrique comme représenté sur la figure 40.10. La tuyère peut être attaquée par des perturbations instationnaires venues du côté du tube. Ces perturbations se réfléchissent partiellement sur les tranches sub- et transsoniques de la tuyère et remonteront l'écoulement. Limitons-nous au cas où les perturbations incidant sur la tuyère du côté gauche (le gaz s'écoule, comme précédemment, de gauche à droite) représentent des ondes longitudinales. Les paramètres caractérisant ces ondes sont supposés être des fonctions connues du temps dans une certaine section d'« entrée à la tuyère » $x = x_0 < 0$. Choisissons cette dernière suffisamment éloignée du début de la portion convergente de telle sorte que dans cette section les ondes réfléchies soient voisines des ondes planes (i.e. pour $x = x_0$ les paramètres dans l'onde réfléchie ne dépendraient, comme dans l'onde incidente, que du temps t et seraient pratiquement indépendants de la coordonnée r). Affectons les paramètres de l'écoulement dans la section d'entrée de l'indice inférieur zéro. En vertu du choix de la section d'entrée et de la forme des perturbations incidentes ces dernières sont complètement définies par deux fonctions: l'invariant de Riemann de droite

$$\mathcal{J}_0^+ = \mathcal{J}_0^+(t), \quad \text{où} \quad \mathcal{J}^+ = u + 2c/(\varkappa - 1)$$

et l'entropie ou le rapport

$$(p/\rho^{\varkappa})_0 = S_0(t).$$

Affectons les paramètres de l'écoulement non perturbé (stationnaire) pour $x = x_0$ de l'indice inférieur ∞. Comme dans la suite on laissera de côté les ondes d'entropie, $S_0(t) \equiv S_\infty$, où S_∞ est une constante connue dont la valeur se définit par une des méthodes rendant une variable sans dimension.

En parallèle avec $\mathcal{J}^+$ considérons l'invariant de Riemann de gauche

$$\mathcal{J}^- = u - 2c/(\varkappa - 1)$$

qui, suffisamment loin de la tuyère, caractérise complètement l'onde réfléchie se propageant à gauche. Le problème de la réflexion consiste à déterminer la façon dont la perturbation de l'invariant de Riemann de droite se réfléchit sur la tuyère sous forme de perturbation de l'invariant de gauche.

Nous allons ensuite considérer le cas où $\mathcal{J}_0^+(t)$, à $t \geqslant 0$, varie selon la loi « sinusoïdale », i.e.

$$\mathcal{J}_0^+(t) = \mathcal{J}_\infty^+ + \Delta\mathcal{J}_0^+ \sin \omega t,$$

où $\mathcal{J}_\infty^+$ est une constante déduite des valeurs stationnaires des paramètres, $\Delta\mathcal{J}_0^+$ l'amplitude et ω la fréquence de la perturbation venue. Quelques-uns des résultats du calcul effectué pour une telle loi de variation de $\mathcal{J}_0^+(t)$ pour $\Delta\mathcal{J}_0^+/\mathcal{J}_\infty^+ = 0{,}03$ sont représentés sur les deux dernières figures. Ces résultats sont relatifs à la tuyère dont le contour est formé de segments de droite et d'arcs de circonférence et assure une diminution quadruple de la section droite (pour les détails, voir [81]). Notons qu'à l'amplitude d'oscillations adoptée $\mathcal{J}_0^+$ correspondent des oscillations de la vitesse dans la section $x = x_0 = -4$ atteignant 70 % et des oscillations de la pression atteignant 10 à 20 %. Ici et dans la suite on prend comme échelle de longueur le rayon du col de la tuyère.

La figure 40.11, *a*, *b* donne pour une tuyère donnée et deux fréquences (la fréquence est rapportée à q_*/r_*, le temps à r_*/q_*) les oscillogrammes de l'oscillation de la perturbation de l'invariant de Riemann de gauche $\Delta\mathcal{J}_0^- = \mathcal{J}_0^-(t) - \mathcal{J}_\infty^-$ dans la section $x = x_0$. La grandeur $\Delta\mathcal{J}_0^-$ est rapportée à q_*. On voit que le régime oscillatoire « stationnaire » est atteint après un certain processus transitoire dont la durée (rapportée à la période d'oscillation $2\pi/\omega$) s'accroît avec la fréquence. Dans le cas d'une fréquence relativement faible ($\omega = 0{,}5$) la première oscillation réfléchie est déjà voisine de l'oscillation stationnaire. A mesure que ω s'accroît, la différence entre la forme de la première onde réfléchie et la forme caractéristique du régime stationnaire s'accentue, la première réflexion étant beaucoup plus intense.

En régime stationnaire, on décrit d'ordinaire la réflexion des perturbations par le coefficient de réflexion $q = (\Delta\mathcal{J}^-/\Delta\mathcal{J}^+)_0$. Comme $\Delta\mathcal{J}^-$ se distingue de $\Delta\mathcal{J}^+$ non seulement par l'amplitude mais aussi par la phase, il s'avère plus commode de supposer que q est un nombre complexe : $q = q_r + iq_i$, dont les parties réelle et imaginaire caractérisent les deux effets mentionnés. Rapportés au plan complexe correspondant les résultats des calculs faits sont représentés sur la figure 40.12 par une courbe pleine et par des cercles noirs. La ligne en trait interrompu et les cercles clairs figurent, à titre de comparaison, les résultats de la théorie linéaire unidimensionnelle développée dans l'ouvrage [126]. Les chiffres se trouvant à côté des cercles clairs donnent les valeurs de ω. Les cercles noirs sur la courbe pleine correspondent aux mêmes fréquences, les cercles noirs et clairs coïncidant prati-

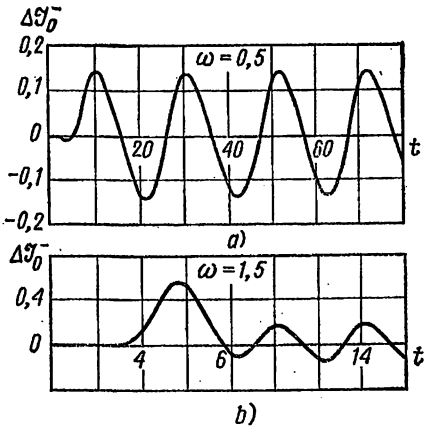


Fig. 40.11

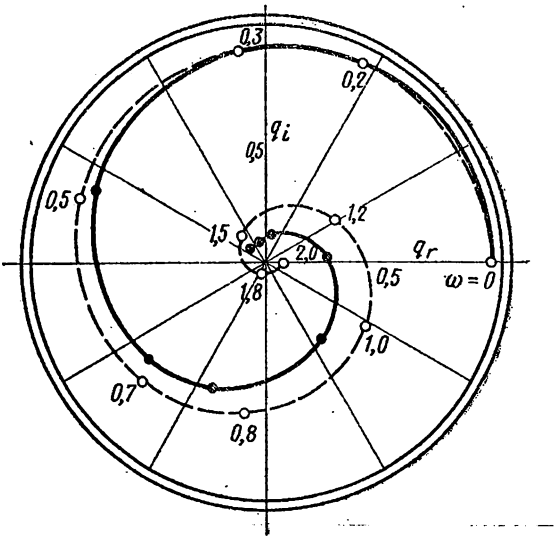


Fig. 40.12

quement pour ω = 0 et ω = 0,2. Il y est visible qu'avec l'augmentation de la fréquence l'écart entre les résultats de l'intégra-

tion numérique des équations quasi linéaires bidimensionnelles et ceux de la théorie linéaire unidimensionnelle augmente.

En achevant de considérer les problèmes liés à l'étude de la dynamique de l'écoulement dans les canaux notons ceci. A l'heure actuelle, le schéma aux différences du § 24 trouve une très large application à la résolution de différents problèmes de ce type. Par ailleurs, des résultats analogues obtenus par d'autres méthodes sont extrêmement rares (comme exemple d'une telle étude indiquons l'ouvrage [144] dans lequel la dynamique de l'écoulement dans une manche d'entrée d'air est étudiée, à l'approximation unidimensionnelle, d'après le schéma de P. Lax). Cela prouve une fois de plus les avantages du schéma aux différences utilisé plus haut.

§ 41. Propagation d'une onde de choc au sein d'un gaz conducteur dans un tube circulaire en présence d'un champ magnétique méridien

Utilisation d'un maillage flottant lié à l'onde de choc. Effet d'accélération de l'onde de choc dû au caractère bidimensionnel de l'écoulement. Confrontation avec les conclusions de l'approximation unidimensionnelle.

Nous donnons plus bas quelques résultats du calcul d'un écoulement bidimensionnel instationnaire d'un gaz conducteur dans un tube rond en présence d'un champ magnétique méridien appliqué de l'extérieur. Ce champ est créé par une spire de rayon $R > 1$ parcourue par un courant, coaxiale avec le tube (ici on prend comme échelle de longueur le rayon du tube r_*). Les nombres de Reynolds magnétiques sont supposés petits, ce qui permet de négliger le champ induit. De ce fait, le champ magnétique coïncide avec le champ de la spire parcourue par un courant et peut donc être supposé donné. Le champ magnétique de la spire parcourue par un courant s'évanouissant rapidement à mesure qu'on s'éloigne du plan de la spire $x = 0$, on peut le supposer non nul uniquement sur la portion du canal $-X < x < X$, où X est un nombre positif donné. Le problème considéré est formulé de la façon suivante.

Soit une onde de choc cheminant dans le tube à droite de laquelle le gaz est au repos, à gauche de laquelle il a des paramètres constants (avant l'action du champ magnétique). Au temps $t = 0$, l'onde de choc atteint la section $x = -X$, après quoi le flux suivant l'onde de choc entre en interaction avec le champ magnétique. On peut montrer qu'un écoulement à symétrie axiale soumis à l'action d'un champ magnétique méridien, en l'absence de l'effet Hall, contient des courants électriques fermés coaxiaux à l'axe du tube. La densité du courant électrique, comme fonction de x, r, t, est alors complètement définie par les paramètres locaux caractérisant l'écoulement et le champ magnétique au point considéré du plan x, r à l'instant donné

(l'approximation envisagée suppose l'établissement instantané des paramètres électriques). L'interaction des courants indiqués avec les composantes B_x et B_r du vecteur champ magnétique B engendre la force F agissant sur le gaz. Celle-ci est contenue, comme B, dans le plan méridien x, r. En plus de l'action directe, traduite par la force qu'applique le champ au flux, a lieu une « dissipation de l'énergie par effet Joule » entraînant l'accroissement de l'énergie interne du gaz aux dépens de l'énergie cinétique ou, ce qui revient au même, l'accroissement de son entropie.

L'action du champ magnétique sur le flux se traduit par une évolution de l'écoulement causant la déformation de l'onde de choc de tête, l'apparition d'une composante verticale de la vitesse et la variation des autres paramètres du gaz. L'action du champ sur le flux est décrite par le paramètre d'interaction magnéto-hydrodynamique $S = \sigma_* B_*^2 r_* (\varkappa - 1)/(\rho_1 (\varkappa + 1) D_*)$, où σ_* et B_* sont des grandeurs caractéristiques ayant la dimension de la conductibilité électrique et du champ magnétique, D_* la vitesse non perturbée de l'onde de choc et ρ_1 la densité du gaz au repos. Le domaine de l'écoulement perturbé est limité aussi bien à gauche qu'à droite. Sa frontière droite est toujours l'onde de choc qu'on nomme d'ordinaire onde de tête. Ce qui représentera sa frontière gauche dépend du nombre de Mach du flux non perturbé M_0 derrière l'onde de tête. Pour $M_0 > 1$ le domaine d'écoulement perturbé est limité à gauche soit par la section $x = -X$, soit par l'onde de choc remontant le flux. Cette dernière étant née dans le domaine d'interaction à un certain temps $t > 0$ peut traverser la section $x = -X$, comme cela est décrit, par exemple, dans [158]. Pour $M_0 < 1$ la frontière gauche est représentée, pendant un certain temps à partir du début de l'interaction, par une caractéristique de la seconde famille (onde sonore cheminant dans le gaz, à gauche). Dans la suite, dans ce cas aussi, la frontière gauche peut être représentée par l'onde de choc née à l'intérieur du domaine perturbé ou à sa frontière [72], [158].

Certains détails supplémentaires concernant l'énoncé du problème en question sont donnés dans l'article [20] qui contient, entre autres, une analyse basée sur la linéarisation par rapport au paramètre S, la mise en moyenne sur la section droite du canal suivie de l'intégration des équations unidimensionnelles instationnaires par la méthode des caractéristiques. Sans nous arrêter sur ces détails nous passons à la description des résultats correspondant à l'écoulement du gaz à conductibilité électrique constante $\sigma = \sigma_*$. Ces résultats ont été obtenus par N. Isakova à l'aide d'une variante du schéma aux différences du § 24 pour un maillage flottant. Les frontières longitudinales (rectilignes) du réseau étaient fixées et divisaient le canal en bandes de hauteur égale. A chaque instant, les frontières transversales du maillage aux différences (y compris sa frontière gauche située en dehors du domaine perturbé) ont été

prises congruentes à l'onde de choc de tête et elles se déformaient de la même façon comme il est indiqué sur la figure 41.1. Au temps initial ($t = 0$), tout le réseau aux différences se disposait à gauche de la section $x = -X$ et se composait de mailles rectangulaires identiques. En vertu de la loi du mouvement des frontières longitudinales l'aire des mailles restait également invariable ultérieurement.

Certains des résultats des calculs sont représentés sur les figures 41.2 à 41.4. Ils correspondent à $S = 10$, $R = 2$, $X = 5$, $D_*/c_1 = 10$ et $M_0 = 1{,}83$. Dans les exemples présentés on a pris pour B_*, lors du calcul de S, la valeur de la composante axiale du champ magnétique au centre de la spire parcourue par un courant ($x = r = 0$). Sur la figure 41.2 les lignes pleines représentent les méridiennes de l'onde de choc de tête dans des intervalles de temps égaux $\Delta t = 1$, à partir de l'instant $t = 0$, l'unité de temps étant prise égale à $t_* = r_*/D_*$. Sur la même figure les segments rectilignes en trait interrompu représentent les chocs « moyens », i.e. les chocs non incurvés dont les abscisses ont été obtenues pour les mêmes t en prenant la moyenne sur l'aire du canal. Il est visible que sur une portion considérable du tube le profil de l'onde de tête s'écarte sensiblement du profil plan, au moins dans le domaine du champ magnétique non nul.

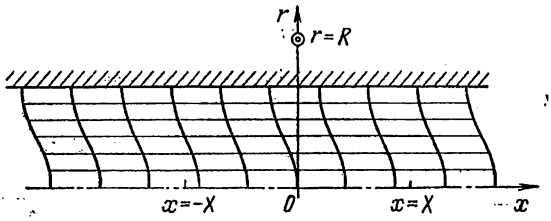


Fig. 41.1

Le gauchissement de l'onde est dû à l'écart entre les vitesses de ses différentes portions. Cela est mis en évidence sur la figure 41.3 qui donne, pour certains instants (chiffres à côté des courbes), la distribution suivant r de la vitesse D_* de déplacement du front de l'onde de choc de tête dans la direction de l'axe des x. Les résultats présentés témoignent du caractère essentiellement bidimensionnel de l'écoulement. Cette influence du caractère bidimensionnel conduit à l'effet qualitatif intéressant que ne prévoit pas l'approximation unidimensionnelle basée sur la mise en moyenne sur l'aire de la section droite du canal. Conformément à cette approximation [20], la propagation de l'onde de choc à travers le tube s'accompagne de la décélération permanente de celle-ci. L'approximation bidimensionnelle infirme cette conclusion. On le voit sur la figure 41.4 où la courbe pleine représente la variation de $\langle D_* \rangle$ en fonction du temps

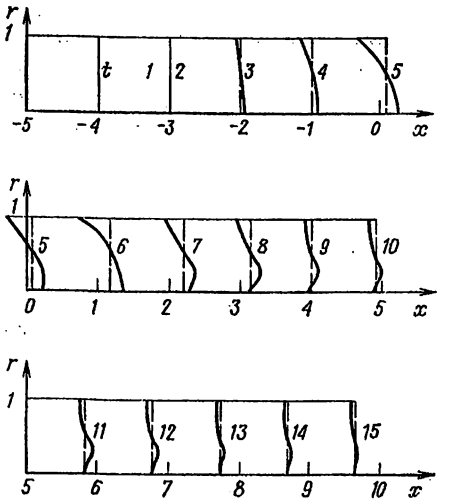


Fig. 41.2

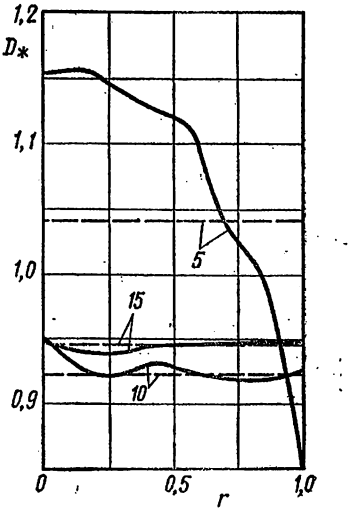


Fig. 41.3

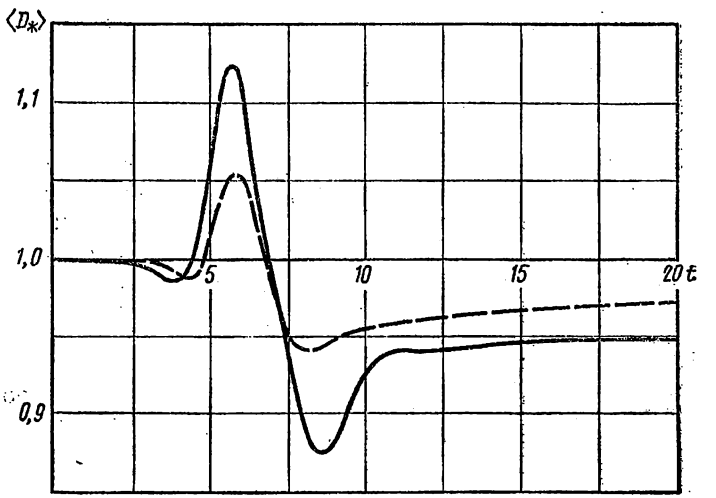


Fig. 41.4

(par le signe ⟨ ⟩ nous désignons, comme dans l'ouvrage [20], la fonction obtenue par la mise en moyenne des résultats du calcul bidimensionnel sur l'aire de la section droite du canal). Ce même effet est toujours valable pour des S plus petits. Pour $S = 5$, les autres paramètres demeurant les mêmes, la courbe correspondante est donnée sur la figure 41.4 en trait interrompu.

§ 42. Calcul de la collision des plaques métalliques (soudage par explosion)

Enoncé du problème. Choix de la tactique du calcul. Analyse des résultats obtenus.

Arrêtons-nous sur certains aspects d'un problème intéressant, celui du soudage des métaux par explosion [46]. Il s'agira des calculs exécutés dans le but d'éclaircir certaines circonstances liées au phénomène de la collision des plaques. Sur cet exemple, nous allons traiter, à l'aide des procédés décrits au ch. IV, les questions concernant l'information *a priori*, la formalisation de l'image de l'écoulement, le choix d'une tactique de calcul.

En d'autres termes, l'exposé sera axé non pas sur les résultats de calcul eux-mêmes ces derniers n'étant donnés ici que sous forme succincte, mais sur la façon dont ils ont été obtenus. Le lecteur peut trouver dans l'ouvrage [132] leur interprétation et leur confrontation avec les données expérimentales et les considérations analytiques du problème linéarisé.

Lorsque les échantillons métalliques sont projetés l'un contre l'autre, ils sont accélérés au cours de la détonation des explosifs et leur vitesse à l'instant de la rencontre atteint des valeurs dépassant 0,5 km/s. La pression qui se crée au moment de la collision dépasse de beaucoup les limites dynamiques de la résistance des matériaux en collision. Si bien qu'en première approximation on peut se servir du modèle hydrodynamique pour lequel la pression p, l'énergie interne ε et la densité ρ sont liées entre elles par une relation du type

$$p = (\varkappa - 1)\,\rho\varepsilon + (\rho - \rho_0)\,c_0^2,$$

où ρ_0, c_0 sont la densité et la vitesse du son dans la substance « froide ». Dans notre cas ces substances étaient le cuivre ($\rho_0 = 8{,}93$ g/cm^3, $c_0 = 3{,}97$ km/s) et le fer ($\rho_0 = 7{,}87$ g/cm^3, $c_0 = 5{,}0$ km/s). En organisant les calculs concrets nous avons essayé de conserver les conditions de l'expérience et les valeurs des paramètres. On a calculé deux variantes. La première était faite avec des conditions qui n'ont pas abouti au soudage dans l'expérience réelle. Dans la seconde variante les métaux se sont soudés après la collision.

Les deux problèmes ont été traités à l'approximation plane. La section de chacun des échantillons était représentée par un rectangle dans le plan des variables d'espace x, y. L'échantillon en cuivre, une plaque assez mince, était projeté à un certain angle γ sur l'échantillon immobile — cible (fig. 42.1). Ici nous passons sur le processus de la mise en mouvement par la détonation de l'explosif

et nous supposerons données à l'instant initial les distributions des grandeurs hydrodynamiques dans la plaque projetée ainsi que la forme de celle-ci.

L'une des conditions nécessaires du soudage qui ont été établies expérimentalement est qu'il faut réaliser un régime tel que le point géométrique du contact des échantillons en collision se déplace à une vitesse inférieure à celle du son au sein de ceux-ci. On obtient le régime sub- ou supersonique du mouvement du point de contact en faisant varier la vitesse W_0 et l'angle de projection γ. En calculant le cas supersonique on a établi que les ondes de choc résultant de la collision se réfléchissent sur les bords extérieurs des plaques et se transforment en ondes de détente qui, atteignant le contact entre les métaux, provoquent des contraintes de rupture empêchant le soudage. Ce phénomène explique, semble-t-il, le fait que le soudage n'a pas lieu lorsque la vitesse du point de contact est supersonique.

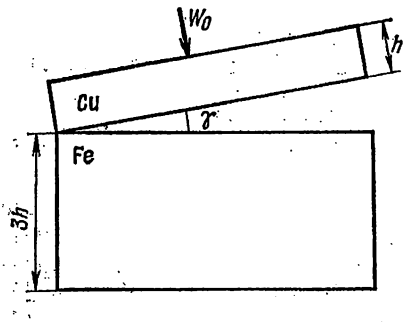


Fig. 42.1

Le résultat le plus intéressant est celui de l'analyse du calcul de la collision subsonique envisagé en détail dans l'ouvrage mentionné [132].

L'une des plus importantes conclusions établies par cette analyse est le mécanisme de la formation d'un jet noyé sur la surface de contact. Le problème consiste dans le fait qu'ordinairement lors de la confluence hydrodynamique il y a formation de jets de charge creuse, dont les caractéristiques intégrales sont définies par la loi de conservation de l'impulsion. En cas de soudage par explosion il est très rare qu'on observe de tels jets, ce qu'on expliquait le plus souvent par leur instabilité. On ne doutait pas de leur existence, car sans eux on ne croyait pas pouvoir satisfaire à la loi de conservation de l'impulsion.

Le caractère grossier du réseau aux différences n'a pas permis, lors des calculs, ni d'isoler ni de calculer ces jets, eussent-ils existé. Toutefois, malgré cela, la construction du schéma aux différences décrit plus haut assure automatiquement la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. En analysant comment est assurée la conservation de l'impulsion sans recourir aux jets dans le calcul, les auteurs de [132] ont conclu que la « viscosité aux différences » due à l'erreur d'approximation du schéma provoque un effet de décélération de la mince couche de métal attenante à la discontinuité de contact. Cet effet a reçu le nom de jet noyé. Soulignons une fois de plus que dans le calcul de l'écoulement sur le modèle du flui-

de parfait son existence est due à des causes de nature purement mathématique: l'erreur d'approximation.

Malgré cela, la discussion de la question concernant le jet noyé a conduit à l'idée que ce dernier existe également dans les processus réels du soudage. Dans ce cas il devrait son existence à la viscosité réelle de métaux. Des expériences spéciales ont confirmé cette conclusion. Par la suite, en s'appuyant sur la loi de conservation de l'impulsion et sur la théorie de ce jet on a mis au point une méthode permettant de mesurer la viscosité des métaux dans les collisions rapides. Pour une étude plus détaillée du phénomène indiqué, voir le livre [83].

En nous limitant aux données succinctes tirées du calcul, décrivons certains éléments, importants à notre avis, de la tactique de l'organisation de ce calcul.

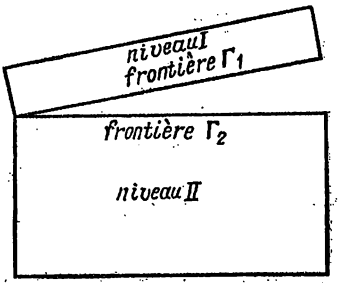


Fig. 42.2

Si l'on veut que l'algorithme de calcul soit adapté aux particularités de la solution, surtout lorsqu'il y a des substances physiques distinctes, on doit, lors du calcul, prendre en considération les détails géométriques. C'est ainsi qu'on a procédé, reliant, à chaque instant, la configuration des frontières des plaques en collision avec les lignes de coordonnées du système de coordonnées curvilignes.

Un certain temps (tant que la plaque projetée n'atteint pas la cible) il n'y a pas d'interaction entre elles. Mais, le processus de collision une fois amorcé, l'image du mouvement se trouve modifiée.

En conséquence, la méthode de calcul ne doit pas exclure la possibilité de reconstruction prévue par les données de départ de la structure de la solution. Dans le cas envisagé il semble indiqué d'employer le mécanisme de changement des conditions aux limites en mettant en jeu les possibilités mentionnées au § 28.

Compte tenu de ce qui précède la structure du problème envisagé se présente comme suit.

La plaque projetée (fig. 42.2) est dite niveau *I*, la plaque immobile niveau *II*. En tant que frontières gauche, droite, inférieure et supérieure de chaque niveau on prend les côtés respectifs des plaques. La frontière inférieure du niveau supérieur *I* et la frontière supérieure du niveau *II* sont décrites comme voisines. Cela veut dire qu'en mouvement, elles peuvent entrer en interaction. Selon que les portions des frontières se touchent ou non, la forme de la condition aux limites varie. Ce sera soit une surface de contact, soit une surface libre. C'est précisément de ce fait qu'on tiendra compte en donnant le type de frontières. (En fait, on utilise ici l'information *a priori*

dont on dispose dans ce cas.) Considérons comment dans notre méthode de calcul on effectue, dans les cas semblables, la sélection de telle ou telle condition aux limites.

Conformément à la description de la structure du problème, chacune des frontières de calcul doit se caractériser par son numéro, le nombre de points de calcul, la loi de leur distribution et le type.

Soient Γ_1 le numéro de la frontière inférieure du premier niveau et Γ_2 le numéro de la frontière supérieure du second niveau. On indique également dans la description de la structure que la frontière Γ_1 a pour voisine la frontière Γ_2 et inversement. Cela veut dire que ces frontières et elles seules peuvent entrer en interaction l'une avec l'autre.

L'algorithme de calcul des frontières en interaction fonctionne de la façon suivante.

Sur toutes les frontières de calcul, y compris celles en interaction, sont données, au temps du n-ième pas en temps, les coordonnées des points définissant la position des frontières et les valeurs des grandeurs hydrodynamiques sur chaque arête de la frontière de calcul.

Supposons qu'on ait à calculer la position de la frontière Γ_1 et les valeurs des grandeurs hydrodynamiques qui s'y rapportent pour le $n + 1$-ième pas en temps suivant. En prenant à tour de rôle les arêtes de la frontière Γ au pas en temps n nous effectuons pour chacune d'elles la procédure suivante.

Traçons par le milieu de l'arête la normale extérieure et vérifions si celle-ci coupe une arête quelconque de la frontière Γ_2. Si la réponse est négative, l'arête considérée de la frontière Γ_1 n'agit pas sur la frontière Γ_2, de sorte que les valeurs de grandeurs hydrodynamiques qui lui sont associées se tirent, pour le pas en temps suivant, de cette condition aux limites: la pression est nulle (« frontière libre »), en attirant les grandeurs hydrodynamiques de la maille de calcul du niveau I attenante à cette arête. Si l'intersection avec une arête quelconque de la frontière Γ_2 a eu lieu, on détermine la distance séparant le point d'intersection du pied de la normale extérieure. Si elle est supérieure au nombre donné Δ, on pose, de même que dans le premier cas, que, sur le pas en temps actuel, l'arête envisagée n'agit pas sur la frontière Γ_2.

Si l'inégalité est inverse, on pose que l'interaction a lieu, auquel cas on emploie les relations sur la discontinuité de contact pour déterminer les valeurs frontières. L'acte de la collision est alors calculé compte tenu de la disposition réciproque des arêtes en interaction, d'après les valeurs des grandeurs hydrodynamiques se rapportant aux deux mailles dont chacune est attenante à l'arête correspondante. Les valeurs des grandeurs hydrodynamiques obtenues sont rapportées au milieu de l'arête de frontière en question et sont posées constantes tout au long d'un pas en temps.

On refait les opérations ci-dessus sur chaque arête de la frontière Γ_2. Ayant déterminé les valeurs des grandeurs hydrodynamiques suivant chacune des arêtes des frontières Γ_1 et Γ_2 et en utilisant, par exemple, les valeurs des composantes de la vitesse normale de la substance nous calculons suivant chacune des frontières la position des coordonnées des points frontières pour le temps suivant. On obtient alors, au lieu d'une surface de contact unie, deux lignes dont chacune représente une portion de la frontière de calcul du niveau approprié. Or, les portions en collision des frontières Γ_1 et Γ_2 se trouveront séparées l'une de l'autre par une distance de l'ordre de Δ. En choisissant Δ conformément aux pas du maillage aux différences on ne risque pas d'altérer le premier ordre d'approximation.

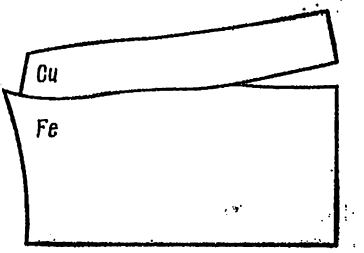


Fig. 42.3

La technique décrite peut être appliquée au cas de calcul de l'interaction d'une onde de choc avec une discontinuité de contact, de deux ondes de choc, etc. L'algorithme de calcul n'y diffère que par les formules, la logique du calcul y étant la même.

En conclusion, notons que dans la variante de calcul adoptée les grandeurs hydrodynamiques sur la couche intermédiaire (« grandes » quantités) étaient calculées selon le schéma implicite décrit au § 35. Le nombre de mailles de calcul du niveau *I* était 10 (en sens vertical) et 60 (en sens horizontal). Le niveau *II* en contient 15 × 60. Dans le second niveau, le maillage s'affinait suivant la direction vers la frontière supérieure. La figure 42.3 représente la position des plaques à un des instants donnés du calcul (la variante du régime subsonique de mouvement d'un point de contact).

CHAPITRE VI

CALCUL DES ÉCOULEMENTS MIXTES PAR LA MÉTHODE D'ÉTABLISSEMENT

Dans bon nombre de problèmes de la dynamique des gaz stationnaire, l'écoulement est « mixte » dans ce sens qu'il contient des domaines de vitesses subsoniques aussi bien que supersoniques. Cette circonstance rend le calcul fort compliqué, premièrement, à cause de la différence de principe entre les méthodes d'intégration numérique des systèmes hyperboliques et elliptiques et, deuxièmement, parce que les frontières de ces domaines ne sont pas connues au préalable et sont à déterminer au cours du calcul. L'une des méthodes possibles de résolution des problèmes mixtes consiste à traiter ces problèmes comme des problèmes instationnaires et à utiliser le processus d'établissement en temps. Les problèmes aux limites elliptiques-hyperboliques extrêmement compliqués sont alors remplacés par des problèmes mixtes pour un système d'équations hyperboliques de la dynamique des gaz instationnaire. Ces derniers, malgré l'augmentation du nombre de variables indépendantes (par introduction du temps), s'avèrent souvent plus simples (du point de vue de la construction de l'algorithme de calcul) que les problèmes stationnaires de départ. Cela explique qu'on fasse très largement appel au processus d'établissement lors de la résolution des problèmes stationnaires mixtes. On simplifie sensiblement la résolution des problèmes d'établissement en se rappelant qu'on a besoin ici non pas de l'évolution de l'écoulement dans le temps (notons à ce propos que l'initialisation des distributions est d'ordinaire fort arbitraire dans ce cas) mais seulement de champs de paramètres définitifs, i.e. stationnaires. Cela permet de mettre en jeu les techniques de calcul accélérées telles que l'utilisation du pas en temps séparé (en chaque point de la veine). Particulièrement efficace dans les cas où la résolution nécessite l'application d'un réseau aux différences essentiellement irrégulier, cette procédure rapproche la méthode d'établissement de celles de relaxation que l'on applique de plus en plus fréquemment ces derniers temps à la résolution des écoulements mixtes. Quelques-uns des résultats du calcul des écoulements mixtes avec application du processus d'établissement et des schémas aux différences des ch. II et III sont donnés dans le présent chapitre.

Notons que c'est à I. Pétrovski que revient le mérite d'avoir recommandé l'application du processus d'établissement au calcul des problèmes stationnaires décrits par les équations du type mixte. Sa réalisation numérique sur l'exemple du calcul de l'écoulement supersonique autour d'une sphère fut effectuée, semble-t-il, pour la première fois dans l'ouvrage [35]. A l'heure actuelle, cette technique passe pour classique. Le rapport entre les problèmes stationnaire et instationnaire fut étudié dans les années 30 par A. Tikhonov sur l'exemple de l'équation de Laplace et de l'équation de la chaleur.

§ 43. Problème direct de la théorie des tuyères de Laval bidimensionnelles

Formulation du problème pour une tuyère prolongée en amont par un tube cylindrique semi-infini et pour une tuyère à contour « fermé ». Ecoulement dans les tuyères de types variés (tuyère de Laval classique et tuyère avec un corps central). Calcul d'un écoulement rotationnel et non isentropique dans les tuyères et influence des effets de la rotation et de la variabilité de l'entropie sur la forme de la ligne sonique. Résolution du problème direct de l'écoulement d'un gaz conducteur dans une tuyère de Laval à symétrie axiale en présence d'un champ magnétique méridien.

Comme première illustration de l'application du processus d'établissement au calcul des écoulements de gaz mixtes on va envisager le problème direct de la théorie de la tuyère de Laval. Dans ce problème on doit construire un écoulement dans une tuyère plane ou à symétrie axiale de forme fixée les distributions de l'entropie et de l'enthalpie totale à son entrée (théoriquement, pour $x = -\infty$) étant données et la pression p_e du milieu dans lequel débouche le gaz étant connue. Les régimes d'écoulement avec le passage par la vitesse du son au voisinage du col de la tuyère ($x = 0$) sont les plus intéressants. Pour ces régimes, le débit du gaz et les distributions des paramètres, au moins dans un certain voisinage du col de la tuyère, ne dépendent pas de p_e. Les résultats ci-dessous, qui furent les premières ou unes des premières résolutions des problèmes correspondants, ont été obtenus dans les ouvrages [59], [60] grâce au schéma aux différences décrit au § 24.

Soit donc un gaz parfait en écoulement dans une tuyère plane ou à symétrie axiale, dont le contour est représenté sur la figure 43.1 par un trait gras. Conformément à ce qui a été dit ci-dessus, les équations de la génératrice éloignée de l'axe de symétrie : $r = r_+(x)$ et de la génératrice du corps central : $r = r_-(x)$ sont supposées données (pour la tuyère de Laval classique $r_-(x) \equiv 0$). Les contours des parties subsoniques des tuyères sont soit ouverts (la tuyère est prolongée en amont par un tube cylindrique semi-infini), soit fermés. Dans le premier cas l'enthalpie de décélération i_0 et l'entropie S (ou une certaine fonction de cette entropie) sont supposées, pour $x \to -\infty$,

être des fonctions connues de r. En régime stationnaire, pour de grands x négatifs, a lieu alors un écoulement laminaire dont les paramètres ne dépendent que de r, la pression $p \equiv p_0 = \text{const}$ et la composante verticale de la vitesse n'existe pas ($v \equiv v_0 = 0$). Dans le second cas (tuyère à contour fermé), l'écoulement provient des sources volumiques de masse et d'énergie introduites dans une certaine région fixée de la partie subsonique de la tuyère et qui simulent le processus d'évaporation suivi de la combustion du combustible, celui-ci étant amené dans la chambre de combustion du réacteur. Pour les chutes de pression supercritiques dans la tuyère, le débit de gaz dans le premier cas ou la pression dans la chambre dans le second cas sont définis par l'écoulement au voisinage du col de la tuyère et sont établis en cours de la résolution du problème. Si la chute est inférieure à la chute critique (dans le présent cas par chute « critique » on entend la chute qui « bloque » la tuyère), les paramètres cités se trouvent dépendants de p_e bien que dans l'écoulement puissent se former des zones supersoniques locales.

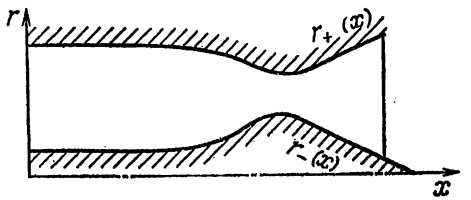


Fig. 43.1

Avant d'exposer les résultats, analysons la question des conditions aux limites que l'on doit, dans ce cas, poser sur les parois de la tuyère dans une certaine section du tube cylindrique $x = -L_-$ et, généralement parlant, à la sortie de la tuyère (pour $x = L_+$). Comme il résulte de l'analyse, en fixant le nombre et le type de conditions à poser sur la surface Γ limitant le domaine d'écoulement examiné Ω, on peut suivre la prescription suivante. Au voisinage d'un élément infinitésimal de la surface Γ pourvu de la normale $\boldsymbol{n}$ extérieure à Ω, on considère un écoulement unidimensionnel instationnaire dont les ondes sont planes. Les paramètres de cet écoulement, on le sait, ne dépendent que du temps t et de la coordonée comptée suivant $\boldsymbol{n}$. Si q_n est la projection du vecteur vitesse sur $\boldsymbol{n}$, l'écoulement peu perturbé quelconque du type indiqué se compose de trois ondes se propageant aux vitesses q_n et $q_n \pm c$ où c est la vitesse du son. La première onde dont la vitesse de propagation coïncide avec la projection de la vitesse du gaz sur $\boldsymbol{n}$ est complètement définie par trois grandeurs qui sont l'entropie et les composantes du vecteur vitesse du gaz, tangentes à l'élément considéré de Γ. Chacune des deux ondes cheminant dans le gaz à la vitesse du son se caractérise par la distribution d'un paramètre, pression ou invariant riemannien approprié par exemple.

Le nombre des conditions posées sur l'élément plan de la surface Γ est égal au nombre des paramètres (plus précisément, de leurs distri-

butions) définissant les ondes unidimensionnelles planes qui se propagent de la portion de frontière envisagée à l'intérieur de Ω. Ainsi, de la paroi imperméable sur laquelle $q_n = 0$ il ne se propage à l'intérieur de Ω qu'une seule onde animée de la vitesse $q_n - c \equiv -c$, si bien qu'une seule condition aux limites est à poser. Si q_n est négatif et $|q_n| < c$, ce qui, dans le présent cas, a lieu dans la section $x = -L_-$ où l'on reporte, lors de calcul, les conditions à $-\infty$, alors le nombre de conditions aux limites dans une telle section est égal à quatre. On peut y donner l'entropie, l'enthalpie totale ainsi que les composantes verticale v et circonférencielle w de la vitesse. De façon analogue, sur la frontière droite du domaine étudié (à la sortie de la tuyère $x = L_+$), pour $0 < q_n < c$, on a à poser une

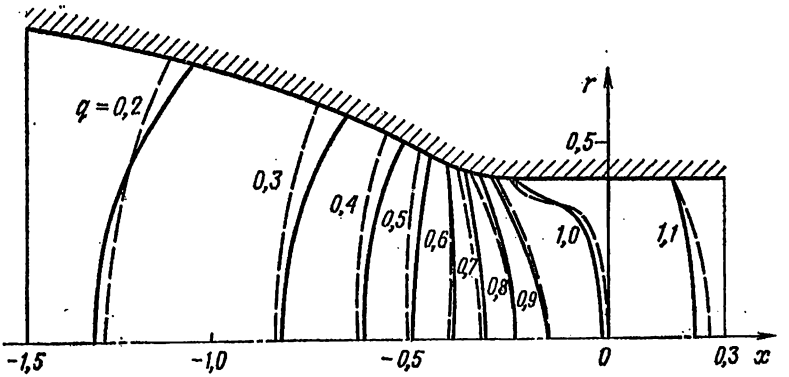


Fig. 43.2

condition (par exemple $p = p_e$), alors qu'en supersonique ($q_n > c$) il n'y a aucune condition. En outre, il convient de souligner que les grandeurs à donner ne doivent pas compter les paramètres définissant les ondes qui n'arrivent pas dans Ω. Sur les parois imperméables ces quantités sont l'entropie, les composantes du vecteur vitesse tangentes à la paroi et l'invariant de Riemann, caractéristique de l'onde cheminant dans la direction de n, ainsi que toutes les fonctions des quantités citées.

Passons à l'exposé de quelques-uns des résultats de la résolution du problème direct de la théorie de la tuyère de Laval obtenus pour les écoulements du gaz parfait. Les premiers exemples se rapportent aux écoulements irrotationnels dans les tuyères à symétrie axiale. Pour ceux-ci, en conformité avec ce qui précède, dans la section $x = -L$, outre l'entropie, l'enthalpie totale et la composante verticale de la vitesse ($v = 0$) on a donné la composante circonférencielle nulle du vecteur vitesse, i.e. $w \equiv 0$. Sur la figure 43.2 sont portées les lignes $q = \text{const}$ dans les parties sub- et transsonique de la tuyère

de Laval classique dont la région de col est fortement étirée (à gauche, la tuyère tendait asymptotiquement vers le tube cylindrique *)). Par le trait interrompu on donne également, sur la figure 43.2, à titre de comparaison, les résultats obtenus par la méthode d'éta-

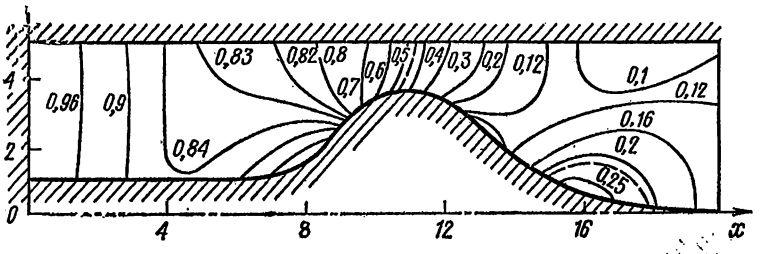


Fig. 43.3

blissement à l'aide du schéma aux différences précis à second ordre [76].

La figure 43.3 représente les lignes $p/p_{max} = \text{const}$ pour une tuyère avec corps central et virole cylindrique. La tuyère a un contour fermé, la partie curviligne du corps central est formée par les arcs de circonférence et l'écoulement est créé grâce aux sources de masse et d'énergie se situant dans la partie subsonique de la tuyère (voir [59], [60]). Une particularité intéressante de cet écoulement consiste dans la formation sur le corps central d'une zone subsonique locale (les lignes soniques sont figurées en pointillé). La décélération du gaz a deux causes dans ce cas: la rotation antihoraire de l'écoulement et la diminution de la section droite des jets de courant annulaires. Dans le cadre de la précision du calcul, la décélération du gaz dans cette zone se produit sans formation des chocs de compression.

La figure 43.4 illustre l'influence d'une rotation préalable du flux sur l'écoulement dans les tuyères de Laval à symétrie axiale [97]. Les lignes $M = \text{const}$ sont figurées le nombre de Mach M étant déterminé d'après la composante « méridienne » du vecteur vitesse. Dans le cas envisagé la rotation intense du flux a entraîné la formation, au voisinage de l'axe de symétrie, d'une zone de basse pression. Il en résulte que la ligne sonique ($M = 1$) est aspirée à l'intérieur de la tuyère et devient parallèle à l'axe des x.

Dans les exemples précédents l'écoulement est isentropique ou quasi isentropique (pour les tuyères à profil « fermé »). La figure 43.5, *a*, *b* représente les lignes $M = \text{const}$ pour un écoulement non isentropique dans la tuyère de Laval plane [53] tel que, lorsque $x \to -\infty$, le rapport $p/\rho^{\varkappa}$ varie suivant la hauteur de la conduite conformément

*) Les résultats du calcul de l'écoulement dans cette tuyère ont été obtenus par E. Tcherniak.

à la loi

$$p/\rho^{\varkappa} = A - B\cos(\pi y).$$

Ici y est mesuré par rapport au plan de symétrie et est rapporté à la demi-hauteur du canal pour $x \to -\infty$, la densité et la pression sont rapportées à ρ_* et $\rho_* q_*^2$, où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse

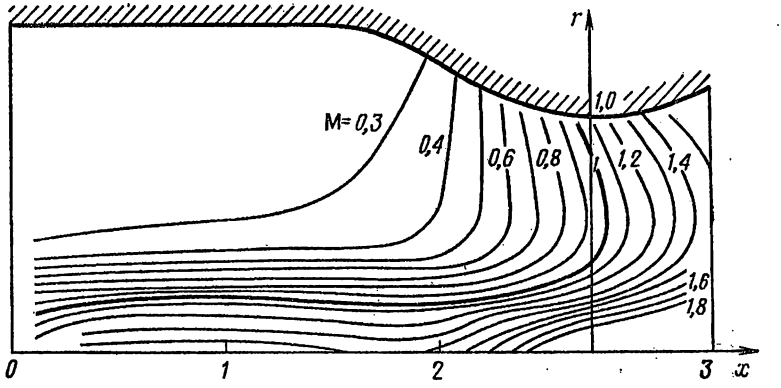


Fig. 43.4

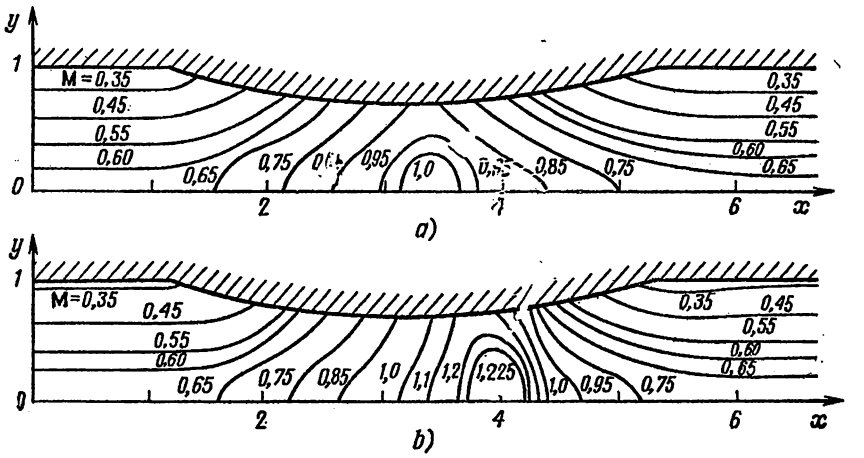


Fig. 43.5

critiques sur une ligne de courant correspondant à $p/\rho^{\varkappa} = A$, les constantes $A = 0{,}714$ et $B = 0{,}27$. En vertu de la distribution de $p/\rho^{\varkappa}$ adoptée, l'entropie est minimale sur l'axe des x et maximale sur les parois du canal. En dehors de la portion de hauteur variable, le contour du canal est formé par les droites $y = \pm 1$ s'étendant

à l'infini non seulement à gauche mais, également, à droite (en fait, la configuration étudiée représente un élément d'une grille infinie de profils identiques contournés à un angle d'attaque nul [53]). La figure 43.5, *a* et la figure 43.5,*b* correspondent aux deux valeurs de la contre-pression: $p_+ = 1{,}085$; 0,95, supposée connue pour $x = +\infty$. Dans les deux cas les vitesses supersoniques n'ont lieu que dans le voisinage réduit du col géométrique de la tuyère. Fait intéressant: en considérant la distribution de l'entropie on constate la première apparition de la région des vitesses supersoniques locales non pas au voisinage des parois de la tuyère, comme c'est le cas

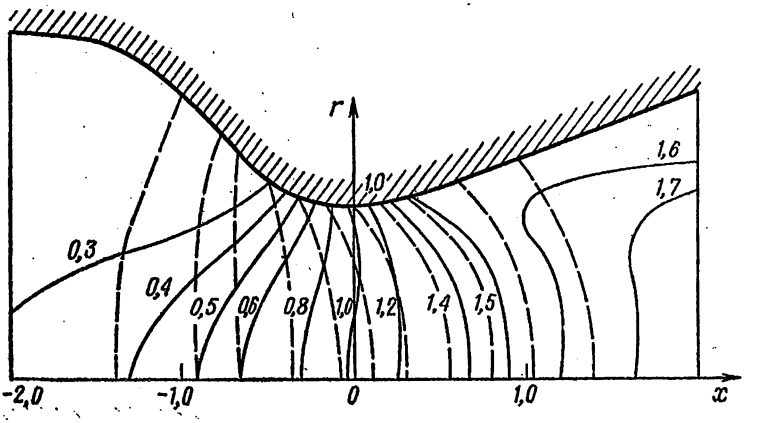


Fig. 43.6

de l'écoulement homogène (en entropie et en enthalpie totale) mais au sein du champ d'écoulement.

Les illustrations qui suivent se rapportent à l'écoulement dans une tuyère de Laval classique d'un gaz conducteur en présence d'un champ magnétique constant dans tout le domaine examiné et dirigé le long de l'axe de la tuyère [71]. On suppose constante la conductibilité électrique du gaz et petits les nombres magnétiques de Reynolds. L'action du champ magnétique sur le gaz en mouvement fait naître dans celui-ci des courants électriques annulaires ($j_x = j_r = 0$, $j_\varphi \neq 0$, où j_x, j_r, j_φ sont les composantes du vecteur densité de courant $\boldsymbol{j}$). Cela engendre la force pondéromotrice appliquée au gaz et la dissipation par effet Joule, ces effets, on peut le démontrer, ne modifiant pas l'enthalpie totale de la veine. L'influence du champ magnétique dans le présent cas est traduite par un paramètre sans dimension supplémentaire S, dit *paramètre d'interaction magnéto-hydrodynamique*, qui définit l'intensité de l'action du champ sur la veine. La figure 43.6 représente le contour de la tuyère et les lignes $M = \text{const}$ dans celle-ci pour deux S: les courbes pleines correspon-

dent à $S = 4$, celles en trait interrompu à $S = 0$. On voit que le champ magnétique modifie très fortement toute la figure de l'écoulement. L'action intégrale est rendue bien visible par l'influence de S sur le débit du gaz (voir fig. 43.7 sur laquelle μ est le rapport du débit à travers la tuyère pour S donné au débit pour $S = 0$).

En terminant cet aperçu des résultats du problème direct de la théorie de la tuyère de Laval bidimensionnelle, notons que l'ensemble

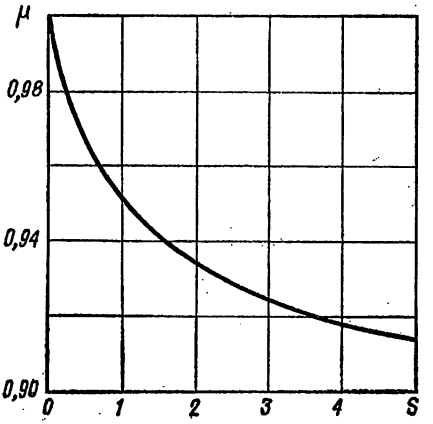


Fig. 43.7

d'exemples ci-dessus n'épuise pas, et de loin, toute la variété des problèmes résolus à l'heure actuelle. De plus, plusieurs auteurs ont effectué de nombreuses recherches à l'aide d'autres schémas aux différences, mais à vrai dire en majeure partie sur une tuyère de Laval classique (voir [16], [18], [48], [76], [87], [122], [124], [146], [157], [162]).

§ 44. Ecoulements mixtes dans les grilles planes

Etablissement de l'aspect stationnaire de l'écoulement avec la fuite de flux du bord aval sans application au calcul de la condition de Tchaplyguine-Joukovski. Application des maillages curvilignes.

Le calcul de l'écoulement gazeux dans une grille de profils illimitée en régimes hypercritiques est un problème fort important pour les applications. Les régimes hypercritiques sont caractérisés par la formation de zones supersoniques locales, ce qui, comme dans le problème direct de la théorie de la tuyère de Laval, complique fortement la résolution. Pour parer à cette difficulté il semble naturel d'utiliser le processus d'établissement en temps, ce qui a d'ailleurs été fait dans nombre de recherches (voir [14], [53], [121], [134], [135,] [145]).

En appliquant le processus d'établissement au calcul de l'écoulement dans les grilles on se heurte à une question de principe, celle de la place et de l'importance de la condition de Tchaplyguine et de Joukovski, indispensable, comme on le sait [156], [98], pour résoudre les problèmes stationnaires correspondants (rappelons que cette condition sert à sélectionner, dans la famille des solutions à un paramètre valables pour un fluide parfait, celle qui est conforme à la réalité). Pour répondre à cette question une recherche spéciale [14] a été entreprise dans laquelle le choix du schéma aux différences s'opérait aussi bien compte tenu de la condition de Tchaplyguine et de Joukovski que sans elle. Dans le premier cas, le maillage en aval de la grille de profils était mobile et contenait les lignes de courant quittant le bord de fuite en conformité avec l'algorithme adopté. Dans le second cas, le calcul était mené à l'aide d'un maillage immobile construit de façon assez arbitraire et de ce fait n'assurant pas la fuite des filets de courant des bords de fuite aigus des profils. Dans les deux cas, au cours de l'établissement se formaient certaines distributions des paramètres indépendantes du temps et qui satisfaisaient aux équations et aux conditions du problème stationnaire (plus précisément, à leurs analogues aux différences finies). La comparaison des distributions obtenues a montré que les écarts entre celles-ci sont dans le cadre de la précision des calculs, les résultats du calcul étant en bon accord avec les données expérimentales disponibles. Cela permet d'espérer que la solution qu'on obtient par l'établissement dans le cas des grilles de profils dont les profils ont des bords de fuite légèrement arrondis, est également proche de la réalité (il s'agit des profils et des régimes d'écoulement tels que le décollement du flux se localise dans un voisinage restreint du bord de fuite). Notons à cet égard que lors de la résolution d'un problème stationnaire la position du point de fuite du flux sur le bord de fuite arrondi est également définie assez arbitrairement. En fait, dans ce cas, au voisinage de l'arrondi, on observe ordinairement le décollement de la couche limite, ce qui, à vrai dire, enlève tout fondement à l'étude de l'écoulement au voisinage immédiat du bord de fuite dans le cadre du gaz parfait. On doit en tenir compte dans d'autres cas aussi : dans le calcul de l'écoulement autour d'un seul profil et dans le calcul de l'écoulement dans une couronne d'aubes, qui a un caractère spatial. Ainsi donc, non seulement le processus d'établissement permet les simplifications liées au passage du système elliptique-hyperbolique à celui hyperbolique mais il nous dispense d'utiliser la condition de Tchaplyguine et de Joukovski et, par voie de conséquence, il rend inutile l'application des maillages flottants spéciaux.

Passons aux exemples de calculs effectués à l'aide du schéma aux différences du § 24 dans l'esprit des raisonnements exposés ci-dessus.

On envisage le problème suivant. Une grille plane formée de profils identiques est contournée par un courant homogène d'un fluide parfait (non visqueux, isolant thermique). L'axe des x est dirigé perpendiculairement au front de grille auquel est attaché l'axe des y, l'échelle de longueur étant prise égale à la largeur de la grille (distance entre le front amont et le front aval). Dans un problème stationnaire, avec des régimes d'écoulement tels que la grille n'est pas « bloquée », on donne d'ordinaire tous les paramètres de la veine incidente (pour $x = -\infty$). Si l'on attribue à ces derniers l'indice 0, leur donnée est équivalente à celle de l'entropie S_0 et de l'enthalpie totale I_0 spécifiques, du module de la vitesse q_0 et de l'angle θ_0 que fait le vecteur vitesse $\boldsymbol{q}_0$ avec l'axe des x. Au lieu de q_0, il est possible de donner la pression p_+ dans une certaine section $x = L_+ > 1$ à droite de la grille (soulignons une fois de plus qu'il s'agit de régimes « non bloqués »). En résolvant un problème instationnaire, il est toujours préférable de reporter une condition sur la frontière droite du domaine de calcul (en accord avec les raisonnements concernant la position des conditions aux limites exposés au paragraphe précédent). En outre, si la composante du vecteur vitesse normale à la frontière droite est supersonique, on n'a tout simplement pas à poser la condition correspondante. Si cette composante est subsonique et la grille est bloquée, la pression p_+ n'influe pas sur l'écoulement à gauche de la ligne subsonique et dans la zone de vitesses supersoniques, et, partant, sur la valeur du module de la vitesse q_0 à établir, dans les régimes bloqués, au cours de la résolution.

La figure 44.1, *a*, *b* donne une idée assez complète sur la disposition des profils d'une grille illimitée et des axes de coordonnées ainsi que sur la forme du domaine de calcul et la structure des maillages aux différences utilisés. La frontière Γ du domaine de calcul Ω se compose des segments bc et b^0c^0 des génératrices supérieure et inférieure des deux profils voisins, des portions ab, a^0b^0, cd et c^0d^0 des droites parallèles aboutissant aux points amonts et avals des profils et des segments aa^0 et dd^0 des droites verticales $x = -L_-$ et $x = L_+$ respectivement.

Grâce à la périodicité de l'écoulement en y, les paramètres du gaz au-dessus de a^0b^0 ne diffèrent pas des paramètres du gaz au-dessus de ab. Si bien que le segment a^0b^0 et, pour la même raison, les segments ab, cd et c^0d^0 sont, au fond, intérieurs et il est donc inutile d'y poser quelques conditions aux limites que ce soit (lors du calcul, on adjoint au domaine Ω des mailles supplémentaires de la manière illustrée par la figure 44.1 ; les paramètres du gaz y sont posés égaux aux paramètres dans les mailles correspondantes du domaine Ω). Sur les autres portions de frontière du domaine à calculer on a posé les conditions suivantes :

$$v/u = \operatorname{tg}\theta_0, \quad 2i(p, \rho) + q^2 = 2I_0, \quad S(p, \rho) = S_0 \text{ sur } aa^0,$$
$$q_n = 0 \text{ sur } bc \text{ et } b^0c^0, \; p = p_+ \text{ sur } dd^0,$$

où q_n est la composante du vecteur vitesse normale à la paroi, et θ_0, I_0, S_0 et p_+ sont les constantes données. La dernière condition, en conformité avec ce qui a été dit plus haut, n'est posée que pour

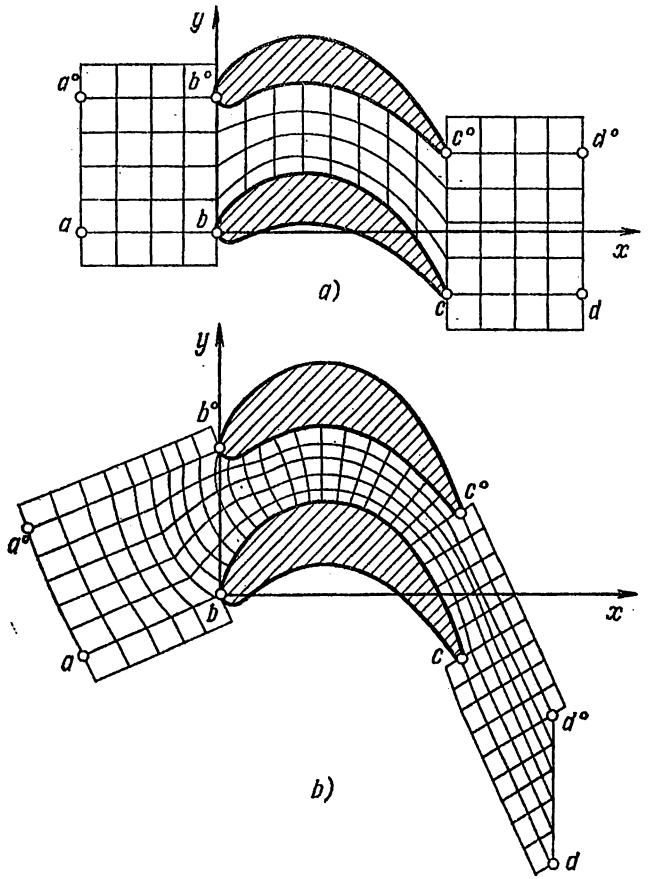


Fig. 44.1

l'écoulement « subsonique x » sur dd^0. Pour plus de détails sur la construction du maillage aux différences, le calcul des paramètres dans les mailles triangulaires qui, dans le cas du maillage représenté sur la figure 44.1, *b*, sont adjacentes au segment dd^0, etc., nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [14].

Certains résultats du calcul sont représentés sur la figure 44.2, où l'on voit les profils composant la grille et les isobares. Les trois schémas se rapportent aux régimes bloqués et correspondent aux angles d'attaque $\theta_0 = -10°$, $0°$, $10°$. La pression est rapportée à

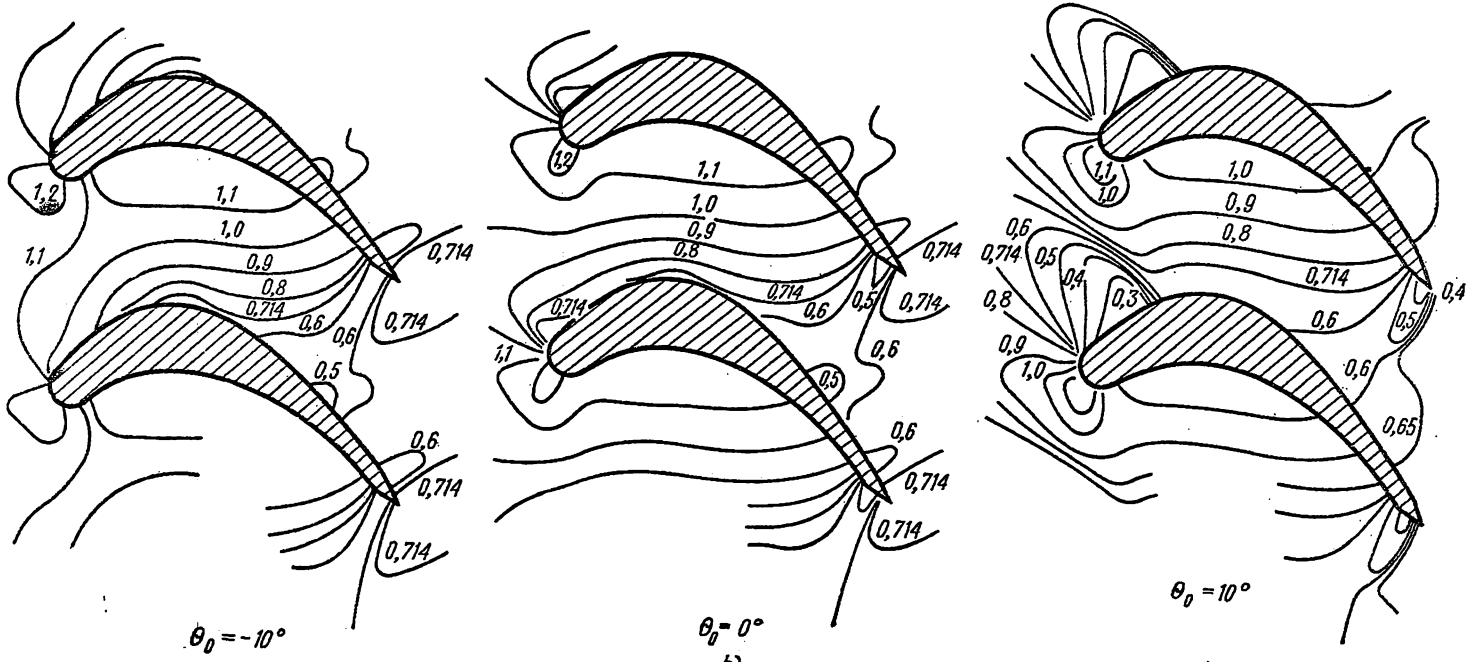


Fig. 44.2

$\rho_* q_*^2$, où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques de l'écoulement incident. Il en résulte que la ligne sonique coïncide avec l'isobare $p = 0{,}714$.

Il n'est pas dénué d'intérêt de chercher à mettre en évidence les causes amenant, au cours de l'établissement, une solution qui satisfait (au moins, dans le cadre de la précision de calcul) à la condition de fuite du bord aval. Il n'est pas exclu qu'une étude de la stabilité d'un écoulement stationnaire approprié aurait contribué à l'éclaircissement de cette question. Il est possible qu'une telle étude serait à faire en tenant compte des mécanismes dissipatifs qui, faisant défaut dans les équations initiales d'écoulement d'un gaz non visqueux et isolant thermique, apparaissent inévitablement dans leurs analogues aux différences. Le rôle capital de ces mécanismes est mis en évidence par l'indépendance des distributions stationnaires des paramètres par rapport aux données initiales (pour le montrer, des essais numériques spéciaux ont été mis en œuvre). Notons que le choix de la solution nécessaire s'inspire, semble-t-il, non pas de la forme concrète des termes « dissipatifs » apparaissant dans les équations aux différences et dépendant du schéma aux différences utilisé, mais de l'existence même du « mécanisme de dissipation ».

§ 45. Jet surdétendu débouchant dans une atmosphère

Cas de la réflexion irrégulière du choc partant du bord de la tuyère avec formation du « disque de Mach ». Emploi d'un maillage aux différences « semi-mobile ». Comparaison des résultats obtenus avec différents nombres de mailles de calcul, confrontation avec les résultats expérimentaux.

Le problème du jet supersonique surdétendu à la pression p_0 au bord de la tuyère débouchant dans une atmosphère de pression $p_e > p_0$ appartient lui aussi aux problèmes dans lesquels le champ d'écoulement supersonique peut, sous certaines conditions, abriter une zone subsonique locale. Le schéma général d'écoulement qui en résulte est représenté sur la figure 45.1. Les lignes doubles sont les traces des ondes de choc, OCF la ligne de jet, DCE l'éventail d'ondes de détente et ADE la ligne de glissement — la ligne de courant commençant au point triple A. Dans le cas étudié la zone subsonique locale est limitée par une onde de choc quasi droite AB qui porte le nom du « disque de Mach », une ligne de glissement ADE et une ligne sonique tracée, sur la figure 45.1, en trait interrompu. L'accélération du flux subsonique est due aux

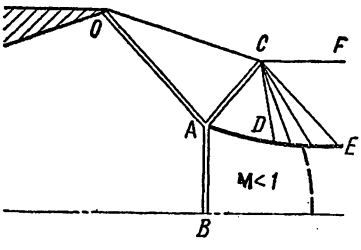


Fig. 45.1

ondes de détente atteignant sa frontière et elle a lieu de la même façon que dans les tuyères de Laval à symétrie axiale.

Le domaine d'écoulement à calculer est limité par le plan de la section de sortie de la tuyère $x = 0$, l'axe de symétrie $r = 0$, la frontière du jet $r = r_+(x, t)$ et la section $x = L$. Cette dernière est choisie en aval de la ligne sonique de telle façon que la veine dans cette section soit partout « x-supersonique ». Pour les conditions initiales, à $t = 0$, on a pris les paramètres de l'écoulement stationnaire (la frontière du jet y compris) qui correspondaient à l'écoulement « adapté », i.e. lorsque $p_e = p_0$. Comme en réalité $p_e > p_0$, alors pour $t > 0$ on voit se développer dans le jet un processus instationnaire à la suite duquel la veine relaxe à un autre état stationnaire satisfaisant au taux de détente donné $n = p_0/p_e \neq 1$ et à la condition de continuité de la pression sur la frontière du jet.

Lors du calcul on a utilisé un maillage « semi-mobile » dont les frontières verticales étaient fixées et les frontières longitudinales se déformaient en suivant le mouvement de la frontière du jet. La vitesse normale des segments élémentaires de la frontière se déterminait, à chaque moment, par la résolution du problème de la décomposition de discontinuité. La pression sur la surface de contact, qui résulte de la décomposition et s'identifie avec l'élément de frontière du jet, était alors supposée égale à la pression de l'atmosphère p_e. Pour les autres détails liés à la construction du maillage aux différences le lecteur est renvoyé à [65].

Passons à l'exposé des résultats du calcul. Le flux à la section de sortie de la tuyère à symétrie axiale était supposé parallèle à l'axe des x, homogène et ayant un nombre de Mach $M_0 = 1{,}7$. Pour l'échelle de longueur, on a pris le rayon de la section de sortie de la tuyère.

Les trois premières figures correspondent au taux de détente $n = 0{,}5$. Sur la figure 45.2 sont données la frontière du jet et les lignes iso-Mach (les nombres de Mach sont donnés au-dessus des lignes). La section de la tuyère est représentée par le segment $0 \leqslant r \leqslant 1$ sur l'axe des ordonnées. Les principaux calculs ont été faits avec 400 mailles de calcul. Pour estimer la précision sur la figure 45.2 on a porté une ligne en trait interrompu $M = 1{,}0$ obtenue pour un nombre de mailles quatre fois plus petit. Les isobares sont représentées sur la figure 45.3 où, en outre, sont portés, en trait interrompu, les résultats de l'ouvrage [17] obtenus au moyen du schéma de calcul [149] avec 1600 points de calcul. Les chiffres figurant à côté des isobares représentent le rapport de la pression à la pression d'arrêt. La confrontation des résultats des diverses méthodes numériques montre une assez bonne concordance.

La distribution des paramètres sur l'axe de symétrie du jet au voisinage du disque de Mach est donnée sur la figure 45.4 où la ligne en échelon fournit une image sommaire de la solution précise (en fait, on ne peut parler de « précision » que dans le cas de la valeur

caractérisant l'intensité du choc et non dans le cas de sa position). La courbe pleine et celle en trait interrompu sont extraites des ouvrages [65] et [17] respectivement. On voit que malgré le nombre

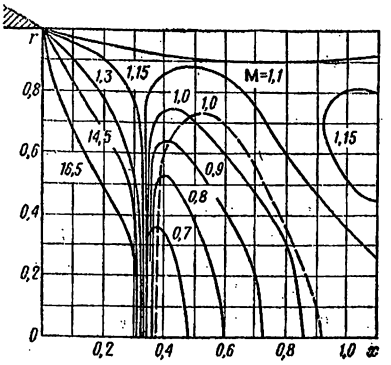


Fig. 45.2

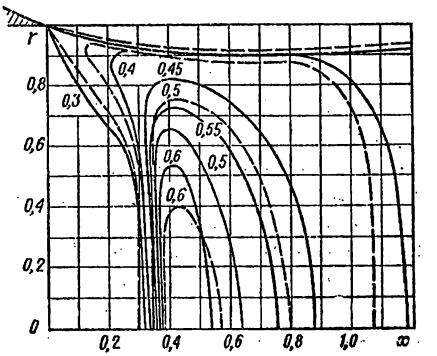


Fig. 45.3

réduit de mailles de calcul, le schéma aux différences du § 24 assure un étalement du choc moindre que le schéma de [149] mettant en

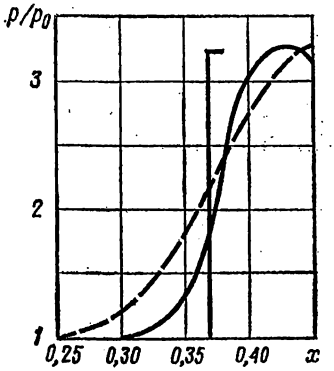


Fig. 45.4

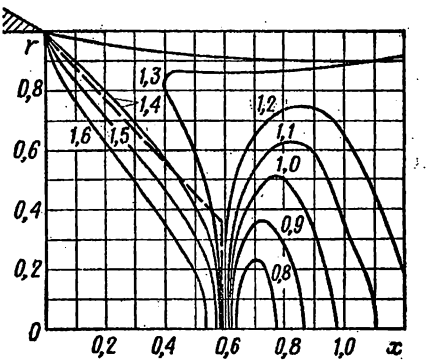


Fig. 45.5

jeu la viscosité artificielle pour le calcul « schock-capturing » des ondes de choc.

Les lignes M = const dans la section méridienne de ce même jet pour $n = 0{,}6$ sont données sur la figure 45.5. Les lignes en trait interrompu y figurent l'onde de choc oblique et le disque de Mach construits sur la base des données expérimentales de l'ouvrage [141].

Comme le montre l'expérience des calculs faits dans [65], l'établissement d'un écoulement stationnaire présentant des surfaces de glissement physiquement instables est assuré à l'aide du schéma aux

différences du § 24 sans qu'on ait besoin de quelques mécanismes d'amortissement que ce soit, malgré que l'une de ces discontinuités (frontière du jet) ne soit pas étalée.

Notons, toutefois, qu'il y a des cas où l'instabilité du glissement se manifeste. Ce phénomène a été observé lors de la simulation numérique des processus se déroulant lors de la détonation des charges explosives cylindriques à cavité coaxiale remplie de métal ou d'eau [85].

§ 46. Action «normale» du jet supersonique sur une paroi

Les différents schémas d'écoulement. Réseau flottant particularisant la frontière du jet. Exemples de calcul.

L'application du processus d'établissement en temps a également permis de résoudre un autre problème de jet, celui du calcul de la collision « normale » d'un jet supersonique à symétrie axiale avec

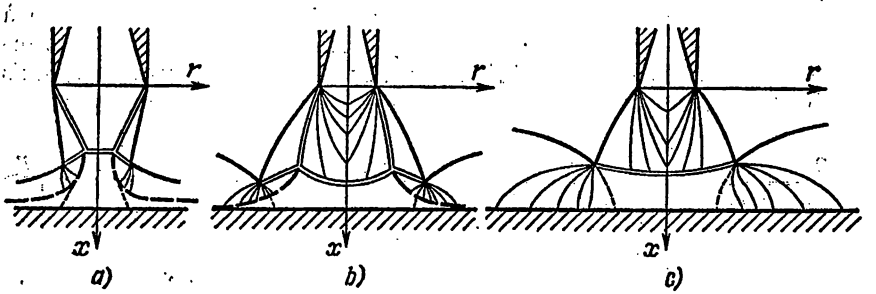


Fig. 46.1

une paroi. Dans ce paragraphe nous présentons quelques résultats de la résolution de ce problème obtenus par les auteurs de l'ouvrage [47] à l'aide du schéma aux différences du § 24.

Les schémas d'écoulement possibles sont représentés sur la figure 46.1, *a* à *c*, où les lignes doubles figurent les ondes de choc, la courbe pleine forte la frontière du jet, les lignes fines les caractéristiques, le trait interrompu la ligne de glissement et la ligne en pointillé la ligne sonique. La figure 46.1, *a* correspond aux jets surdétendus, i.e. $n \equiv p_0/p_e < 1$ où l'on associe, comme auparavant, les indices 0 et *e* aux paramètres du jet au bord de la tuyère et à la pression dans l'atmosphère. Les figures 46.1, *b*, *c* correspondent aux jets sous-détendus ($n > 1$) avec (fig. 46.1, *b*) et sans (fig. 46.1, *c*) choc attaché.

Tout comme dans le cas du paragraphe précédent, il est plus rationnel de résoudre le problème de la collision normale d'un jet en particularisant sa frontière, ce qui nécessite l'emploi des maillages aux différences flottants. Le maillage aux différences appliqué au

calcul et schématisé sur la figure 46.2 se compose de trois sous-domaines caractéristiques: *ABCD*, *ADGH* et *ABFE*. Au cours de l'établissement, dans chaque sous-domaine il y a déplacement aussi bien des frontières longitudinales que des frontières transversales des mailles. Le mouvement du maillage dans le rectangle *ABCD* est dû au déplacement du point *A* et dans les quadrilatères curvilignes *ADGH* et *ABFE* des segments *AH* et *AE* de la frontière du jet. Les segments *GH* et *FE* de la frontière du domaine de calcul ont été choisis tels que le flux qui les parcourait était respectivement *x*- et *r*-supersonique. Les paramètres sur *GH* ont été déterminés par un calcul préalable du jet supersonique à symétrie axiale et étaient maintenus fixes au cours de l'établissement. Le calcul de l'écoulement dans le jet supersonique en éventail (à droite de *FE*) était effectué une

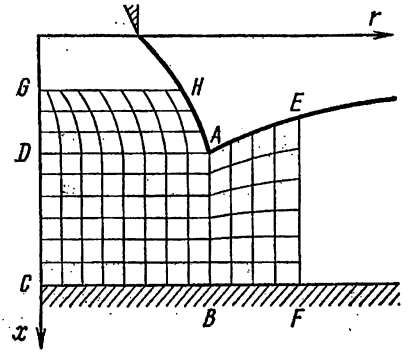


Fig. 46.2

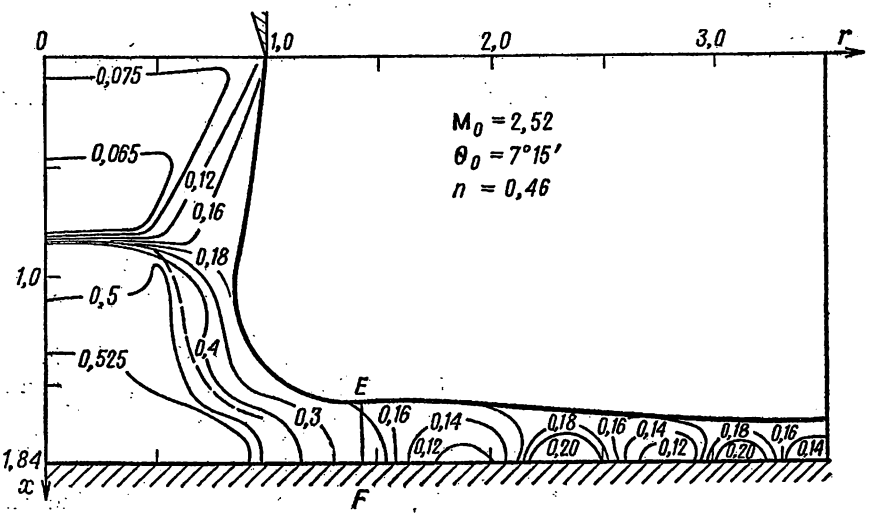


Fig. 46.3

fois que le processus d'établissement avait pris fin. Dans les exemples présentés plus bas l'écoulement au-dessus de *GH* et à droite de *FE* a été calculé à l'aide de la méthode du § 18 (voir également § 50). Le flux dans le domaine d'interaction étant inconnu au préalable, on définit les frontières *GH* et *FE* avec une réserve compte tenu des

données accumulées au cours de calcul des variantes voisines. Naturellement, du point de vue de l'économie du temps de calcul, de

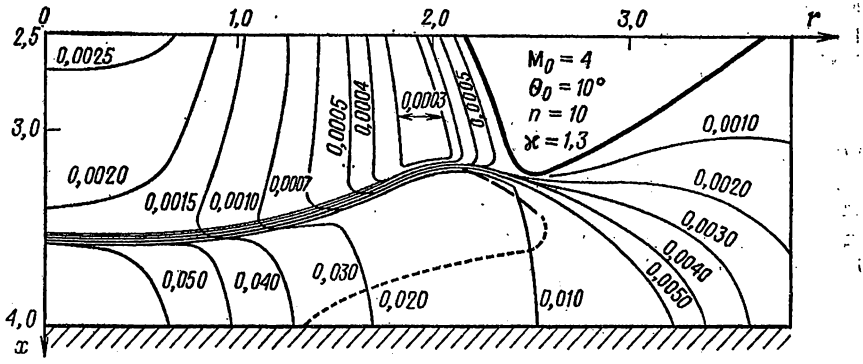


Fig. 46.4

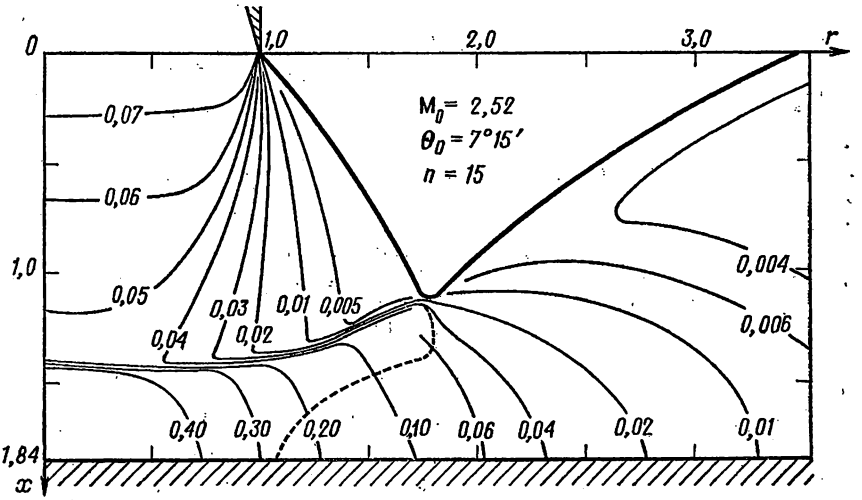


Fig. 46.5

l'augmentation de la précision, etc., la réserve dans le choix des frontières mentionnées doit être petite.

Quelques-uns des résultats des calculs sont représentés sur les figures 46.3 à 46.5. Sur les deux dernières, la méthode d'établissement en temps a permis d'obtenir tout le domaine d'écoulement représenté et dans le cas de la figure 46.3 le domaine situé à gauche de la droite *FE*.

Sur toutes les figures sont tracés l'axe de symétrie, le plan qu'attaque le jet, la frontière du jet et les isobares. La coordonnée x est calculée par rapport à la section de sortie de la tuyère dont le rayon est pris pour unité de longueur. Les chiffres figurant à côté des isobares sont les valeurs de la pression rapportée à $\rho_* q_*^2$ où, comme à l'ordinaire, ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques dans la section de sortie de la tuyère. En outre, les figures 46.4 et 46.5 correspondant aux régimes d'écoulement de la figure 46.1, *b*, *c* représentent en pointillé les lignes soniques. Sur la figure 46.3 correspondant au schéma d'écoulement de la figure 46.1, *a*, la ligne sonique n'est pas tracée, car elle est pratiquement indiscernable de la ligne $M = 1$ dans le glissement étalé. Dans tous les cas présentés, les jets supersoniques à symétrie axiale débouchaient des tuyères tronconiques à demi-angle d'ouverture θ_0. Les valeurs de θ_0, celles du nombre de Mach au bord de la tuyère M_0 et celles du taux de détente n sont représentées sur les figures. Les distributions des paramètres dans la section de sortie des tuyères étaient supposées décrites par les formules d'écoulement du type source sphérique supersonique.

Notons en conclusion qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de recherches basées sur d'autres schémas aux différences qui auraient conduit leurs auteurs aux mêmes résultats que ceux dont nous avons parlé.

§ 47. Ecoulement autour des profils plans et des profils à symétrie axiale

Ecoulement autour d'un cylindre circulaire placé normalement au plan d'écoulement et autour de l'assemblage cône-cylindre d'un flux uniforme supersonique avec formation de zones subsoniques locales. Ecoulement au voisinage des profils plans pour vitesse supercritique du flux incident. Quelques résultats du calcul de l'écoulement sonique autour des corps. Calcul de l'écoulement transsonique autour des corps à symétrie axiale du type fuseau de réacteur.

A l'heure actuelle il existe un grand nombre d'ouvrages (voir, par exemple, [53], [56], [77], [82], [99] à [101], [103], [104], [143], [160], [161]) dans lesquels le schéma aux différences du § 24 et la méthode d'établissement ont trouvé une application dans la résolution d'une vaste classe de problèmes d'écoulement stationnaire autour des corps avec des zones sub- ou supersoniques locales. Le présent paragraphe porte sur quelques-uns de ces résultats obtenus pour les écoulements plans et les écoulements à symétrie axiale par les auteurs des ouvrages [56], [100], [104]. Tous les résultats ci-dessous peuvent être classés en deux groupes. Le premier groupe se rapporte à l'écoulement autour des corps (cylindre circulaire normal au plan d'écoulement, assemblage cône-cylindre, etc.) d'un flux supersonique uniforme avec des zones subsoniques locales.

Au contraire, le second groupe embrasse les écoulements gazeux subsoniques alors qu'au voisinage des corps contournés se forment des zones supersoniques locales. Le cas de l'incidence d'un flux sonique peut être traité comme le cas limite des écoulements aussi bien du premier groupe que du second. Analysons ces résultats.

Sur la figure 47.1 sont représentées, en lignes pleines, les traces des ondes de choc et les lignes soniques, solutions du problème de l'écoulement « normal » d'un flux supersonique autour d'un cylindre circulaire. Les chiffres figurant à côté des courbes sont les nombres de Mach du flux incident M_0. Les calculs ont été effectués sans qu'on particularise l'onde de choc, celle-ci étant ensuite construite comme la courbe des gradients de pression maximaux. Sur la même figure sont portés, en traits interrompus, les résultats du calcul de l'ouvrage [155], les ronds figurent les données expérimentales citées dans cet ouvrage, les triangles, les résultats obtenus dans [26] par la méthode des droites, et les traits mixtes désignent les résultats du calcul par la méthode des relations intégrales [10].

Les figures 47.2, *a* à *c* se rapportent à l'écoulement autour du cône raccordé à un cylindre d'un flux avec $M_0 = 1$; 1,23 ; 1,40 respectivement. On y montre les lignes iso-Mach et pour donner une idée de la précision on y a également présenté, en trait interrompu, les lignes analogues obtenues avec un réseau aux différences ayant un nombre de mailles quatre fois plus petit que dans notre variante principale. Les chiffres figurant à côté des courbes sont les nombres de Mach. La figure 47.2, *b* et la figure 47.2, *c* représentent par une ligne en trait interrompu l'onde de choc de tête, « en pointillé » les lignes $M = \text{const}$ obtenues expérimentalement dans l'ouvrage [125]. Les résultats du calcul de l'écoulement d'un flux de $M_0 = 1{,}0$; 1,4 autour d'un corps plus complexe dont la génératrice comprend deux parties cylindriques et deux parties tronconiques, sont représentés sur la figure 47.3, *a*, *b*. Sur cette figure sont tracées les lignes $M = \text{const}$, comme dans le cas précédent.

Sur la figure 47.4 sont représentées les lignes iso-Mach dans le plan méridien de l'écoulement sonique ($M_0 = 1$) autour d'un cylindre circulaire semi-infini placé bout à l'encontre du flux. Pour comparer, sur la même figure sont tracées en traits interrompus les lignes $M = \text{const}$ obtenues dans [11] par la méthode des « grosses particules ». Les résultats présentés sur les figures 47.1 à 47.4 par des courbes pleines sont extraits de l'ouvrage [56], le calcul ayant été fait dans tous les cas sans particulariser l'onde de choc de tête.

Les deux autres exemples extraits de [104] illustrent l'écoulement autour des profils d'aile plans. La figure 47.5 se rapporte à l'écoulement d'un flux subsonique de $M_0 = 0{,}72$ autour du profil (en haut sur le dessin). Sur le même dessin on voit, à part le profil, des isobares (les chiffres accompagnant les courbes sont les valeurs du coefficient de pression $\bar{p} = 2(p - p_0)/(\varkappa p_0 M_0)$) et une ligne sonique en trait

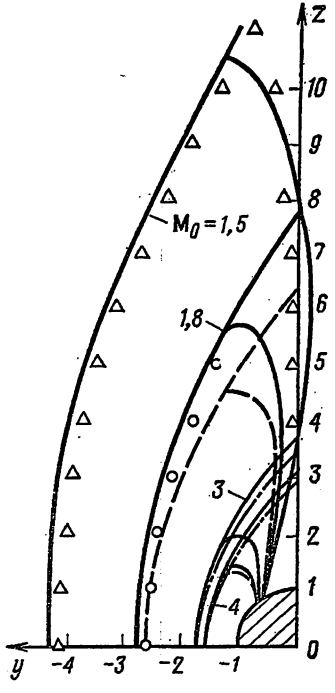


Fig. 47.1

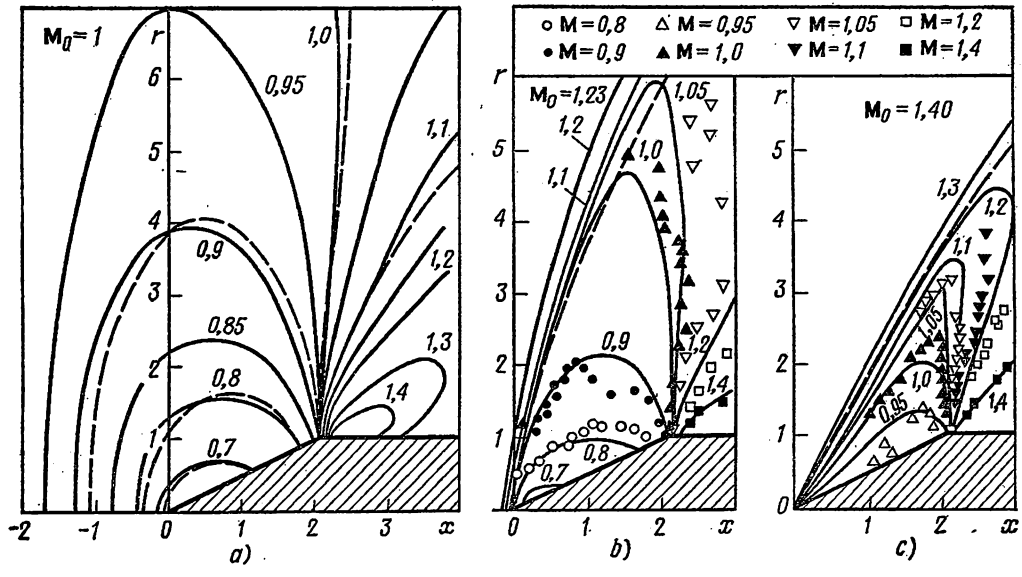


Fig. 47.2

interrompu. On voit sur la surface inférieure du profil la compression du flux, et sur la surface supérieure — une forte dépression accom-

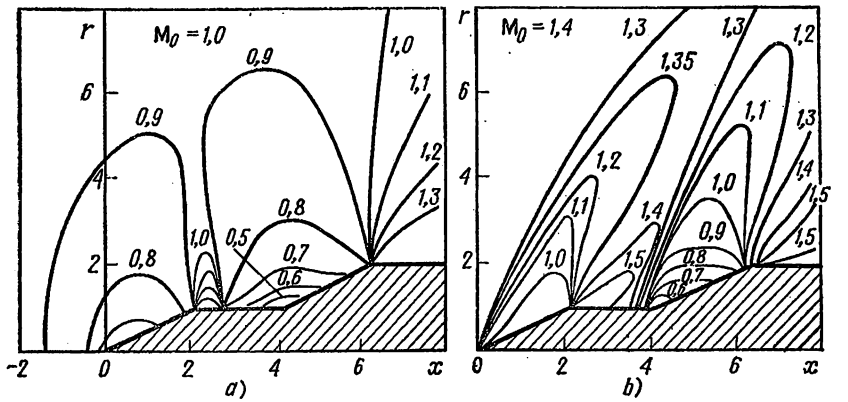


Fig. 47.3

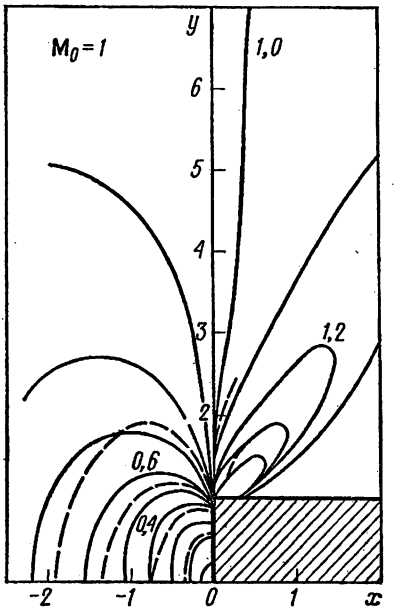


Fig. 47.4

pagnée d'une zone locale supersonique. Cette zone est fermée par un domaine de concentration des isobares. Les répartitions de la pression sur les surfaces inférieure et supérieure du profil obtenues

dans [104] à l'aide du schéma aux différences (§ 24) sont montrées en bas du dessin 47.5 par des courbes pleines. On y voit également les résultats numériques de l'ouvrage [142] en pointillé et les données expérimentales de [159] représentées par les ronds.

Les répartitions correspondant à la surface inférieure du profil concordent entre elles. La différence considérable qu'on observe entre les données de calcul et les données expérimentales pour la

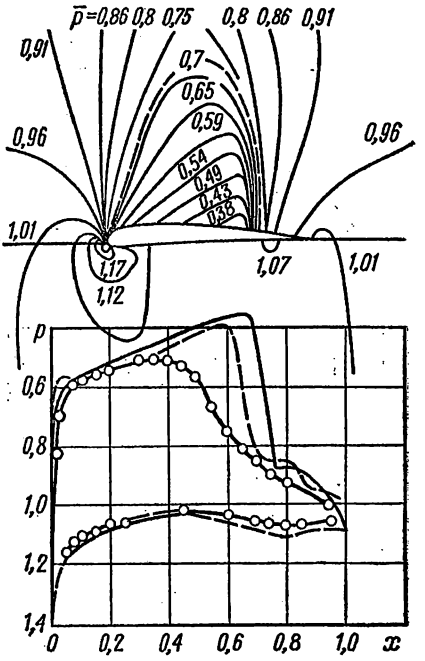


Fig. 47.5

partie supérieure du profil est due de toute évidence à l'influence des effets de viscosité dans le domaine d'interaction du choc de compression avec la couche limite.

On distingue sur la figure 47.6 les courbes M = const du champ de l'écoulement sonique autour d'un profil symétrique « en flèche » pour l'angle d'attaque $\alpha = 2°$. On voit qu'en s'éloignant du point amont critique le flux s'accélère considérablement, ce qui fait que les lignes soniques en trait interrompu se situent au voisinage du bord d'attaque. En raison de la symétrie du profil et de la petitesse de l'angle d'attaque le flux se trouve accéléré des deux côtés du profil. Le choc de compression fermant la zone supersonique sur les surfaces supérieure et inférieure se situe sur le bord de fuite, ce qui

s'accorde bien avec les données expérimentales. Notons que, comme pour le cas de la grille (cf. § 44), l'application du processus d'établis-

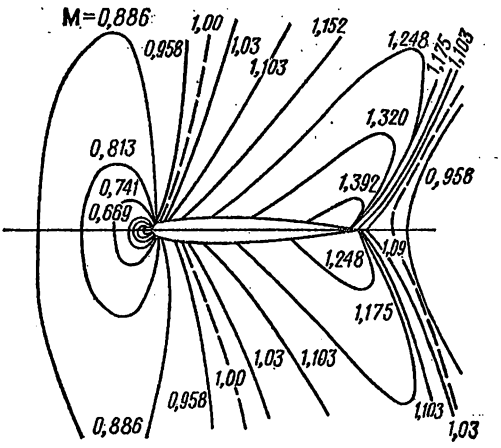


Fig. 47.6

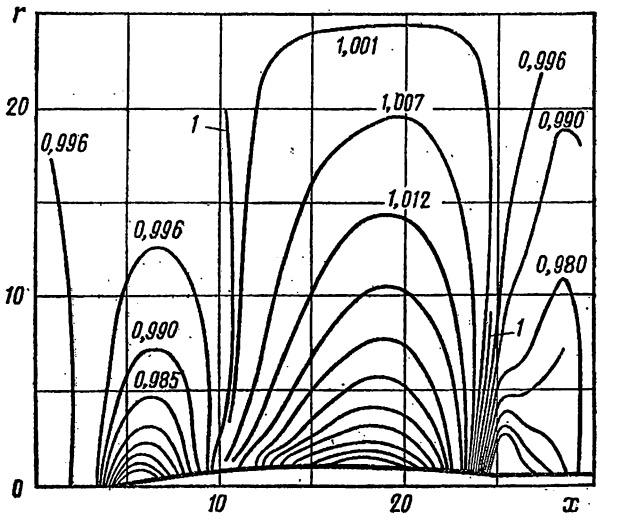


Fig. 47.7

sement permet le calcul sans qu'on doive faire appel à la condition de Tchaplyguine-Joukovski nécessaire à la résolution des mêmes problèmes considérés comme stationnaires.

Les deux dernières figures de ce paragraphe extraites des ouvrages [99] à [101] illustrent l'application du processus d'établissement au

calcul de l'écoulement transsonique autour des corps effilés à symétrie axiale. La figure 47.7 représente la configuration de lignes M = = const se rapportant à l'écoulement sonique ($M_0 = 1$) autour d'un corps mince de révolution à bord d'attaque aigu porté par un dard cylindrique semi-infini. On voit que la zone supersonique qui s'y produit occupe presque toute la longueur du corps et qu'elle s'étend loin au sein du flux dans le sens transversal. En aval, la zone des

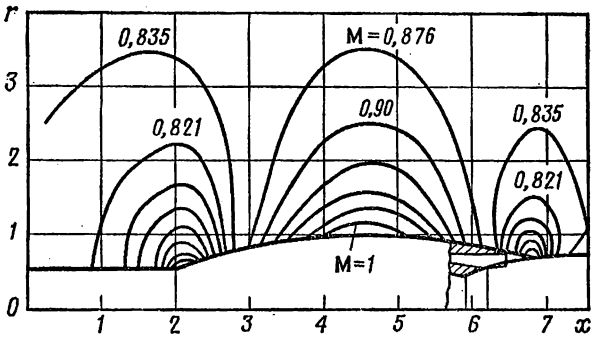


Fig. 47.8

vitesses supersoniques est limitée par un choc de compression (concentration des lignes iso-Mach sur le diagramme). Sur la figure 47.8 sont représentées les lignes iso-Mach pour un écoulement ($M_0 = 0{,}85$) autour d'une configuration à symétrie axiale du type fuseau de réacteur. Dans ce cas le jet entrant dans le réacteur était assimilé à un cylindre circulaire, le jet débouchant de la tuyère était calculé à l'aide du schéma aux différences du § 18. Sur la ligne de glissement — frontière du jet et du flux extérieur — étaient remplies les conditions de continuité de la pression et de l'angle d'inclinaison du vecteur vitesse du gaz.

Pour les autres exemples du calcul des écoulements stationnaires bidimensionnels au moyen du schéma aux différences du § 24 et du processus d'établissement nous renvoyons le lecteur aux références déjà citées et aux ouvrages [54], [57], [78].

§ 48. Ecoulement transsonique spatial autour des corps

Ecoulement sonique à un angle d'attaque autour d'un corps pointu de section droite elliptique. Ecoulements transsonique et sonique autour d'un cône raccordé à un cylindre placé à un angle d'attaque dans le flux.

Le calcul de l'écoulement transsonique autour des corps spatiaux (ou des corps de révolution à des angles d'attaque) se montre encore plus ardu que la résolution des problèmes bidimensionnels analogues.

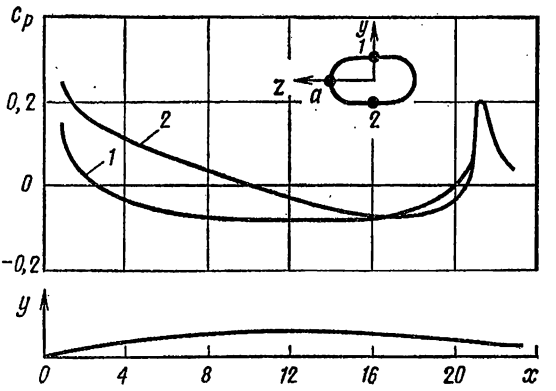


Fig. 48.1

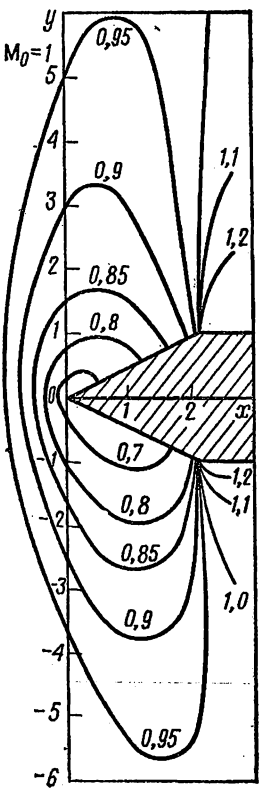


Fig. 48.2

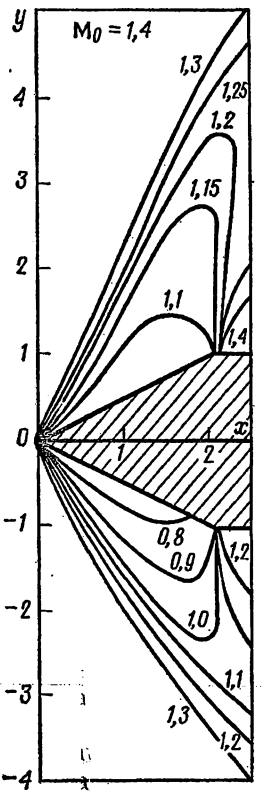


Fig. 48.3

Ici, comme dans le cas bidimensionnel, l'utilisation du processus d'établissement en temps se montre d'une grande efficacité ; toutefois elle nécessite, maintenant, le passage non au problème tridimensionnel mais au problème quadridimensionnel. C'est pourquoi cette approche ne trouve pas une large application dans la résolution des problèmes spatiaux. Pourtant, à présent il n'existe probablement pas d'autres approches qui puissent permettre de résoudre une vaste classe de problèmes d'écoulement spatial transsonique. Les exemples cités plus bas sont obtenus dans [56] à l'aide du schéma aux différences (§ 27) et sont probablement les premiers (sinon les seuls) résultats de ce type.

Le premier exemple (fig. 48.1) a rapport à l'écoulement sonique autour d'un corps pointu présentant une section droite elliptique (rapport des demi-axes de l'ellipse $a/b = 2$) à l'angle d'attaque $\alpha = 6°$. Le vecteur vitesse du flux incident se situe dans le plan du petit axe de l'ellipse (plan x, y). La figure donne la distribution du coefficient de pression c_p sur le côté du vent (courbe *1*) et sur le côté sous le vent (courbe *2*) du corps. Notons que l'écart entre les valeurs c_p observé sur les côtés indiqués, considérable sur la partie amont du corps, diminue rapidement lorsqu'on s'approche du dard cylindrique semi-infini.

Les deux figures suivantes (fig. 48.2 et 48.3) représentent les résultats de calcul de l'écoulement autour de la configuration cône-cylindre à l'angle d'attaque $\alpha = 10°$ d'un flux de $M_0 = 1$ et $M_0 = 1{,}4$ respectivement. Sur les figures sont tracées les lignes $M = \text{const}$ dans le plan x, y qui contient le vecteur vitesse du flux incident et qui de ce fait représente le plan de symétrie. Il est intéressant de noter que l'écoulement à $M_0 = 1{,}4$ abrite sur le côté du vent du cône une zone subsonique locale, ce qui rend impraticable le calcul à l'aide des méthodes « purement supersoniques ».

§ 49. Problème direct de la théorie de la tuyère de Laval spatiale

Tuyères spatiales à un et à deux plans de symétrie. Comparaison entre les résultats du calcul de l'écoulement transsonique dans les tuyères de section droite en ellipse pour différents rapports des demi-axes. Asymétrie du flux due à l'asymétrie de la forme de la tuyère.

Au § 43 nous avons donné à titre d'illustration quelques résultats de l'application du processus d'établissement en temps et du schéma aux différences finies du § 24 à la résolution du problème direct de la théorie des tuyères de Laval bidimensionnelles. L'établissement en temps et l'analogue spatial du schéma aux différences approprié décrit au § 27 se sont également montrés fort efficaces lors de la résolution des problèmes spatiaux semblables. Les résultats numériques obtenus par les auteurs des ouvrages [43], [44], [69],

[70] viennent le confirmer. En partie, ces résultats sont présentés dans ce paragraphe. Avant de les passer en revue décrivons brièvement les particularités de la position du problème spatial qui le distinguent des problèmes envisagés dans le § 43. Nous allons nous limiter aux cas où les tuyères étudiées ont un (fig. 49.1,*a*) ou deux (fig. 49.1,*b*) plans de symétrie (sur la figure 49.1,*a* et *b* sont représentés la moitié et le quart du domaine d'écoulement respectivement).

Orientons les axes trirectangles x, y, z de sorte que le plan x, z coïncide avec l'un des plans de symétrie et le plan x, y avec l'autre

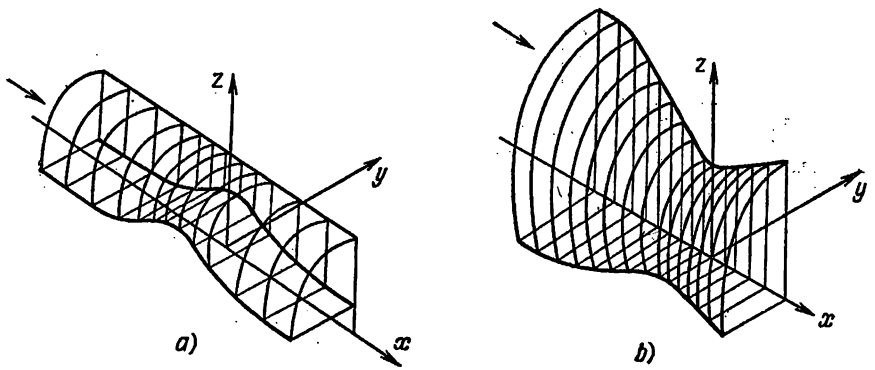


Fig. 49.1

(si celui-ci existe, comme c'est le cas de la figure 49.1,*b*). Faisons coïncider le plan y, z avec le plan de la section du col géométrique de la tuyère. Le gaz s'écoule dans le sens des x positifs. Si la tuyère possède un plan de symétrie, définissons sa surface de la manière suivante. Introduisons quatre fonctions: $z^+(x)$, $z^-(x)$, $y(x)$ et $z(x)$ dont les deux premières donnent les lignes d'intersection des surfaces « supérieure » et « inférieure » composant la tuyère avec le plan de symétrie x, z, alors que la troisième et la quatrième, i.e. $y(x)$ et $z(x)$, l'une avec l'autre. Admettons en outre que la ligne d'intersection de la surface « supérieure » (« inférieure ») avec un plan quelconque $x = \text{const}$ est une portion de droite, d'ellipse ou d'une autre courbe biparamétrique quelconque. Les tuyères à deux plans de symétrie seront données dans la suite de manière analogue. Il suffit toutefois dans ce cas de donner deux fonctions au lieu de quatre: $z(x)$ et $y(x)$, lignes d'intersection de la surface de la tuyère avec les plans de symétrie. Supposons comme pour le cas bidimensionnel que la tuyère soit raccordée à un tube cylindrique semi-infini dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x. Limitons-nous au cas où l'enthalpie d'arrêt et l'entropie du gaz données sont uniformes dans la section lorsque $x \to -\infty$. Dans ce cas, en régime stationnaire

pour $x \to -\infty$, il s'établit un courant de translation uniforme ($v \equiv w \equiv 0$) dont la pression, la densité et la composante x de la vitesse et, donc, le débit de gaz à travers la tuyère sont inconnus au préalable et sont à trouver (il s'agira dans ce qui suit de régimes tels que le flux dans le divergent de la tuyère est supersonique). Nous passons sur les détails liés au choix du maillage aux différences (voir à ce propos [44], [69]) et à la position des conditions aux limites qui

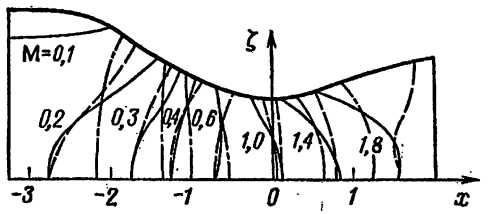


Fig. 49.2

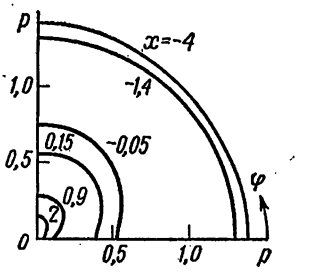


Fig. 49.3

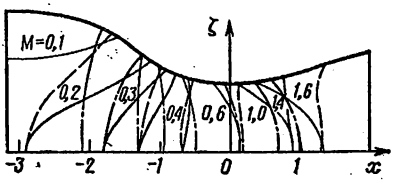


Fig. 49.4

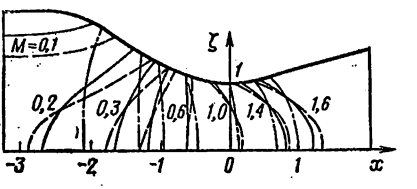


Fig. 49.5

sont formulées pour une tuyère spatiale de la même manière que pour le cas bidimensionnel (cf. § 43). Abordons la description des résultats du calcul.

Les premiers diagrammes sont relatifs à l'écoulement dans les tuyères à deux plans de symétrie. Les figures 49.2 à 49.5 correspondent à l'écoulement dans les tuyères dont la section droite représente une ellipse avec le rapport des demi-axes a/b fixe. Pour toutes ces tuyères, le rapport de l'aire de la section droite pour tout x à l'aire de la section pour $x = 0$ était le même. Pour cette raison, les résultats obtenus à l'approximation unidimensionnelle sont indépendants du rapport a/b. Dirigeons l'axe des z suivant le demi-petit axe de l'ellipse.

Sur la figure 49.2 on donne, pour une tuyère avec $a/b = 2$, les lignes iso-Mach (chiffres figurant à côté des lignes) dans les deux plans de symétrie. Au plan x, y correspondent les lignes continues, ζ désignant le rapport y/y_+ (0), au plan x, z les lignes en trait interrompu et $\zeta = z/z_+$ (0) $= z$. Ici z_+ (0) et y_+ (0) sont les demi-axes de l'el-

lipse au col géométrique de la tuyère, la longueur du premier demi-axe étant prise pour l'échelle de longueur du problème. A titre de comparaison, on a tracé sur la même figure en trait mixte les lignes M = = const pour une tuyère à symétrie axiale dont l'aire de la section droite est répartie sur x de la même manière. L'étude comparative des lignes pleines, en trait interrompu et en trait interrompu mixte témoigne du caractère essentiellement spatial de l'écoulement. Cela est aussi confirmé par les « polaires » de la distribution de la pression sur la paroi représentées sur la figure 49.3 pour différentes sections de la tuyère (ici et dans la suite la pression est rapportée à $\rho_* q_*^2$ où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques, et $\varphi = 0$, $\pi/2$ correspondent aux plans du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse).

Sur la figure 49.4 analogue à la figure 49.2 sont tracées les lignes M = const pour une tuyère « elliptique » avec $a/b = 3$. L'accroissement du rapport a/b entraîne une augmentation de l'irrégularité dans la distribution des paramètres. Cela ressort tant de la comparaison entre les figures 49.2 et 49.4 que de la figure 49.5 où, en trait continu, interrompu et mixte, sont données les lignes iso-Mach dans le plan x, y, pour les tuyères elliptiques avec $a/b = 3; 2; 1$ respectivement.

Les autres figures se rapportent aux tuyères à un plan de symétrie. Les deux premières d'entre elles appartiennent aux tuyères dont la forme ne diffère de celle à symétrie axiale que sur un intervalle fini de l'axe des x. Dans cette intervalle, la tuyère tridimensionnelle se compose de deux moitiés: moitié inférieure, à symétrie axiale (au-dessous du plan x, z, i.e. pour $y < 0$) et moitié supérieure, elliptique. Cette dernière est elliptique dans ce sens que ses sections par les plans x = const sont les moitiés d'ellipses, le rapport des demi-axes de ces dernières étant une fonction donnée de x. Dans les cas envisagés $z(x) \equiv 0$ et $z_+(x) \neq z_-(x)$ sur un certain intervalle fini de l'axe des x.

La figure 49.6 représente les résultats du calcul de l'écoulement dans deux tuyères du type envisagé ci-dessus. Les génératrices de ces tuyères dans le plan de symétrie, i.e. les fonctions $z_-(x)$ et $z_+(x)$, sont tracées en haut, à gauche de la figure, les courbes pleines étant les génératrices de la moitié supérieure (elliptique) de la tuyère en question et la courbe en trait interrompu celle de la moitié inférieure (à symétrie axiale). La partie principale de la figure représente, en courbes pleines *1* et *2*, les valeurs de la différence de pression $\Delta p = p_- - p_+$ suivant les génératrices envisagées des tuyères respectives (p_- et p_+ sont les valeurs de p sur les génératrices inférieure et supérieure), et en courbes en trait interrompu mixte, la valeur de ΔM pour la première tuyère, définie de façon analogue. En bas, à gauche, la figure 49.6 présente les distributions de p sur la paroi dans deux sections x = const, les angles $\varphi = 0$, π étant associés

aux génératrices inférieure et supérieure. Les résultats du calcul de l'écoulement dans les tranches sub- et transsonique des trois tuyères spatiales ayant une forme plus complexe sont représentés sur la

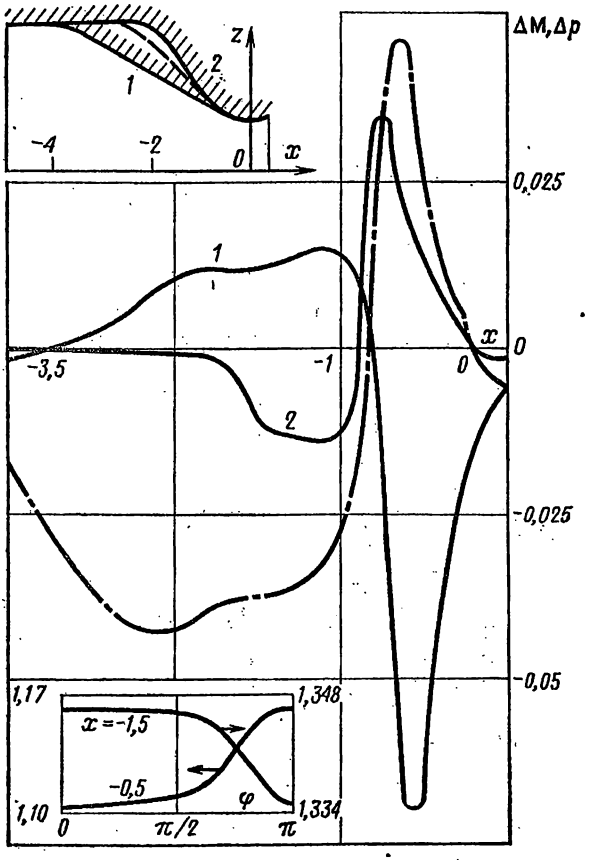


Fig. 49.6

figure 49.7. Ces tuyères se distinguent par l'angle d'inclinaison de la génératrice supérieure (ou par $\Delta\theta$, la différence entre les angles d'inclinaison des génératrices inférieure et supérieure) de la portion convergente. Notons la liaison quasi linéaire entre Δp et $\Delta\theta$ existant pour tout x. La même relation linéaire a lieu pour la force latérale et le moment dus à l'écart de la forme de la tuyère par rapport à celle à symétrie axiale.

La dernière figure (fig. 49.8) se rapporte à une tuyère spatiale du type de la tuyère représentée sur la figure 49.1,*a*. Sa paroi inférieure représente une bandelette de surface cylindrique parallèle à l'axe

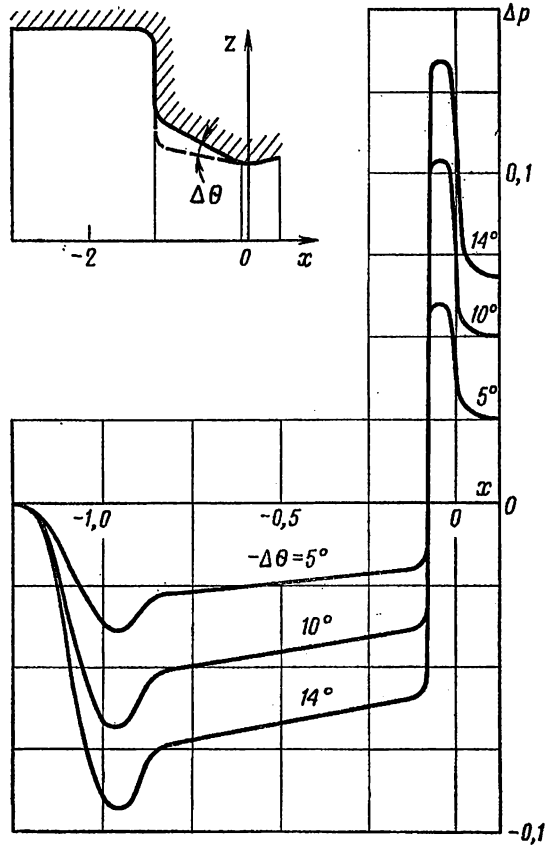


Fig. 49.7

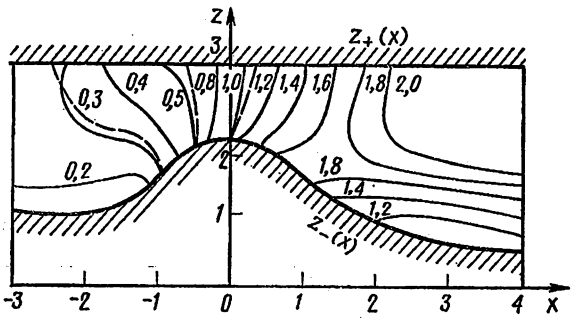


Fig. 49.8

des y. Les sections de la paroi supérieure par les plans x = const sont les moitiés d'ellipses, chacune de ces dernières passant par le point $y = 0$, $z = 3$. Sur la figure 49.8 sont représentées les lignes d'intersection des parois de la tuyère et des surfaces M = const avec le plan de symétrie de l'écoulement x, z. Pour estimer la précision des calculs on reproduit, sur le dessin, en trait interrompu, trois lignes iso-Mach obtenues en diminuant de 8 fois le nombre de mailles de calcul (les calculs principaux étant effectués sur 3200 mailles).

Notons, en conclusion, que les résultats présentés dans ce paragraphe n'embrassent qu'une infime partie de vastes recherches sur les écoulements dans les tuyères spatiales. Ces études s'appuyant sur le schéma aux différences du § 27 ont notamment permis de déterminer les efforts latéraux concomitants dans les tuyères qui ne sont pas à symétrie axiale. Par ailleurs, on ne connaît, à l'heure actuelle, aucun ouvrage qui aurait donné la résolution du problème direct de la théorie d'une tuyère de Laval spatiale grâce à d'autres schémas aux différences.

CHAPITRE VII

ÉCOULEMENTS SUPERSONIQUES STATIONNAIRES

Le présent chapitre réunit des exemples qui illustrent les possibilités de la méthode de calcul des écoulements supersoniques stationnaires exposée aux §§ 18 à 20 pour le cas bidimensionnel, et au § 26 pour le cas spatial. Le fait que c'est précisément à l'aide de cette méthode qu'il est devenu possible de résoudre la majeure partie des problèmes envisagés témoigne une fois de plus de son efficacité et de sa relative simplicité.

§ 50. Ecoulements plans et écoulements à symétrie axiale d'un gaz parfait

Jets sous-détendus à taux de détente élevés débouchant dans une atmosphère lorsqu'en contournant le bord de la tuyère une partie de jet s'écoule dans un sens quasi opposé à son sens initial. Jets annulaires et jets en éventail. Exemples de calcul de l'écoulement dans les entrées d'air planes.

Ce paragraphe réunit des exemples du calcul des écoulements supersoniques bidimensionnels (plans et à symétrie axiale) au moyen du schéma aux différences du § 18. Voici les raisons qui ont guidé les auteurs lors de la sélection de ces exemples. A l'heure actuelle, on a mis au point des schémas aux différences assez efficaces et précis pour la résolution des problèmes bidimensionnels (tels que les méthodes des caractéristiques, directe et inverse, diverses variantes du schéma aux différences de K. Babenko [3], etc.). Quoique les problèmes résolus et susceptibles de l'être par ces schémas soient très variés, l'expérience à longue échéance d'un bon nombre de chercheurs montre que la construction et la mise au point des algorithmes appropriés et des programmes pour les ordinateurs exigent, ordinairement, les efforts intenses et de longue durée de grandes équipes de spécialistes hautement qualifiés. Par contre, les algorithmes et les programmes s'appuyant sur le schéma aux différences du § 18 se sont montrés nettement plus simples et plus universels. Le fait est qu'en un temps record on a réussi, avec ces algorithmes et ces programmes, à résoudre non seulement la plupart des problèmes traités auparavant par d'autres méthodes (écoulements dans les tuyères de

Laval, écoulement de jets à symétrie axiale supersoniques débouchant dans une atmosphère et dans le sillage supersonique, écoulement autour des corps de révolution pointus) mais aussi des problèmes dont les algorithmes de résolution n'existaient pas jusqu'ici. C'est précisément à ce groupe de problèmes que se rattachent la majorité des exemples ci-dessous. Ce choix des exemples semble d'autant plus indiqué que le § 20 nous donne une idée sur les possibilités de la méthode lors de la résolution des problèmes du premier groupe.

Les exemples ci-dessous portent sur: les jets à symétrie axiale sous-détendus débouchant dans une atmosphère pour des taux de détente fort élevés (notamment, dans le cas où une partie du jet, contournant le bord de la tuyère, s'écoule dans un sens quasi opposé à son sens initial); l'écoulement désadapté des jets sortant de la tuyère annulaire et de la tuyère comportant un corps central; les jets en éventail résultant de l'écoulement d'un flux uniforme sortant d'une fente annulaire ou de la collision « normale » d'un jet supersonique avec un plan ainsi que les écoulements dans divers organes d'entrée des avions (dans les « entrées d'air »). Les résultats proposés à l'attention du lecteur ont déjà été plus ou moins décrits antérieurement dans les ouvrages [12], [22], [47], [58], [63]. Les schémas aux différences employés dans ces ouvrages ne sont pas forcément identiques au schéma aux différences du § 18 car celui-ci suppose l'écoulement « x-supersonique ». Les écarts relevés sont toutefois essentiellement liés à l'orientation des éléments du réseau aux différences et ils n'en modifient pas les principes. Pour cette raison l'on s'est cru autorisé à se limiter dans pareils cas à une brève description du réseau aux différences employé en renvoyant le lecteur aux sources pour y trouver les détails clés du calcul. Passons à l'analyse des exemples.

Les premiers exemples traitent des jets à symétrie axiale sous-détendus dans une atmosphère et ont pour but de mettre en relief les possibilités de la méthode dans une vaste gamme de taux de détente $n = p_0/p_e$. Ici et plus loin les indices 0 et e sont associés aux paramètres dans la section de sortie de la tuyère sur son bord de fuite ($x = 0$) et dans l'atmosphère, p est la pression rapportée à $\rho_* q_*^2$, où ρ_* et q_* sont la densité et la vitesse critiques du jet dans une certaine section « initiale ».

La figure 50.1,*a*, *b* représente la frontière du jet et les isobares pour le cas où $n = 2$, $M_0 = 3$, le flux dans la section de sortie étant parallèle à l'axe des x. On y voit les deux premiers (fig. 50.1,*a*) et le cinquième (fig. 50.1,*b*) « tonneaux », les échelles sur les axes des x et des r étant différentes et les courbes $p = \text{const}$ étant distantes de $\Delta p = 0{,}004$. On sait qu'au voisinage de l'extrémité de chaque « tonneau » il se forme, par réflexion irrégulière (« de Mach ») du choc attaché sur l'axe de symétrie, une onde de choc intense (quasi normale) (« disque de Mach ») en arrière de laquelle l'écoulement est subsonique. Lorsque n ne dépasse pas fortement l'unité, la dimen-

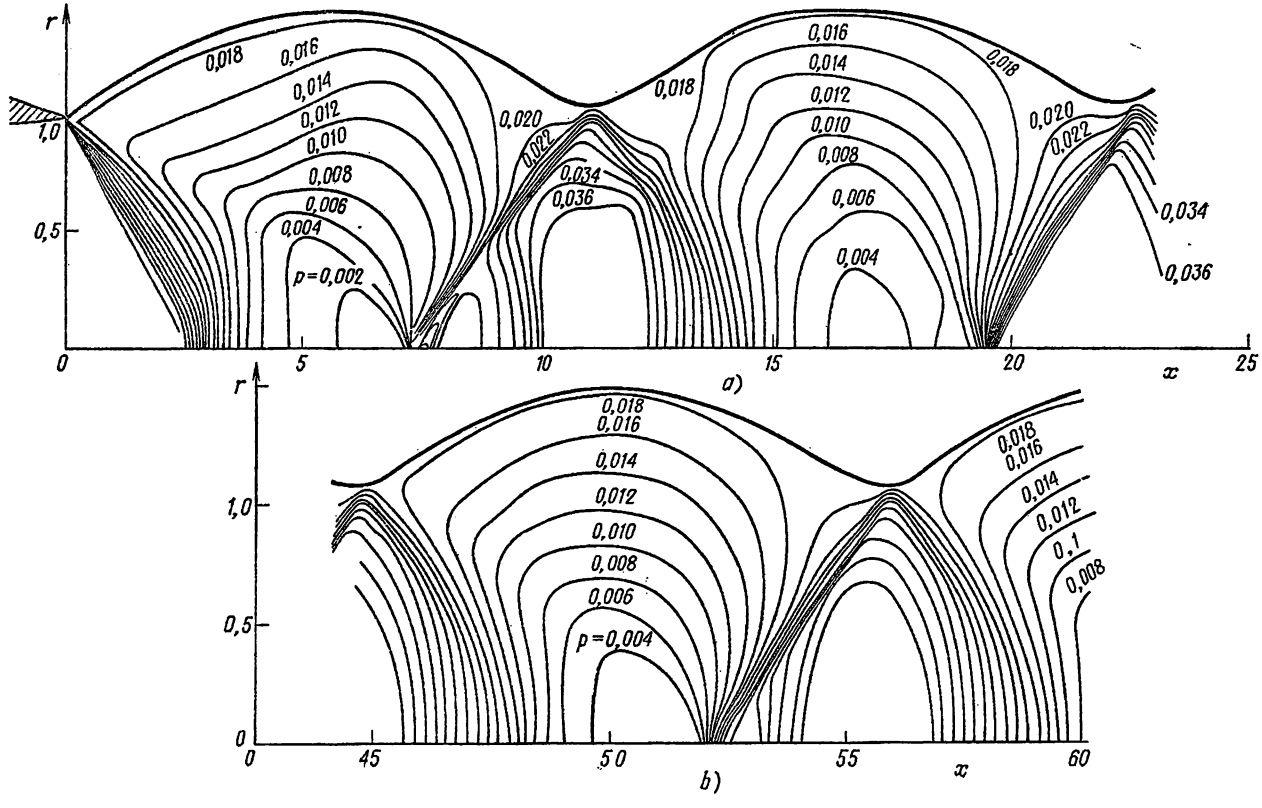

r
1,0
0,5
0
5
10
15
20
25
x
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
0,008
0,006
0,004
p=0,002
0,020
0,022
0,034
0,036
a)
r
1,0
0,5
0
0
45
50
55
60
x
0,018
0,016
0,014
0,012
0,010
0,008
0,006
p=0,004
0,1
b)

Fig. 50.1

sion du « disque de Mach » est tellement petite qu'à en juger d'après les paramètres déterminés en prenant la moyenne sur tous les segments élémentaires (y compris ceux au voisinage de l'axe de symétrie), le flux reste « x-supersonique ». Cette circonstance nous permet d'appliquer la méthode du § 18 au calcul des jets « peu sous-détendus » sans porter restriction sur x. De plus, une représentation incorrecte des champs de paramètres dans les petites zones subsoniques, en arrière des « disques de Mach », n'altère pratiquement pas la précision du calcul dans la plus grande partie du jet.

Avec n croissant, la dimension du « disque de Mach » augmente tellement que pour $n \gg 1$ les possibilités de la méthode ne sortent pas du cadre du premier « tonneau », dont la longueur s'accroît cependant très rapidement en atteignant, pour les grands n, des centaines et des milliers de rayons de la section de sortie de la tuyère. Ceci est bien mis en évidence par l'allure des frontières du jet (lignes continues) et des chocs de compression (lignes en trait interrompu) sur la figure 50.2,*a* correspondant au jet à symétrie axiale débouchant d'une tuyère tronconique ($M_0 = 2$, $\theta_0 = 10°$, où θ_0 est le demi-angle d'ouverture de la tuyère) pour $n = 10^4$ et 10^6. On sait [1] que si $n \gg 1$, les dimensions du jet augmentent comme $\sqrt{n}$. Cette dépendance est bien confirmée par la figure 50.2, *b* où les frontières des jets, pour trois valeurs de n, sont reportées aux coordonnées $x^\circ = x/\sqrt{n}$ et $r^\circ = r/\sqrt{n}$. Notons que dans les exemples envisagés, lorsque $n = 10^4$ et $n = 10^6$, les frontières du jet au voisinage des lèvres de la tuyère montent quasi verticalement. Il en résulte que dans la portion initiale le flux n'est pas partout « x-supersonique », ce qui est nécessaire pour l'application de la version de la méthode du § 18. Les résultats ci-dessus ont été obtenus au moyen d'un maillage curviligne (pour les détails, voir [58]) qui supprime cette restriction. De façon analogue, on a calculé les jets ($M_0 = 1{,}05$, $\theta_0 = 0$) dont les frontières des portions initiales sont tracées sur la figure 50.3. Les exemples présentés révèlent un fait intéressant pour les grands n, à savoir que le flux au voisinage du jet s'écoule dans le sens quasi opposé à son sens initial.

Les deux autres exemples se rapportent à l'écoulement du jet d'une tuyère annulaire [63] et d'une tuyère à corps central. La figure 50.4 représente les résultats du calcul d'un jet annulaire débouchant dans l'atmosphère où la pression est supposée donnée et égale à celle du domaine adjacent à l'axe de symétrie ($M_0 = 3$, $\theta_0 = 0$, $n = 2$). Les frontières du jet et les isobares y sont tracées. Les échelles des axes de coordonnées sont différentes. La figure 50.5 représente un écoulement à l'intérieur et en aval d'une tuyère munie d'une virole cylindrique et d'un corps central à pointe *). Dans la section initiale (pour $x = 0$) le flux est uniforme et parallèle à l'axe des x.

*) Ces résultats ont été obtenus par V. Douganov.

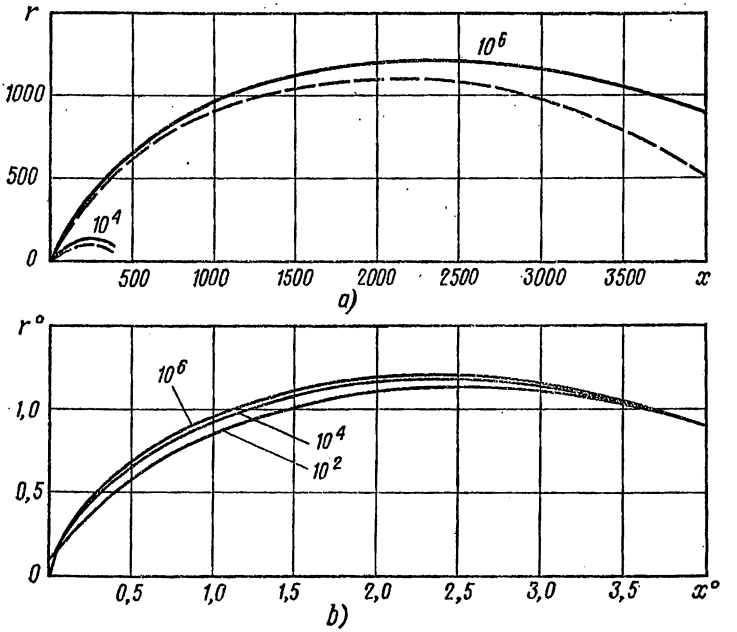


Fig. 50.2

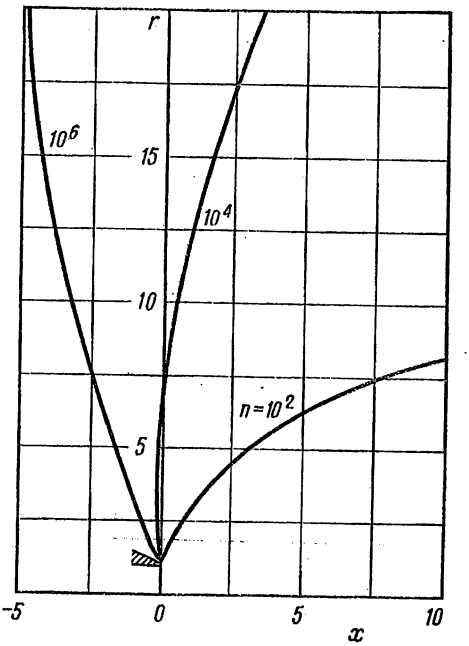


Fig. 50.3

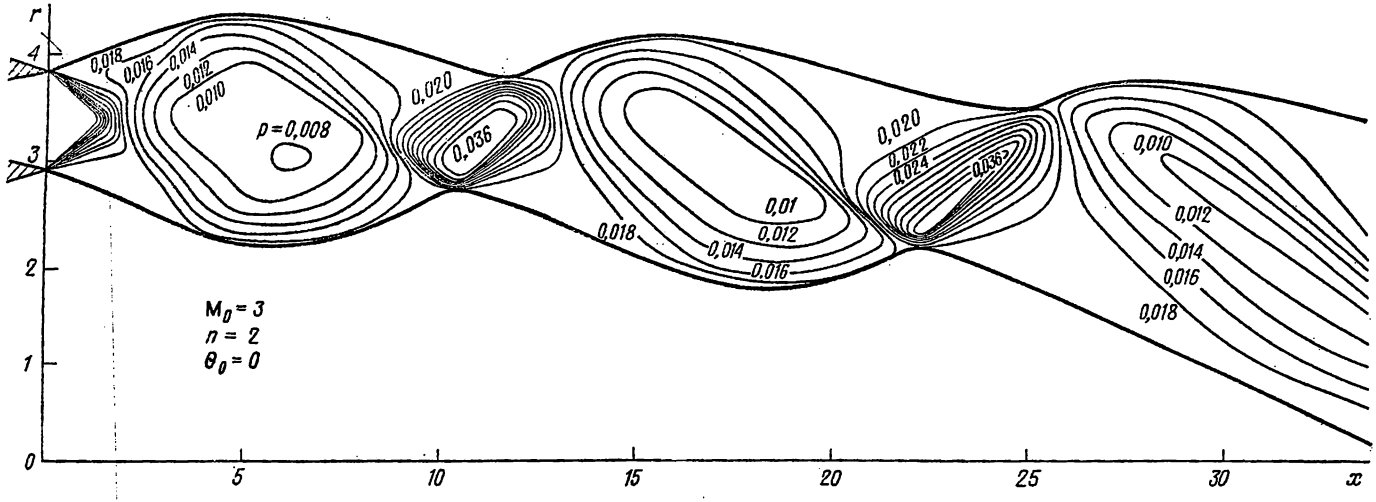


Fig. 50.4

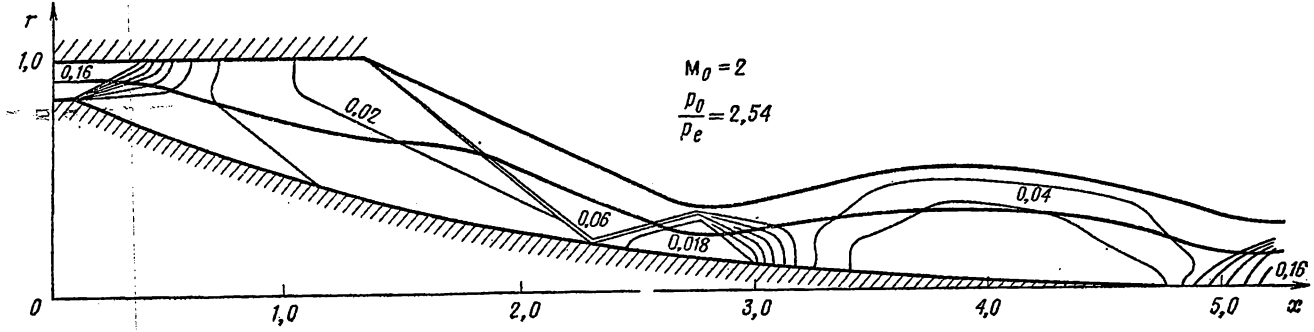


Fig. 50.5

Les autres paramètres du problème sont les suivants: $M_0 = 2$, $p_0 = 0{,}173$ et $p_e = 0{,}068$; ici, à la différence du cas précédent, l'indice 0 est associé aux paramètres du flux non pas au bord de fuite mais dans la section d'entrée. Outre la virole et le corps central (lignes continues avec hachures), la figure représente la frontière du jet, la ligne de courant « moyenne » et les lignes $p = \text{const}$ à intervalle constant $\Delta p = 0{,}02$.

Les figures 50.6 et 50.7 donnent des exemples du calcul des jets supersoniques en éventail. Ils ont été obtenus grâce au schéma aux différences pour les écoulements « r-supersoniques » ($v > c$) décrit dans [12]. Ce schéma est analogue à celui du § 18 le calcul étant effectué suivant les couches $r = \text{const}$. La figure 50.6 se rapporte au jet détendu à travers une fente annulaire: $r \equiv 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ où le flux est uniforme, normal à l'axe de symétrie et possède le nombre de Mach $M_0 \equiv v_0/c_0 = 3$. La détente est adaptée, i.e. $n = 1$. Sur la figure sont montrées la frontière du jet et les isobares (les chiffres figurant à côté des courbes sont les valeurs de $p \cdot 10^3$). Signalons un fait curieux: malgré le régime de détente adaptée ($n = 1$) le jet en éventail, à la différence du jet s'écoulant de la tuyère ronde (pour des paramètres uniformes dans sa section de sortie, $\theta_0 \equiv 0$ et $n = 1$), a une structure « en tonneau ». Celle-ci est due à la surdétente liée à la variation d'aire des filets de courant par étalement du gaz depuis l'axe de symétrie. Une semblable structure est caractéristique pour un jet en éventail résultant de la collision « normale » du jet se détendant à travers une tuyère ronde. Ici, outre l'étalement depuis l'axe de symétrie, entre en jeu l'effet de désadaptation par augmentation de pression dans le choc qui se crée dans le jet supersonique incidant sur la paroi. L'écoulement correspondant est représenté sur la figure 50.7 où sont tracés le bord de la tuyère ($M_0 = 2{,}52$; $\theta_0 = 7°15'$), le plan de collision, les frontières du jet, les isobares et la ligne sonique (celle-ci en trait interrompu). En pointillé est donnée la frontière du domaine d'écoulement; les paramètres du gaz y ont été trouvés par établissement en temps d'après le procédé du § 46. Sur la ligne en pointillé horizontale, là où le flux est « x-supersonique », le calcul a été effectué suivant le schéma du § 18 alors qu'à droite de la ligne verticale, on a eu recours au même schéma que dans le cas de la figure 50.6.

Les dernières illustrations se rapportent à l'écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'une entrée d'air plane. La figure 50.8,*a* correspond au cas où le nombre de Mach du flux incident $M_0 = 4$. La forme de l'entrée d'air est tracée au bas de la figure, à gauche. On y voit également un quadrilatère en trait interrompu isolant le flux représenté dans la partie principale de la figure. Sur la figure 50.8,*a* sont données, en plus de la trace de l'entrée d'air (lignes pleines avec hachures), les isobares (les chiffres signifient les valeurs de $p \cdot 10^2$) dont les concentrations mettent bien en évidence l'orientation des

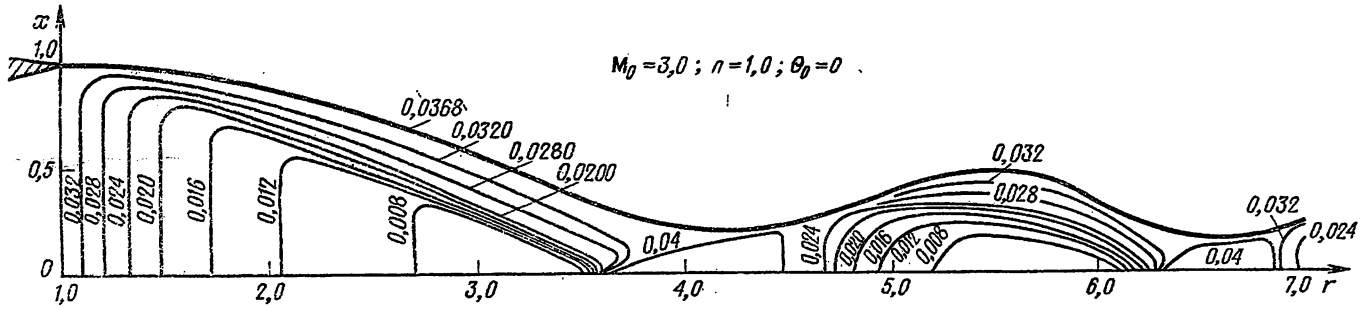


Fig. 50.6

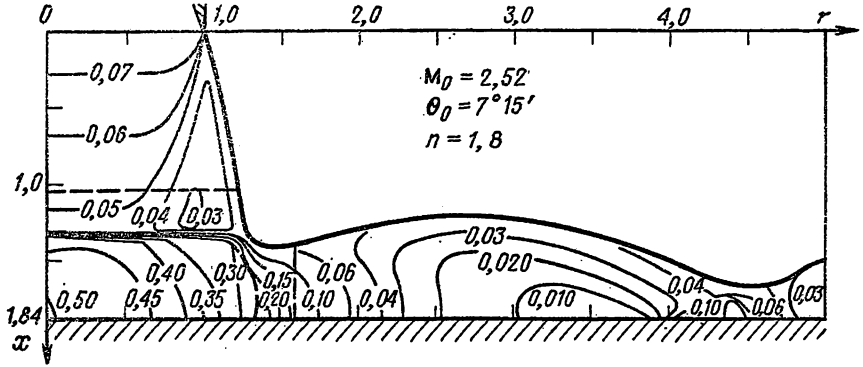


Fig. 50.7

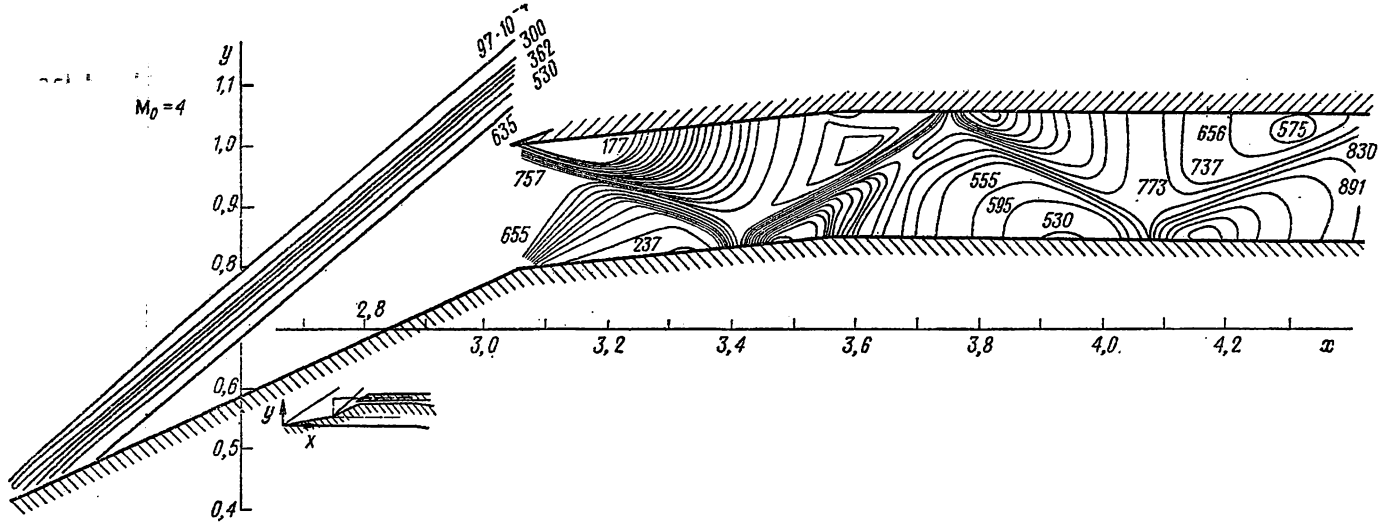

$M_0 = 4$
y
1,1
1,0
0,9
0,8
0,6
0,5
0,4
$97 \cdot 10^{-7}$
300
362
530
635
757
655
177
237
555
595
530
773
656
575
737
830
891
2,8
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8
4,0
4,2
x
y
x

Fig. 50.8, *a*

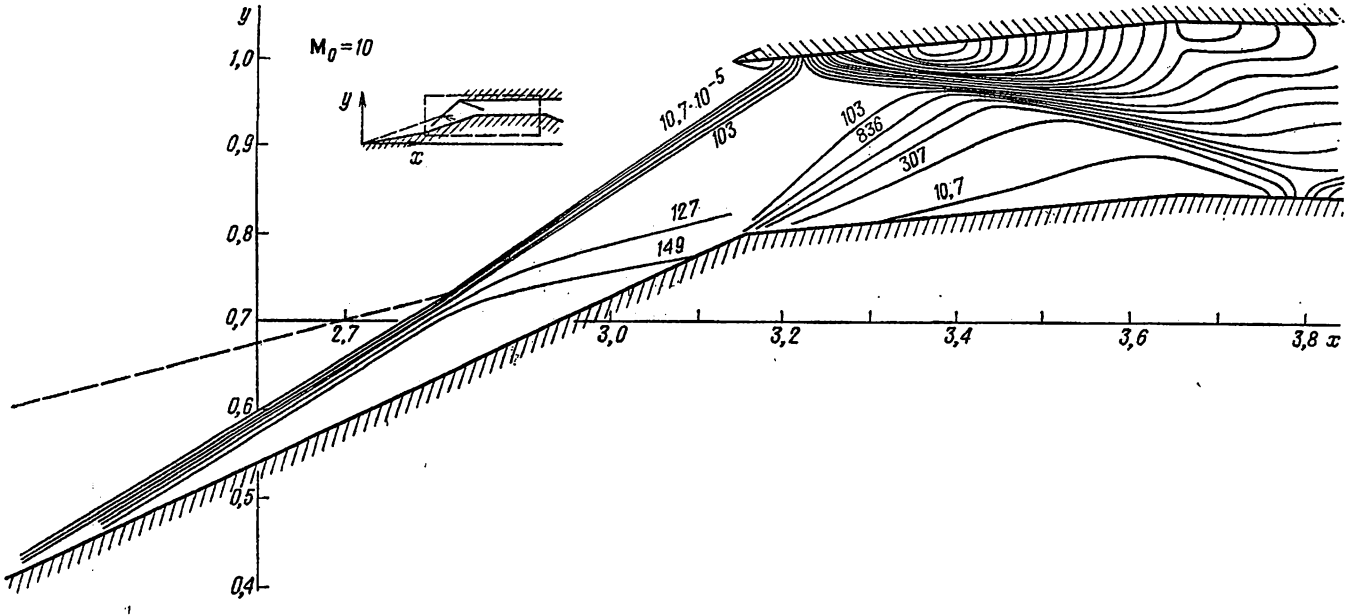

y
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
M0=10
y
x
10,7·10⁻⁵
103
836
307
10,7
127
149
2,7
3,0
3,2
3,4
3,6
3,8 x

Fig. 50.8, *b*

chocs de compression. La figure 50.8,*b* est construite de façon analogue et correspond à la même entrée d'air pour $M_0 = 10$. Pour les autres détails sur le calcul des écoulements dans les entrées d'air le lecteur est renvoyé à l'ouvrage [22].

§ 51. Ecoulement dans la partie divergente des tuyères spatiales

Ecoulement dans la partie divergente des tuyères de section droite elliptique et quasi carrée. Ecoulement spatial dans la partie divergente de la tuyère à symétrie axiale dû à la dissymétrie de l'écoulement dans la section initiale.

Les premiers exemples proposés mettant en évidence les possibilités et l'efficacité du schéma aux différences pour les écoulements supersoniques spatiaux (§ 26) traitent des résultats de la résolution des problèmes d'écoulement spatial dans la partie divergente de la tuyère. Le caractère spatial de l'écoulement dans ces exemples est dû soit à la configuration de la tuyère (écart de la forme des sections droites par rapport à la forme circulaire), soit à l'absence de symétrie axiale du flux dans la section initiale. Les résultats ci-dessous ont été, en partie, publiés dans les ouvrages [45], [61]. Regrettons qu'il y ait peu de publications sur les problèmes à discuter qui sont d'un grand intérêt à plus d'un point de vue pratique. Outre les ouvrages précités on connaît les études [15], [75], [152] dans lesquelles les auteurs ont effectué le calcul suivant les méthodes des caractéristiques directe [15] et inverse [75], [152]. Passons à l'étude des exemples.

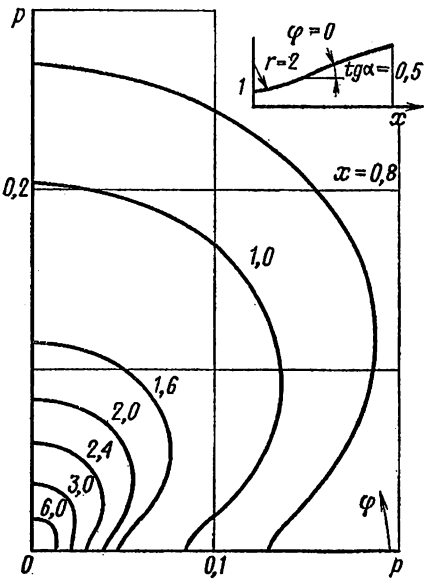


Fig. 51.1

La figure 51.1 représente les résultats du calcul de l'écoulement dans une tuyère elliptique dont la surface avait pour équation

$$(y/a)^2 + (z/b)^2 = 1, \quad a/b = 2.$$

Ici les axes des y et des z du système de coordonnées cartésiennes x, y, z se situent dans les plans de symétrie de l'écoulement caractérisés par $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$, où φ est l'angle donnant la position du

plan méridien du système de coordonnées cylindriques x, r, φ. La fonction $a = a(x)$ est telle que la section du contour de la tuyère par le plan $z = \varphi = 0$ se traduit par la courbe représentée en haut de la figure 51.1 et pour laquelle en particulier $y = 1$ lorsque $x = z = 0$. Dans la section d'entrée ($x = 0$) le flux est uniforme et parallèle à l'axe des x et $u \equiv 1{,}1$. Ici et plus loin les vitesses sont rapportées à q_* et la pression à $\rho_* q_*^2$, où q_* et ρ_* sont la vitesse et la densité critiques du flux. Sur la figure 51.1 sont données les polaires de distribution de la pression sur la paroi, i.e. les dépendances $p = p(\varphi)$ pour différents x. On voit que la pression est essentiellement non uniforme en φ la pression minimale pour chaque x étant observée aux points d'intersection de la paroi avec le grand axe de l'ellipse, i.e. lorsque $\varphi = 0$. Pour en estimer la précision, les calculs ont été effectués pour des nombres de mailles de calcul deux et quatre fois plus petits dans chaque section $x = \text{const}$ (les calculs de base ont été effectués pour $J \times K = 22 \times 16 = 352$ mailles). Les résultats obtenus se sont avérés très proches et rapidement convergents. A titre d'exemple, les intégrales des forces de pression s'exerçant sur la paroi de la tuyère jusqu'à la section $x = 10$, ce qui correspond à une augmentation de 25 fois environ de la section droite de la tuyère, ont été trouvées égales à 0,705 ; 0,708 et 0,714 respectivement pour chacun des trois cas calculés.

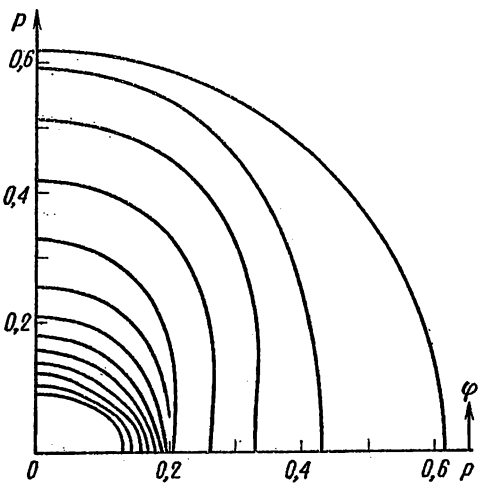


Fig. 51.2

Sur la figure 51.2 sont représentées les polaires $p = p(\varphi)$ pour une tuyère d'ellipticité variable. Sa forme était définie par la même équation qu'au cas précédent si l'on y pose $b \equiv 1$ et si on donne la fonction $a = a(x)$, définissant le contour de la tuyère dans le plan $z = 0$, par le raccordement continu de la parabole $y = \sqrt{x}$ avec la circonférence de centre se trouvant sur l'axe des y. Ce qui fait que la forme des sections droites d'une telle tuyère varie de la circonférence ($a/b = 1$) pour $x = 0$ à l'ellipse avec le rapport des demi-axes $a/b = \sqrt{5}$ pour $x = 5$, la longueur du petit axe de l'ellipse étant constante dans toutes les sections. Cette tuyère se rapproche de celle dans laquelle l'écoulement était calculé dans [152] par la méthode des caractéristiques. A la différence de [152] qui utilise l'écoulement

d'une source, le flux à l'entrée de la tuyère était supposé uniforme ($u \equiv 1{,}1$). Malgré cette différence les polaires de la figure 51.2 et de la figure correspondante de l'ouvrage cité [152] se rapprochent qualitativement (les polaires sur la figure 51.2 correspondent à $x = 0$; 0,6 et ensuite jusqu'à $x = 5$ avec un intervalle de 0,4 environ).

Quelques-unes des figures suivantes se rapportent aux tuyères « superelliptiques » dont la surface avait pour équation

$$y^{\omega} + z^{\omega} = [a\,(x)]^{\omega}\ (\omega > 2),$$

où la fonction $a\,(x)$ était la même qu'au cas de la tuyère elliptique envisagée au début du paragraphe. Les tuyères envisagées possèdent quatre plans de symétrie ($\varphi = 0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 3\pi/4$), leur section droite se rapprochant d'un carré dont les sommets sont continûment arrondis lorsque $\omega \gg 2$. Les calculs ont été faits pour $\omega = 5$ et $\omega = 10$. Les paramètres dans la section d'entrée étaient donnés comme dans les cas précédents, i.e. $u \equiv 1{,}1$.

Les distributions de p suivant φ, pour une tuyère avec $\omega = 5$, équivalentes aux polaires tracées sur les figures précédentes sont représentées sur la figure 51.3 par des cercles. La détente maximale se réalise dans les « encoignures » (pour $\varphi = \pi/4$). Les résultats représentés par les cercles ont été obtenus pour $J \times K = 22 \times 16 = 352$ mailles. Pour en estimer la précision, on a porté sur la même figure, sous forme de lignes continues, les résultats du calcul fait pour $J \times K = 30 \times 24 = 720$ mailles.

Sur les deux figures suivantes on voit quelques résultats obtenus pour une tuyère « superelliptique » avec $\omega = 10$. La figure 51.4 donne les distributions de la composante circonférencielle de la vitesse (w) sur la paroi de la tuyère en fonction de φ, quel que soit x. La figure 51.5 représente les polaires de pression $p = p\,(\varphi)$ pour la même tuyère.

Dans les exemples précédents le jet à l'entrée de la partie étudiée de la tuyère était uniforme et parallèle à l'axe des x et le caractère spatial de l'écoulement était dû à la forme spatiale de la tuyère. La figure 51.6 représente les résultats du calcul d'un écoulement spatial dans des tuyères dont la partie divergente est à symétrie axiale (tronconique). Le flux à son entrée (pour $x = 0$) était posé spatial, la dissymétrie axiale de l'écoulement provenant de celle de la partie subsonique de la tuyère. La tuyère étudiée a un plan de symétrie ($z = 0$). Les sections de la surface de la tuyère par ce plan sont représentées en haut de la figure 51.6, où $\varphi = 0$ est figuré par une courbe continue et $\varphi = \pi$ par une courbe en trait interrompu. L'écart entre les courbes continue et en trait interrompu pour $x < 0$ traduit la dissymétrie de la partie subsonique de la tuyère (ici dans chaque plan $x = \text{const}$ le contour de la tuyère est une circonférence pour $y < 0$ et une ellipse pour $y > 0$). Le calcul des champs d'écoulement dans les parties sub- et transsonique de la tuyère s'appuyait sur la

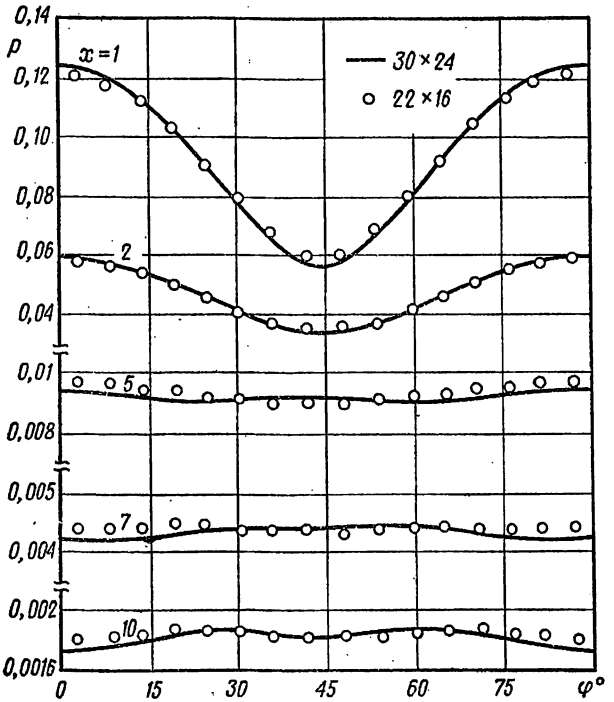


Fig. 51.3

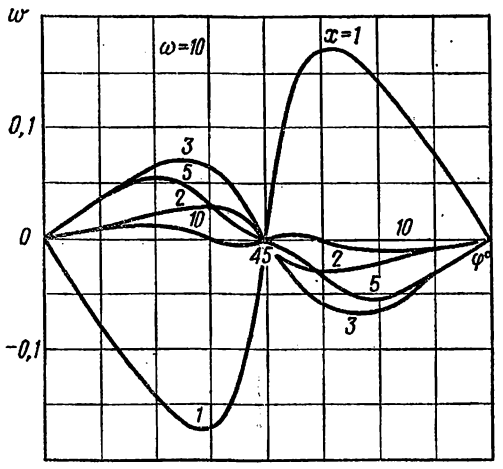


Fig. 51.4

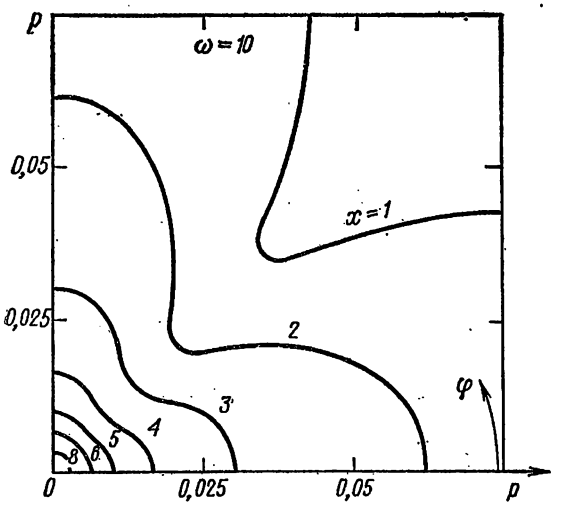


Fig. 51.5

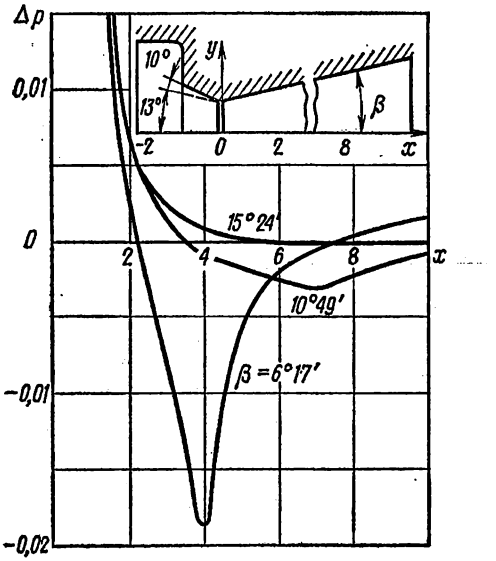


Fig. 51.6

méthode d'établissement en temps et faisait appél au schéma aux différences du § 27 (cf. également § 49). La figure 51.6 représente la différence Δp entre les valeurs de p sur les génératrices inférieure ($\varphi = \pi$) et supérieure ($\varphi = 0$) pour trois demi-angles β d'ouverture

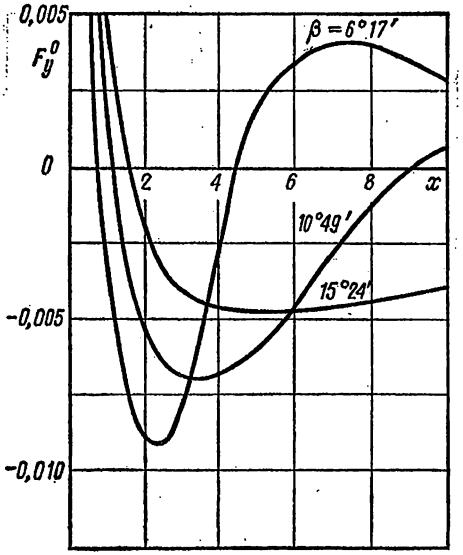


Fig. 51.7

de la partie divergente de la tuyère. La dissymétrie de la partie subsonique fait apparaître une force « latérale » F_y contenue dans le plan de symétrie de la tuyère. Les courbes de distribution de F_y^0 en x pour trois valeurs de β sont portées sur la figure 51.7, où F_y^0 est le rapport de F_y à la composante x de l'impulsion totale du flux, F_y comprenant la force agissant sur la partie convergente de la tuyère. Les résultats représentés sur les figures 51.6, 51.7 ne constituent qu'une partie de la vaste étude entreprise dans [43] à [45].

§ 52. Ecoulement des jets sous-détendus des tuyères de section de sortie non circulaire

Ecoulement d'un jet supersonique en cas de tuyères de section de sortie elliptique et quasi carrée. Effet de variation de l'orientation du « grand axe » de la section droite du jet avec l'éloignement à l'aval de la section de sortie de la tuyère.

La résolution du problème du jet supersonique sous-détendu d'un gaz parfait s'écoulant d'une tuyère de section de sortie non circulaire qu'on trouve dans l'ouvrage [64], au moyen de la méthode du § 26, a permis de découvrir un certain nombre de particularités d'ordre qualitatif, inconnues jusque-là. Nous donnons ci-dessous les résultats extraits de cet ouvrage qui mettent en relief les possibilités de la méthode proposée dans la résolution d'un problème fort compliqué nécessitant le calcul « shock-capturing » d'un choc attaché

spatial et d'une onde centrée se formant lors de l'écoulement autour du bord de fuite de la tuyère. Avant d'exposer les résultats notons qu'aucun ouvrage qui aurait traité ce type de problème par une autre méthode n'est connu des auteurs.

Les figures 52.1 à 52.7 représentent les résultats du calcul des jets supersoniques sous-détendus s'écoulant des tuyères de sections elliptique et « quasi rectangulaire » dans le plan de sortie ($x = 0$) dans une atmosphère au repos à contre-pression extérieure $p_e < p_0$, où l'indice inférieur 0 est associé aux paramètres du jet dans la section de sortie de la tuyère. Le flux à la sortie de la tuyère était posé uniforme et parallèle à l'axe des x, son nombre de Mach $M_0 = 3{,}0$.

Les trois premières figures se rapportent aux jets débouchant des tuyères pour le taux de détente $n \equiv p_0/p_e = 10$. La figure 52.1 montre, pour une tuyère elliptique dont les demi-axes forment le rapport $a/b = 2{,}0$, la section de sortie et les lignes d'intersection de la frontière du jet et des surfaces iso-Mach avec les plans $y = 0$, $z = 0$, $x/b = 10$, $x/b = 20$. L'échelle sur l'axe des x est prise deux fois inférieure aux échelles sur les axes des y et z. Les lignes $M = \text{const}$ sont portées avec des intervalles réguliers ($\Delta M = 0{,}2$), les extrêmes gauches correspondant à $M = M_0 = 3{,}0$. La concentration des surfaces $M = \text{const}$ donne le choc attaché dont les lignes d'intersection avec les plans correspondants sont marquées sur la figure au trait fort comme les lignes d'intersection des mêmes plans avec la frontière du jet. Afin d'estimer l'erreur du calcul le même cas était calculé pour un nombre double de mailles, dans chaque plan $x = \text{const}$ (le nombre de mailles dans la variante de départ était égal à 1280). Les résultats qui en ont été tirés se sont trouvés très proches des résultats représentés. Ainsi, dans l'échelle de la figure les frontières du jet ne se distinguent pratiquement pas.

La figure 52.1 témoigne de la structure spatiale assez complexe de l'écoulement calculé. En particulier, la formation du choc attaché dans le plan passant par le petit axe de l'ellipse se produit pour les x plus grands que dans le plan de son demi-grand axe. Une autre particularité fort intéressante consiste dans le fait que le gaz se détend plus intensément dans la direction de l'axe des z. Il en résulte que le jet s'écoulant de la tuyère de section étirée dans la direction de l'axe des y se trouve, à partir de certains x, étiré dans la direction de l'axe des z, i.e. dans la direction perpendiculaire. L'amplification de cet effet par l'accroissement de l'ellipticité de la section de sortie de la tuyère (du rapport des demi-axes a/b) est bien mise en évidence sur la figure 52.2 où l'on voit, dans la section $x/b = 10$, les lignes $M = \text{const}$, la frontière du jet, le choc attaché et la trace du bord de fuite de la tuyère (en trait interrompu) pour les trois valeurs de $a/b = 1{,}5$; 2,0; 3,0. Sur la figure 52.2 dans chaque cas pour l'une des lignes $M = \text{const}$ est indiquée la valeur correspondante du nombre de Mach, les autres courbes étant tracées avec $\Delta M = 0{,}2$ et y et z

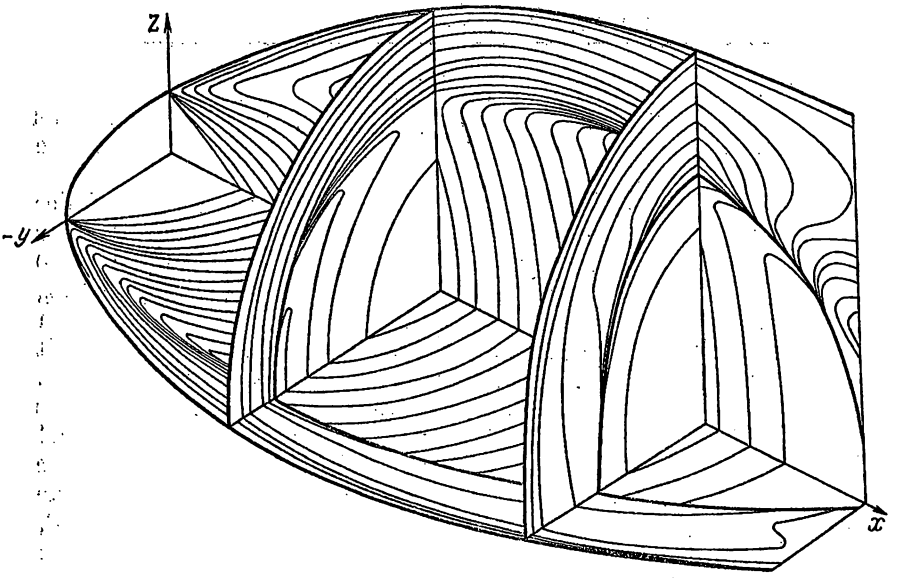


Fig. 52.1

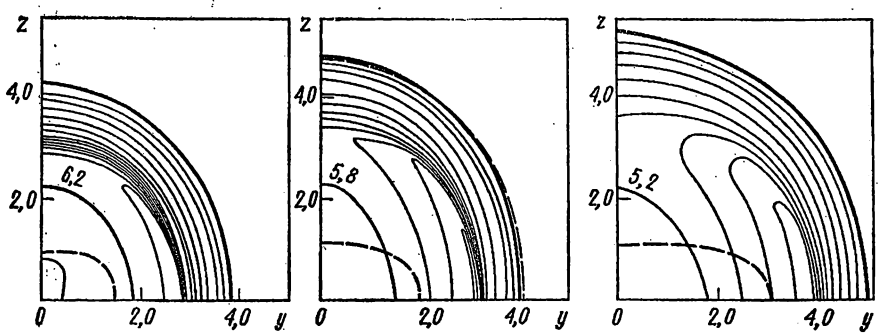


Fig. 52.2

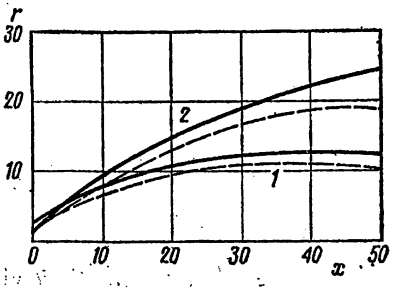


Fig. 52.3

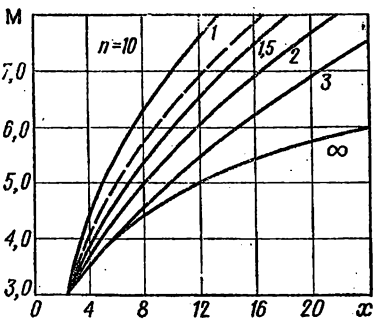


Fig. 52.4

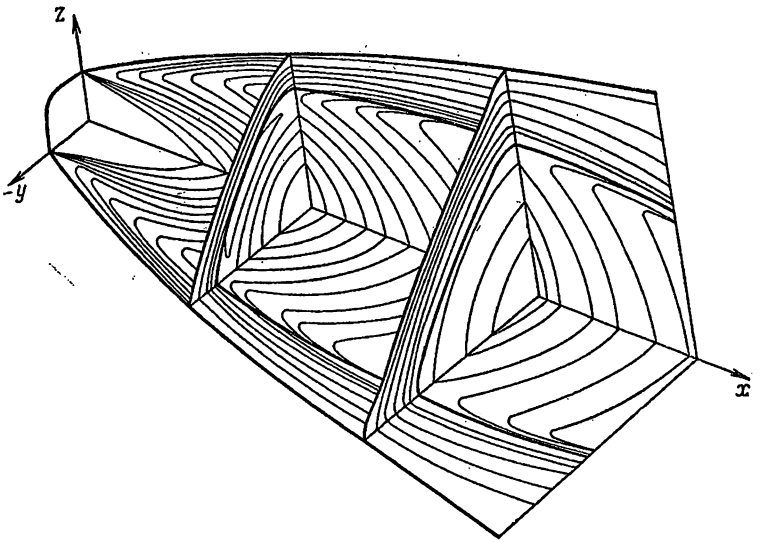


Fig. 52.5

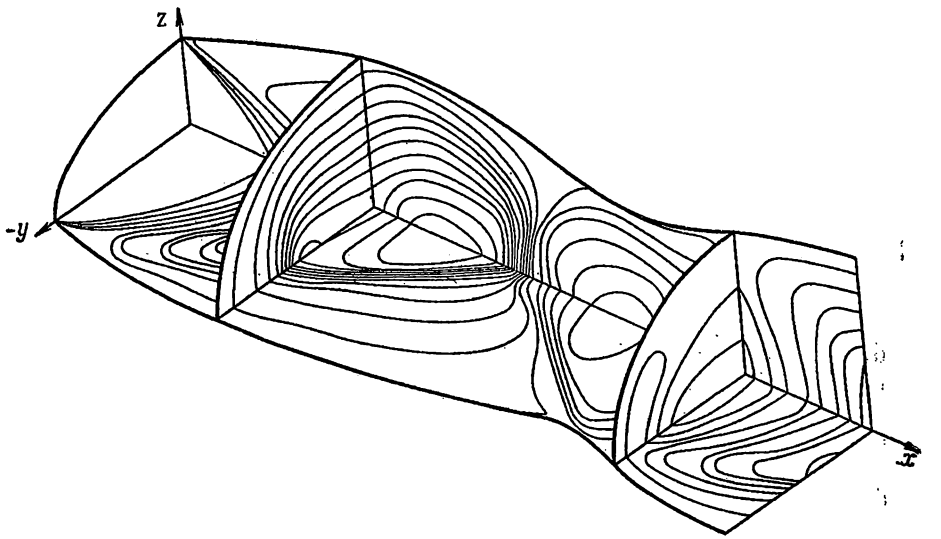


Fig. 52.6

étant rapportés à b. Afin de se faire une idée de la précision pour $a/b = 2{,}0$ on a procédé à un calcul supplémentaire en utilisant dans chaque plan $x = \text{const}$ un nombre de points quatre fois plus petit. La frontière du jet fournie par ce calcul est tracée en pointillé sur la

figure 52.2. L'effet de modification de l'orientation du grand axe de la section droite du jet par accroissement du taux de détente qu'on a décrit ci-dessus s'amplifie comme en témoigne la figure 52.3 correspondant à $n = 100$ et $a/b = 2$. Les lignes continues y donnent la frontière du jet, celles en trait interrompu le choc attaché dans les plans de symétrie de la tuyère. Les courbes marquées du chiffre *1* correspondent au plan du grand axe de l'ellipse, du chiffre *2* à celui

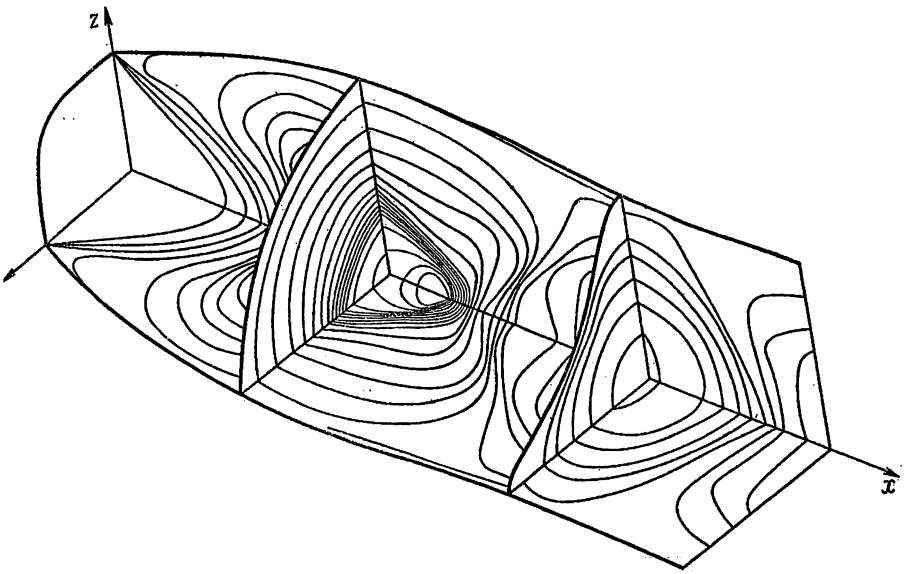


Fig. 52.7

de son petit axe, r étant la distance à l'axe des x, les dimensions linéaires étant rapportées à b.

L'influence de la forme de la section de sortie de la tuyère sur la distribution du nombre de Mach le long de l'axe des x est bien visible sur la figure 52.4 correspondant à $n = 10$. Les lignes continues décrivent les tuyères elliptiques (les chiffres figurant au-dessus des courbes sont les valeurs de a/b), $a/b = 1$ correspondant au jet à symétrie axiale et $a/b = \infty$ au jet plan, une distribution analogue ayant lieu pour une tuyère à section de sortie « quasi carrée » est représentée en trait interrompu (l'équation du bord de fuite de la tuyère est $y^5 + z^5 = 1$). Dans tous les cas la distance le long de l'axe des x est rapportée à la dimension minimale de la section droite de la tuyère. La géométrie du jet et du choc attaché dans le cas d'une tuyère « quasi carrée » pour $n = 10$ est bien visualisée par la figure

52.5 construite sur les mêmes principes que la figure 52.1 avec cette différence que les échelles suivant tous les axes y sont les mêmes. Le jet s'écoulant par cette tuyère se détend le plus dans la direction des axes des y et des z. Il en résulte que la section droite du jet revêt une forme voisine d'un carré tourné de $\pi/4$ par rapport à la section de sortie de la tuyère.

En recourant à la même méthode que dans les cas précédents on a représenté sur les deux dernières figures les résultats du calcul des jets sortant des tuyères elliptique (fig. 52.6) et « quasi carrée » (fig. 52.7) pour $n = 2{,}0$. Les lignes $M = \text{const}$ y sont tracées tous les $\Delta M = 0{,}1$, l'échelle sur l'axe des x est 2,5 fois inférieure à celles des axes des y et des z.

§ 53. Confluence latérale des jets supersoniques à symétrie axiale et interaction latérale entre ces jets et les parois solides

Incidence des jets sous-détendus à symétrie axiale sur les plans parallèles et non parallèles à l'axe de la tuyère. Confluence des jets identiques « parallèles » s'écoulant des tuyères dont les axes sont contenus dans un même plan. Interaction latérale d'un jet avec une surface cylindrique parallèle à l'axe de la tuyère.

Dans ce paragraphe, on donne les résultats de la résolution numérique des problèmes de confluence « latérale » des jets supersoniques à symétrie axiale et d'interaction « latérale » entre ces jets et les parois solides. Les résultats présentés ont été obtenus, comme d'ailleurs tous les résultats du présent chapitre, par la méthode du § 26. Une grande partie en était déjà publiée dans les ouvrages [66], [67] qui contiennent, entre autres, la description des détails supplémentaires de l'algorithme numérique qui ont été dictés par les particularités des problèmes envisagés. Les illustrations proposées se limitent aux écoulements « x-supersoniques » et, par conséquent, à une gamme bien déterminée de taux de détente, d'angles d'incidence des jets, etc. Il n'est toutefois pas dénué d'intérêt de discuter de tels résultats ne serait-ce qu'en raison de la rareté des exemples de solutions de semblables problèmes par d'autres méthodes, malgré le grand intérêt que les aérodynamiciens manifestent pour ces problèmes et les efforts énergiques accomplis pour les résoudre. Notons à cet égard qu'outre les travaux précités les auteurs ne connaissent que deux ouvrages qui traitent des problèmes du type donné. Dans [123], en appliquant la méthode tridimensionnelle des caractéristiques, on a calculé le domaine initial de confluence des deux jets supersoniques à symétrie axiale dont les axes se situent dans un même plan et se coupent à un angle de 60°. [127] traite de la résolution du problème de l'interférence de cinq jets débouchant d'une batterie de tuyères, par une méthode du type de Lax-Wendroff, sans particu-

lariser les surfaces de discontinuité. Il y a deux raisons expliquant le peu de travaux consacrés à la résolution numérique des problèmes de confluence des jets supersoniques : le caractère spatial de l'écoulement et la présence dans le flux de surfaces de discontinuité non moins complexes que celles du cas de l'écoulement dans les jets spatiaux envisagé au paragraphe précédent. Tout cela complique à l'extrême tant la composition et l'ajustement du programme pour les ordinateurs que la conduite du calcul. Comme il ressort des exemples ci-dessous, la méthode du § 26 permet de contourner avec succès ces difficultés. Passons à l'analyse des résultats.

Les figures 53.1 à 53.10 représentent les résultats du calcul de l'interaction d'un jet débouchant de la tuyère tronconique avec le plan de « collision » parallèle à l'axe de la tuyère. On suppose qu'à la sortie de la tuyère l'écoulement est celui d'une source. Par ailleurs, le flux dans la section de sortie se définit par les paramètres au bord de fuite de la tuyère (ces paramètres seront, dans la suite, affectés de l'indice inférieur 0) : nombre de Mach M_0, angle d'inclinaison du vecteur vitesse vers l'axe de la tuyère (demi-angle de son ouverture) θ_0 et taux de détente $n = p_0/p_e$, où p_e est la pression de l'atmosphère. Faisons coïncider l'axe des x du système de coordonnées cartésiennes x, y, z avec l'axe de la tuyère, orientons le plan x, y parallèlement au plan de collision et prenons pour échelle de longueur le rayon de la section de sortie de la tuyère. Dans ces hypothèses, le plan de collision est donné par l'équation $z = -Z$ où Z est un nombre donné supérieur à l'unité.

Les trois premières figures correspondent à l'ensemble de paramètres primitifs suivant : $M_0 = 2$, $\theta_0 = 5$, $n = 7{,}6$ et $Z = 1{,}48$. La figure 53.1 donne une image assez complète de la structure spatiale de l'écoulement. On y voit la section de sortie de la tuyère ainsi que les lignes $M = \text{const}$ tous les $\Delta M = 0{,}2$ et la frontière du jet dans les plans $y = 0$, $z = -Z = -1{,}48$, $x = 2$ et $x = 8$. Sur la figure 53.2 sont données pour les différentes sections $x = \text{const}$ les distributions de la pression en travers du plan de collision. On y relève, en accord avec l'image de l'écoulement de la figure 53.1, qu'en s'éloignant de la section de sortie de la tuyère le domaine de pression élevée cède la place à un domaine de dépression. Le même effet est visualisé par la figure 53.3 représentant la distribution de la pression sur la ligne d'intersection des plans $z = -Z$ et $y = 0$, les ronds figurant les données expérimentales extraites de [66]. La figure 53.4 représente la variation du nombre de Mach le long de l'axe des x (courbes *1*) pour deux cas : le cas envisagé ci-dessus de l'interaction du jet avec un plan de collision (courbe pleine) et celui du jet intercepté par deux plans ($z = -Z$ et $z = Z$) semblables. Dans ce dernier cas (ligne en trait interrompu), la décélération du gaz le long de l'axe des x est causée par les chocs renvoyés par les deux plans et est donc plus accentuée. Les courbes *2* sur la même figure sont les distributions

du nombre de Mach sur la ligne d'intersection du plan de la rencontre avec celui de symétrie ($y = 0$). Ces distributions coïncident pour les deux cas jusqu'à la section ($x \approx 11$) où les chocs se formant par collision du jet avec les plans $z = -Z$ et $z = Z$ atteignent le plan opposé.

Il découle de ce qui précède que les calculs faits permettent de construire l'image de l'écoulement dans la portion initiale ($x \leqslant 11$) de la confluence d'un nombre quelconque de jets identiques débou-

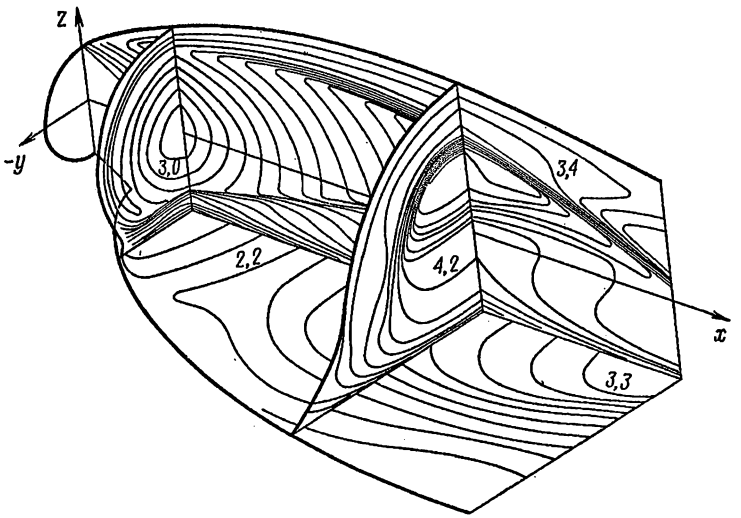


Fig. 53.1

chant des tuyères dont les axes de symétrie sont contenus dans un même plan à cadence de $2Z$. On peut avoir une idée assez précise de la structure de ce genre d'écoulement en se reportant aux figures 53.5 et 53.6, où les frontières des jets et les lignes $\mathbf{M} = \text{const}$ avec $\Delta M = 0{,}2$ sont tracées dans le plan de symétrie ($y = 0$) et dans le plan $x = 8$. Les circonférences en trait interrompu sur la figure 53.6 sont les traces des bords de fuite des tuyères.

D'après les calculs, l'interaction du jet avec un seul plan devient automodèle en n avec un taux de détente croissant. Le caractère automodèle se manifeste par le fait que dans un certain domaine voisin du plan de collision l'écoulement cesse de dépendre de la pression du milieu extérieur. Cette propriété peut être relevée de façon assez nette sur la figure 53.7 sur laquelle, pour le cas de $\mathbf{M}_0 = 3{,}0$, $\theta_0 = 5°$, $Z = 2{,}0$ et les trois valeurs de n, sont données les sections de la frontière du jet et des chocs de pression par le plan de symétrie. Naturellement, le caractère automodèle est altéré lorsqu'on approche des frontières du jet, la forme de celles-ci dépendant sen-

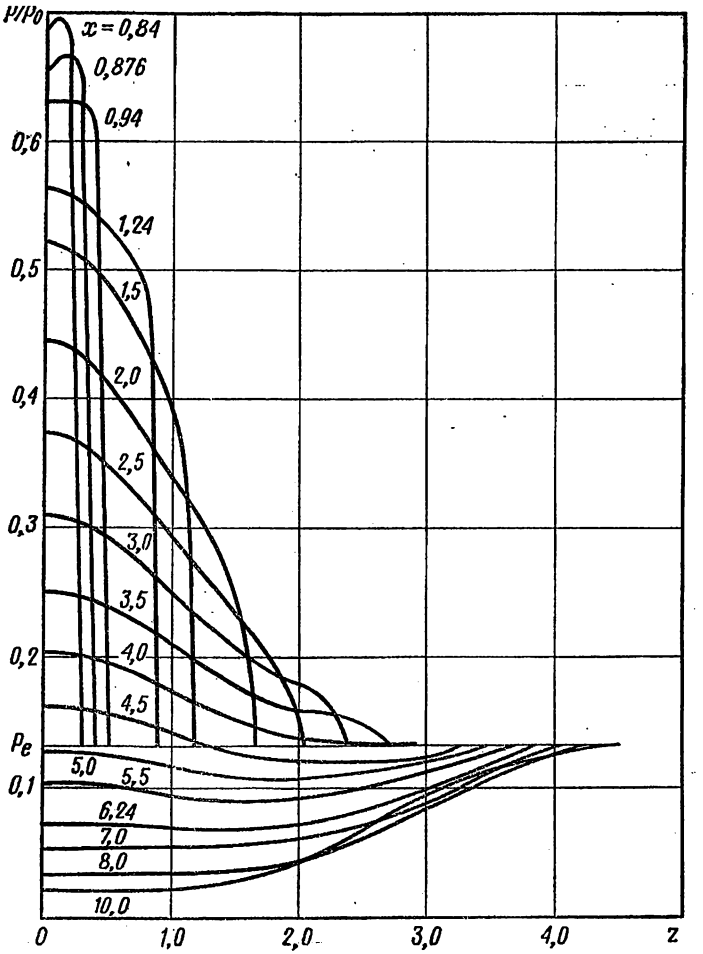


Fig. 53.2

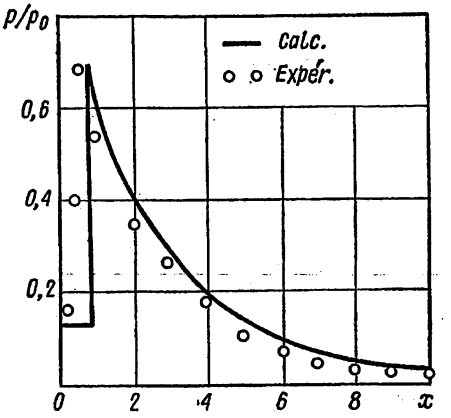


Fig. 53.3

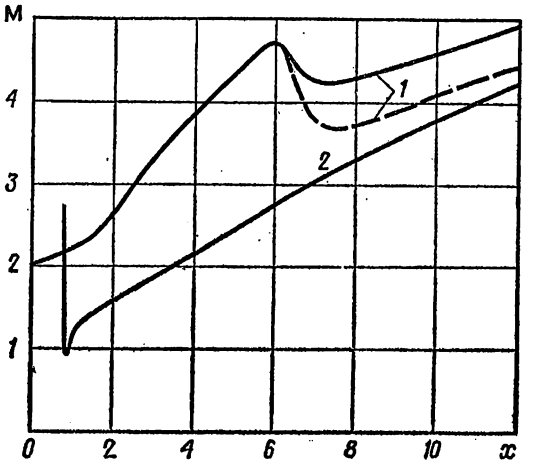


Fig. 53.4

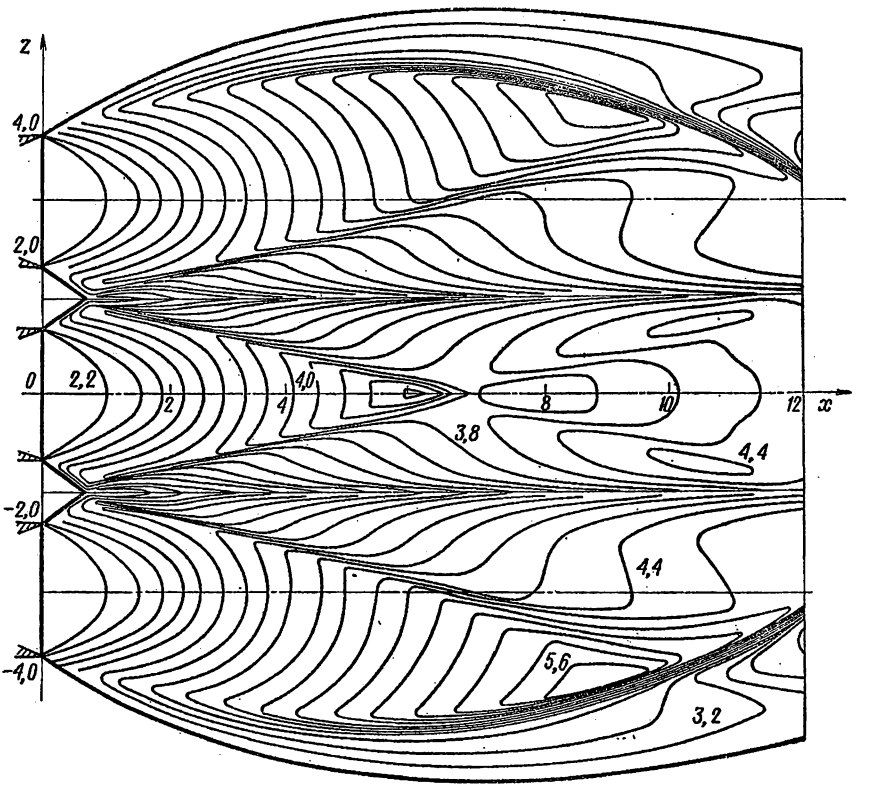


Fig. 53.5

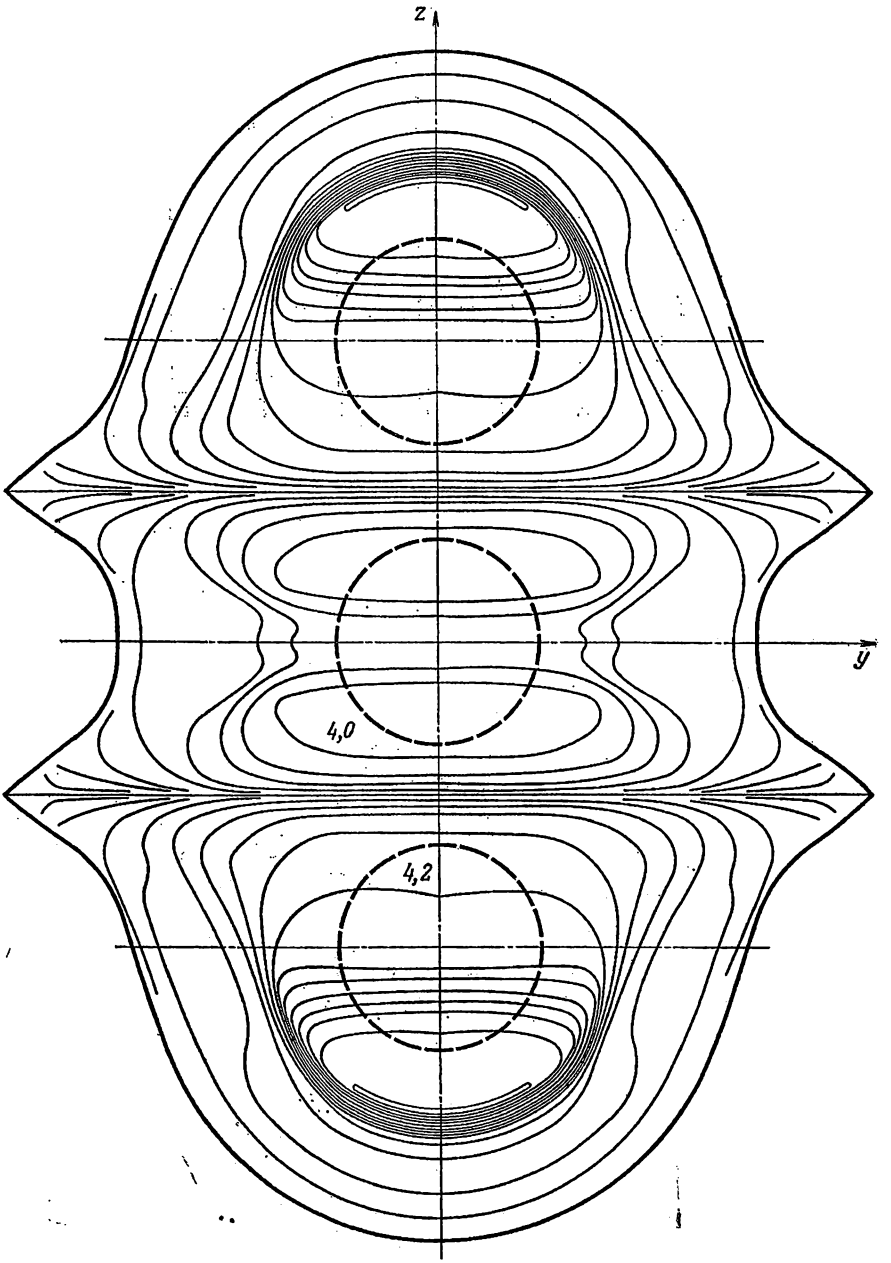


Fig. 53.6

siblement de n comme le montre la figure 53.8. Sur la figure indiquée, pour les mêmes cas, on a représenté, par les courbes pleines, les tra-

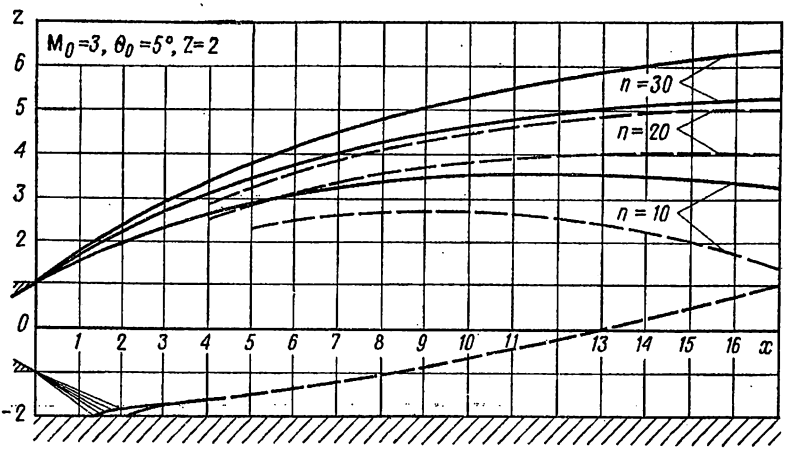


Fig. 53.7

ces des frontières du jet sur le plan de collision. A titre de comparaison, la même figure représente, en trait interrompu, les traces de la section des jets correspondants à symétrie axiale par le plan $z = -Z$.

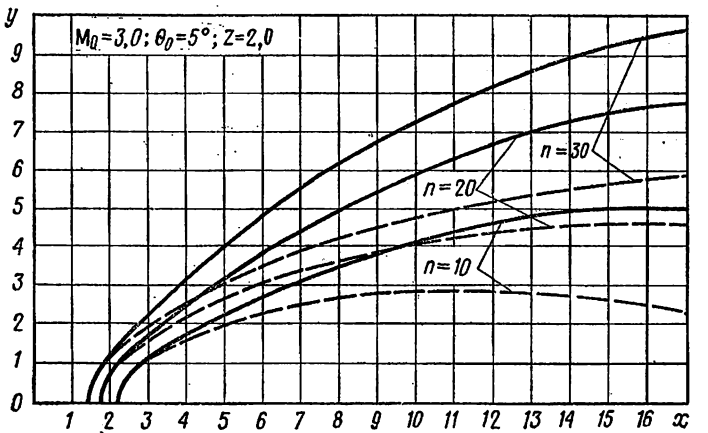
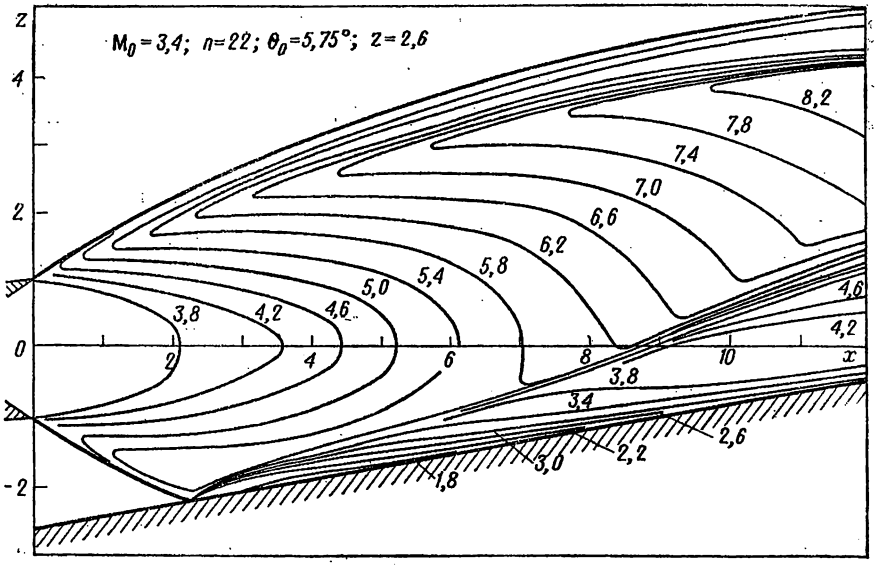


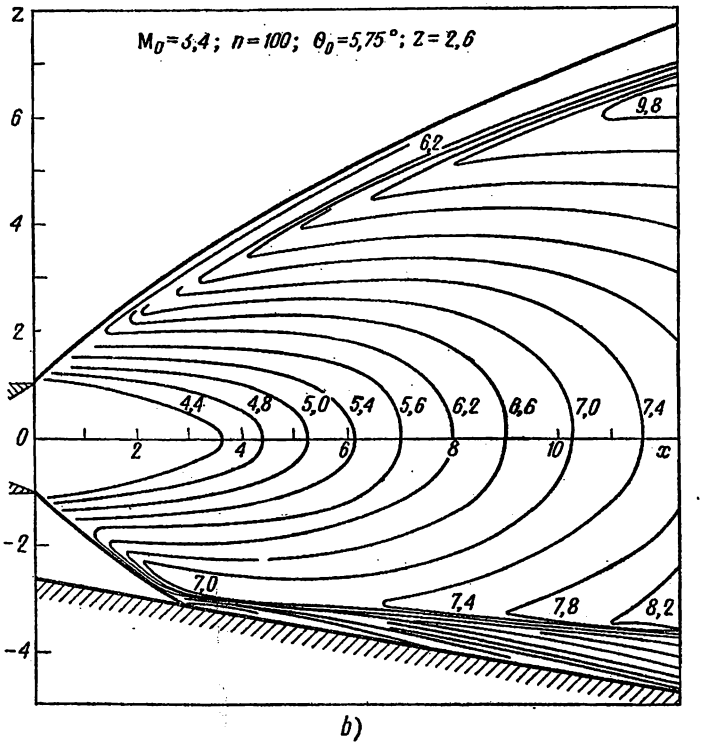
Fig. 53.8

L'écart entre les lignes pleines et celles en trait interrompu traduit l'effet de l'étalement du gaz sur le plan de collision.

Tous les résultats précédents ont été obtenus pour un plan de collision parallèle à l'axe des x. Sur deux figures suivantes sont re-


z
$M_0 = 3,4;\ n=22;\ \theta_0=5,75°;\ z=2,6$
4
2
0
-2
x
2
4
6
8
10
8,2
7,8
7,4
7,0
6,6
6,2
5,8
5,4
5,0
4,6
4,2
3,8
3,4
3,0
2,6
2,2
1,8

a)


z
$M_0=3,4;\ n=100;\ \theta_0=5,75°;\ z=2,6$
6
4
2
0
-2
-4
x
2
4
6
8
10
9,8
6,2
4,4
4,8
5,0
5,4
5,6
6,2
6,6
7,0
7,4
7,0
7,4
7,8
8,2

b)

Fig. 53.9

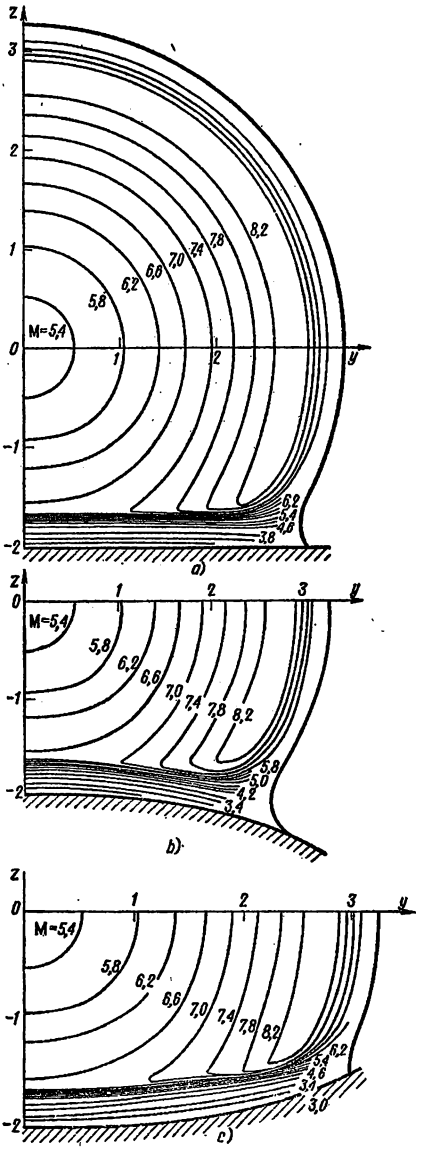


Fig. 53.10

présentées les lignes M = const (tous les $\Delta M = 0{,}4$) dans le plan de symétrie d'écoulement pour les plans de collision faisant un angle α avec l'axe des x, pour $M_0 = 3{,}4$, $\theta_0 = 5{,}75°$ et $Z = 2{,}6$. La fi-

gure 53.9,*a* correspond à $n = 22$ et $\alpha = 10°$ et la figure 53.9,*b* aux valeurs de $n = 100$ et de $\alpha = -10°$.

En terminant notre aperçu des résultats concernant l'interaction latérale des jets avec les parois solides, donnons quelques exemples de calcul de l'interaction avec les surfaces non planes. Sur la figure 53.10,*a*,*b*,*c* sont représentées les lignes M = const (tous les $\Delta M = 0{,}4$) dans le plan $x = 4$ pour trois surfaces pour $M_0 = 4{,}11$, $\theta_0 = 8{,}67°$, $n = 45$ et $Z = 2$. La figure 53.10,*a* correspond à un plan alors que les figures 53.10,*b*, *c* correspondent à des surfaces cylindriques dont les axes sont parallèles à l'axe des x. Les parties des jets correspondant à $z > 0$ ne sont pas visibles sur les figures 53.10,*b*, *c*, car elles sont identiques à celle représentée sur la figure 53.10,*a*. Comme on l'a déjà indiqué, une discussion plus ample des résultats concernant la confluence latérale des jets supersoniques et l'interaction des jets avec les obstacles se trouve dans les ouvrages [66], [67].

§ 54. Ecoulement autour des corps coniques

Emploi du processus d'établissement en variable r du système de coordonnées sphériques. Exemples du calcul de l'écoulement autour des cônes circulaire, elliptique et quasi pyramidal, des ailes delta et des ailes en V et d'un cône circulaire raccordé à l'aile delta.

Dans le présent paragraphe sont groupés les résultats du calcul de l'écoulement autour des corps coniques obtenus par l'application du schéma aux différences du § 26 aux écoulements supersoniques spatiaux et du processus d'établissement suivant la coordonnée radiale du système de coordonnées sphériques. La discussion de ces résultats semble être intéressante à plus d'un égard. En effet, les problèmes d'écoulement supersonique autour des corps coniques ont toujours attiré l'attention des aérodynamiciens aussi bien pour l'importance pratique que présentent un cône circulaire, une aile delta et autres configurations coniques que pour la possibilité de réduire certains problèmes spatiaux de départ à des problèmes bidimensionnels. Ces raisons ont incité à mettre au point des méthodes numériques efficaces et de très haute précision afin de résoudre un grand nombre de problèmes dont la variété pourrait à elle seule témoigner de l'importance et de l'actualité du sujet envisagé. Il serait intéressant pour un lecteur connaissant les méthodes et les solutions indiquées de faire une étude comparative des résultats obtenus par la méthode décrite dans cette monographie. Notons qu'une telle comparaison fournit des données supplémentaires permettant de juger de l'efficacité et de la précision de cette méthode en application au calcul de l'écoulement non seulement autour des corps coniques mais aussi autour des corps d'espace. Avant de passer à la discussion des résultats, il nous semble nécessaire de faire quelques remarques d'or-

dre général qui seraient utiles pour le plus vaste public qui n'a pas pris connaissance de la littérature correspondante.

En résolvant numériquement les problèmes de l'écoulement supersonique sur un corps conique différant du cône circulaire, en incidence non nulle, on a recours à deux approches. La première approche fait intervenir l'intégration des équations d'un écoulement conique qui sont établies compte tenu de l'indépendance des paramètres du flux par rapport à la coordonnée radiale comptée à partir du sommet du corps contourné. Cette dernière circonstance, en réduisant le nombre de variables indépendantes à deux, permet d'appliquer des méthodes très efficaces telles que la méthode des relations intégrales, la méthode des droites, la méthode des caractéristiques, etc. Il faut noter que les équations de l'écoulement conique dans la couche de choc comprise entre la surface du corps et l'onde de choc de tête sont du type elliptique (comme c'est le cas du cône circulaire en incidence relativement faible) ou du type mixte (elliptique-hyperbolique). Dans ce dernier cas, le domaine d'écoulement peut contenir non pas un mais plusieurs sous-domaines où les équations ont un caractère elliptique, la forme des frontières des différents sous-domaines n'étant pas connue au préalable. Bien plus, les sous-domaines d'hyperbolicité sont ordinairement fermés par des chocs de compression, ce qui, dans le cadre d'un problème bidimensionnel, complique considérablement l'application des méthodes précitées. Il en résulte que cette approche est d'usage répandu soit dans les cas où la couche de choc est notoirement dépourvue de chocs de compression internes, soit lorsqu'on calcule le flux non pas dans toute la couche de choc mais dans une partie de celle-ci. Ainsi, par exemple, dans [6] l'écoulement côté du vent autour des cônes en grande incidence est calculé par la méthode des droites alors que sur les côtés latéraux il l'est par la méthode des caractéristiques. Dans le domaine supérieur elliptique attenant au côté sous le vent du cône une telle approche ne permet pas de calculer l'écoulement.

Une autre approche que l'on applique de plus en plus souvent au calcul des écoulements coniques ne fait plus appel à l'intégration des équations bidimensionnelles mais à celle des équations tridimensionnelles et utilise aussi la méthode d'établissement suivant la troisième variable (coordonnée radiale ou temps). L'établissement suivant la coordonnée radiale proposé par Babenko K. et par Voskrésenski G. [3] a été développé ultérieurement dans plusieurs études (par exemple, dans [4], [84], [119], [136], [147]). Si la composante radiale de la vitesse du gaz (en coordonnées sphériques) dépasse la vitesse du son, situation habituelle dans la majorité des cas d'intérêt pratique, le système d'équations de l'écoulement spatial à utiliser dans le calcul est hyperbolique partout dans la couche de choc, ce qui, malgré l'accroissement de la dimension du problème, en simplifie sensiblement la résolution. L'établissement en temps opéré dans l'ouvrage

[8] aboutit aussi à une situation analogue. Les équations à intégrer dans ce dernier cas s'obtiennent soit par l'introduction formelle dans les équations de l'écoulement conique des dérivées des paramètres inconnus par rapport au temps, soit, tout aussi formellement, par l'élimination, entre les équations de l'écoulement spatial instationnaire, des dérivées par rapport à la coordonnée radiale du système de coordonnées sphériques, et de ce fait elles ne décrivent aucun flux réel instationnaire. Néanmoins, les distributions auxquelles aboutissent ces équations au cours de l'établissement satisfont aux équations de l'écoulement conique, le système correspondant étant hyperbolique quelle que soit la valeur de la composante radiale du vecteur vitesse du gaz.

Si le processus d'établissement met en jeu les schémas aux différences qui prévoient l'individualisation des diverses surfaces de discontinuité, alors la présence dans le flux de chocs internes de configurations assez compliquées constitue un obstacle difficile à surmonter lors de la construction des algorithmes numériques et, partant, lors de la composition et de la mise au point des programmes pour les ordinateurs. Pour y parer, en faisant le calcul de l'écoulement autour des corps coniques avec l'application du processus d'établissement, on a de plus en plus souvent recours aux schémas aux différences finies admettant le calcul shock-capturing qui, sans prévoir l'isolement préalable des surfaces de discontinuité, les donne au fur et à mesure sous forme de domaines de brusques variations de paramètres. Les résultats présentés plus bas obtenus à l'aide d'un schéma aux différences de ce même type (on a appliqué la variante du schéma aux différences finies en coordonnées sphériques décrit au § 26), combiné à l'établissement suivant la coordonnée radiale, illustrent de façon assez suggestive les possibilités de la seconde approche. Sans parler des détails secondaires exposés dans la première publication [62], notons que comme l'un des éléments du schéma appliqué est la résolution du problème de la confluence de deux flux uniformes supersoniques, son application s'accompagne de l'individualisation de l'onde de choc de tête sans qu'on introduise aucun algorithme auxiliaire. Cette particularité que l'on peut compter parmi les avantages du schéma a été utilisée dans tous les exemples calculés. L'efficacité du schéma est illustrée par les résultats du calcul de l'écoulement autour des cônes circulaire, elliptique et des cônes voisins du cône pyramidal, autour des ailes delta et des ailes en V ainsi qu'autour de la combinaison d'un cône circulaire avec une aile delta. Le nombre même des configurations calculées et le fait que la majorité des calculs était effectuée selon un programme unique sur un ordinateur du type M-220 (sans utiliser la mémoire périphérique) témoignent du caractère simple et universel de la méthode employée. Naturellement, cette méthode qui est précise au premier ordre, tout en ayant un nombre raisonnable de points de calcul, ne

prétend pas à une précision très élevée (une idée de la précision est donnée par la comparaison avec les résultats obtenus par différents auteurs). Tout en le cédant en précision aux méthodes de certains ouvrages elle permet en même temps d'obtenir une plus ample information sur l'écoulement aux cas où les méthodes plus précises cessent tout simplement de travailler comme c'est le cas de l'écoulement autour des corps en incidence relativement grande. Rappelons que c'est précisément par cette méthode qu'on a obtenu dans [62] un des premiers résultats sur l'écoulement sur le côté sous le vent des cônes dans la gamme d'incidences indiquée. Ses possibilités et sa simplicité relative se manifestent encore mieux dans le calcul des configurations spatiales (voir le paragraphe suivant). Par ailleurs, la précision insuffisante de la méthode (premier ordre d'approximation), comme celle de toute autre méthode de « shock-capturing », ne permet pas (pour un nombre raisonnable de mailles de calcul) d'explorer les détails de l'écoulement dans les couches entropiques minces ainsi qu'au voisinage des points singuliers pouvant parfois présenter un certain intérêt.

Voyons les exemples de calcul.

En envisageant l'écoulement autour d'un corps conique à l'angle d'attaque α nous supposons que le flux incident dont les paramètres seront affectés de l'indice 0 possède le vecteur vitesse contenu dans le plan x, y du système de coordonnées cartésiennes x, y, z. Attachons l'axe des x de ce système au corps en faisant coïncider cet axe avec un des axes caractéristiques de celui-ci (l'axe de symétrie, par exemple, etc.). Plaçons l'origine et le pôle du système sphérique r, θ, φ au sommet du corps, comptons l'angle θ par rapport à l'axe des x et l'angle φ par rapport au plan x, y de telle manière que $\varphi = 0$ corresponde au sens négatif et $\varphi = \pi$ au sens positif des rayons de l'axe des y. Les résultats sont représentés en variables « coniques » $\eta = y/x$ et $\zeta = -z/x$, et on utilise aussi une distance normalisée ξ par rapport au corps telle que $\xi = 0$ à la surface de celui-ci et $\xi = 1$ sur l'onde de choc.

Les figures 54.1,*a*, *b* à 54.3,*a* à *c* représentent un écoulement autour de cônes circulaires en incidence non nulle. Sur la figure 54.1,*a*, *b* sont donnés les résultats du calcul de l'écoulement supersonique à nombre de Mach $M_0 = 7$ autour d'un cône à demi-angle d'ouverture $\theta_k = 20°$ pour deux angles d'attaque : $\alpha = 15°$ et $\alpha = 30°$ respectivement. Sur les figures sont montrées, en variables η, ζ, la section droite du cône, l'onde de choc (ligne double) et les lignes iso-Mach à M_τ calculé suivant la composante du vecteur vitesse tangente à la sphère $r = \text{const}$. Les valeurs de M_τ sont figurées par les chiffres se trouvant près de certaines lignes $M_\tau = \text{const}$, les autres lignes iso-Mach à M_τ s'en déduisent par translation d'intervalle $\Delta M_\tau = 0{,}1$. On sait que le nombre de Mach M_τ définit le type du système d'équations de l'écoulement conique. Pour $M_\tau < 1$ ce système est elliptique,

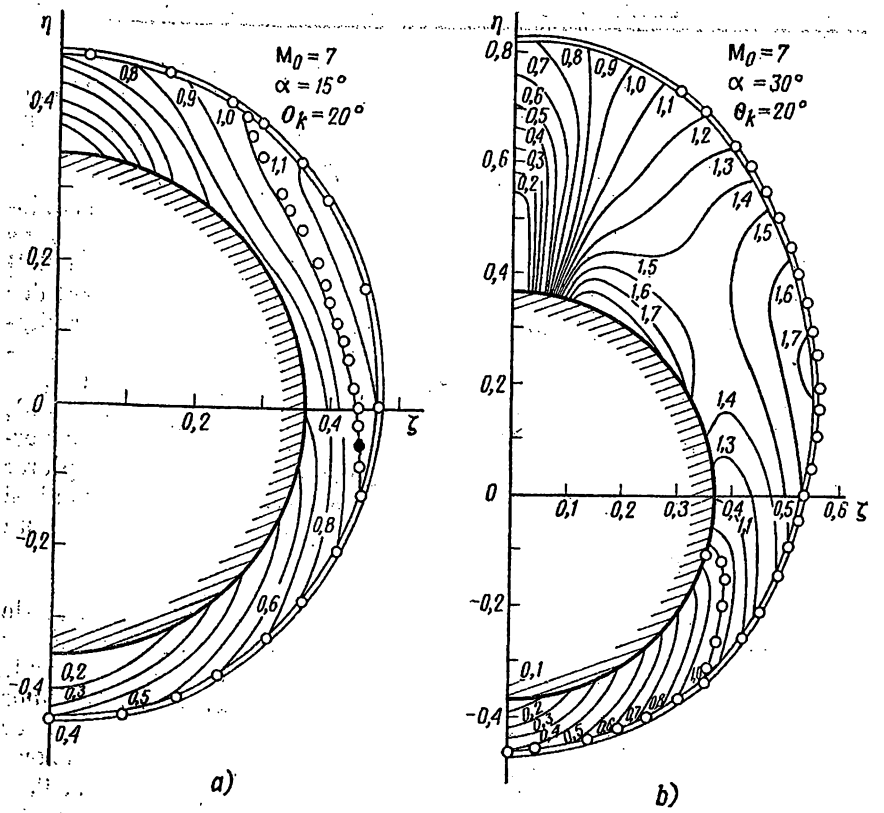


Fig. 54.1

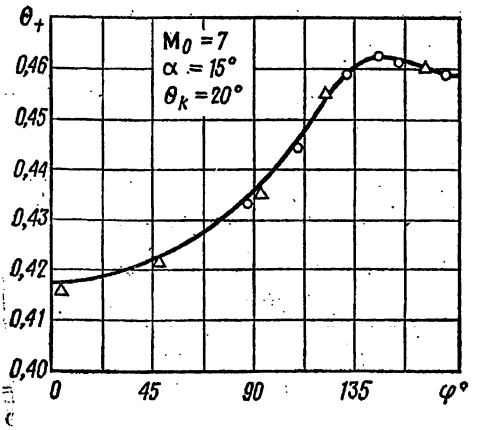


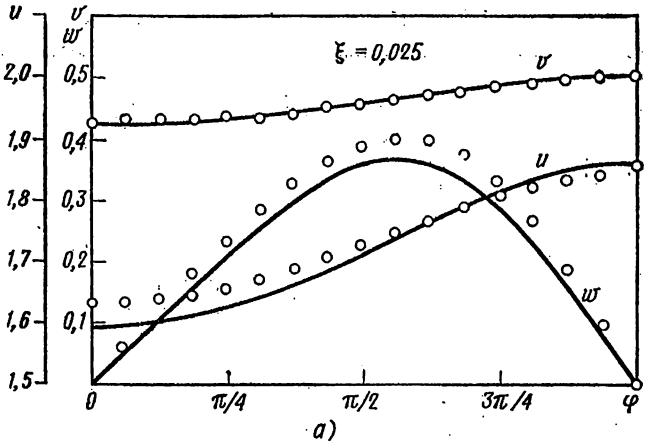
Fig. 54.2

pour $M_\tau > 1$ hyperbolique. En accord avec cela, dans le cas de la figure 54.1,*a*, le domaine elliptique occupe la plus grande partie de la couche de choc. A mesure que l'angle d'attaque s'accroît, le domaine d'hyperbolicité augmente et atteint la surface du cône (fig. 54.1,*b*) en séparant le domaine d'ellipticité en deux sous-domaines: inférieur et supérieur. Le sous-domaine elliptique inférieur est contigu au côté du vent du cône et possède une structure analogue à celle de la zone subsonique en amont du corps émoussé. La formation du sous-domaine elliptique supérieur est liée à la naissance, au voisinage du plan de symétrie, des ondes de choc internes traduites sur la figure par la concentration des lignes $M_\tau = \text{const}$.

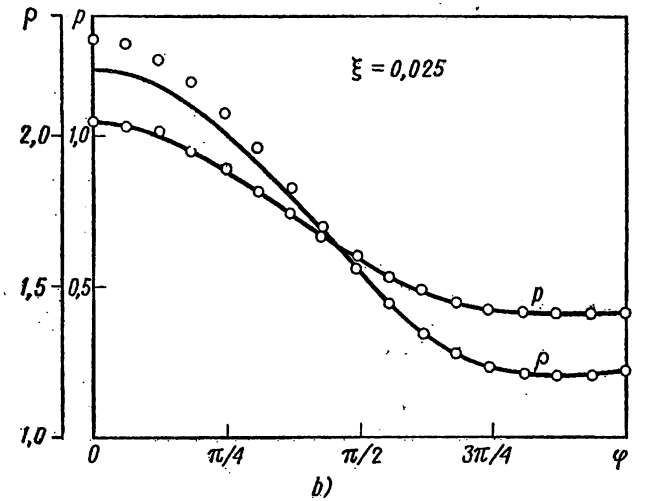
A titre de comparaison, on a représenté sur la figure 54.1,*a* par des ronds les points de l'onde de choc et les lignes $M_\tau = 1$, extraits de [4], et sur la figure 54.1,*b* les données analogues obtenues dans [6] (le domaine d'ellipticité supérieur n'était pas calculé dans [6]). Une étude comparative plus détaillée de la forme de l'onde de choc qui, en variables φ, θ, est traduite par la courbe $\theta = \theta_+ (\varphi)$ pour le cas de la figure 54.1,*a* est faite sur la figure 54.2 où les ronds figurent les résultats de l'ouvrage [4] et les triangles ceux de l'ouvrage [110]. Ici et plus loin, les lignes pleines ont été obtenues par l'application du schéma aux différences du présent livre, la densité et les composantes de la vitesse sont rapportées à ρ_* et à q_*, valeurs critiques de la densité et de la vitesse du flux incident et la pression à $\rho_* q_*^2$.

La comparaison avec les données de l'ouvrage [4] qui devraient de toute évidence tenir lieu d'étalon a été faite presque dans toute la gamme des paramètres étudiée dans [4]. Cette étude comparative a montré qu'on n'observe de différence sensible entre les fonctions autres que la pression que dans une couche entropique extrêmement mince au voisinage de la surface du cône pour $\xi < 0{,}025$. Dans le reste de la couche de choc on observe un accord plus que satisfaisant entre les résultats obtenus pour un même nombre de points de calcul. L'exemple type d'une étude comparative de ce genre ($\theta_k = 15°$, $M_0 = 3$, $\alpha = 10°$) est représenté sur la figure 54.3,*a*, 54.3,*b*, 54.3,*c*, où les ronds figurent les données de [4], u, v, w sont les projections du vecteur vitesse sur les axes r, θ, φ et $\xi = 0{,}025$ et $\xi = 0{,}975$ correspondent aux points de la couche de choc au voisinage de la surface du cône et au voisinage de l'onde de choc. L'accroissement de M_0 conduit à la diminution des erreurs de calcul (ce qui diffère des résultats de [4]), alors qu'avec la diminution de M_0 celles-ci augmentent légèrement sans sortir toutefois des limites admises dans la plupart des applications.

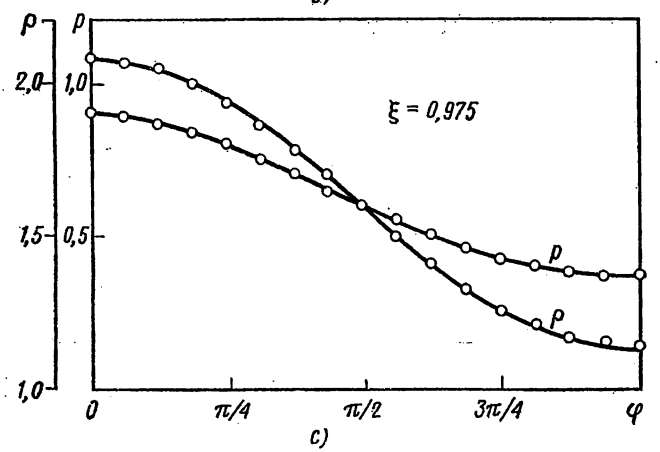
Sur la figure 54.4 relative à l'écoulement autour d'un cône circulaire sont données les répartitions de la pression sur la paroi pour $\theta_k = 10°$, $M_0 = 5$ et deux angles d'attaque. On voit que, pour $\alpha = 20°$, du côté sous le vent du cône (au voisinage de l'axe des η correspondant à $\varphi = \pi$) il y a des domaines étroits de brusque accrois-


u
v
w
ξ = 0,025
v
u
w
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
π/4
π/2
3π/4
φ

a)


ρ
p
ξ = 0,025
p
ρ
2,0
1,5
1,0
0,5
0
π/4
π/2
3π/4
φ

b)


ρ
p
ξ = 0,975
p
ρ
2,0
1,5
1,0
0,5
0
π/4
π/2
3π/4
φ

c)

Fig. 54.3

sement de p répondant aux chocs de compression qui représentent les limites supérieures du domaine d'hyperbolicité des équations de l'écoulement conique. Sur la même figure le trait interrompu représente la distribution de p obtenue pour $\alpha = 10°$ dans [136] pour un

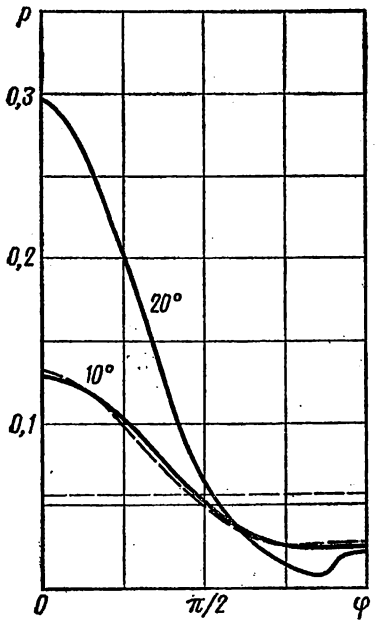


Fig. 54.4

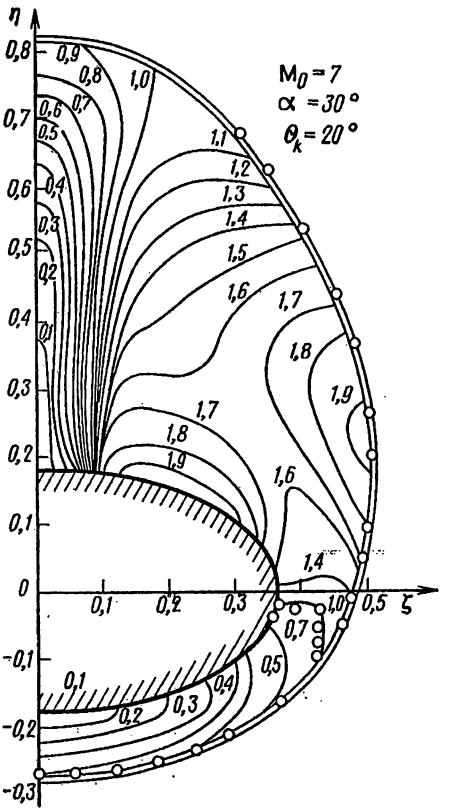


Fig. 54.5

nombre de points de calcul supérieur (une fois et demie), le pointillé celle de p pour $\alpha = 0$. En étudiant la figure 54.1, il faut tenir compte de la couche de tourbillons mince au voisinage de la surface du cône où l'on observe une brusque variation des paramètres du gaz autres que la pression. En conséquence, en accord avec ce qui a été dit précédemment, les lignes de type $M_\tau = \text{const}$, sur les figures correspondantes, au voisinage immédiat du corps donnent une distribution qui pourrait approcher la réalité de façon insuffisante.

Les deux figures suivantes sont relatives à l'écoulement autour d'un cône elliptique avec le rapport des demi-axes 2:1 et tel que pour

$\varphi = \pi/2$ (dans le sens du demi-grand axe) $\theta = 20°$. Sur la figure 54.5 sont représentées la section droite du cône, l'onde de choc de tête et les lignes $M_\tau = \text{const}$ dans le cas où $M_0 = 7$ et $\alpha = 30°$. Partout, sauf dans le voisinage de la ligne sonique inférieure ($M_\tau = 1$), les lignes iso-Mach M_τ sont construites avec l'intervalle $\Delta M_\tau = 0{,}1$.

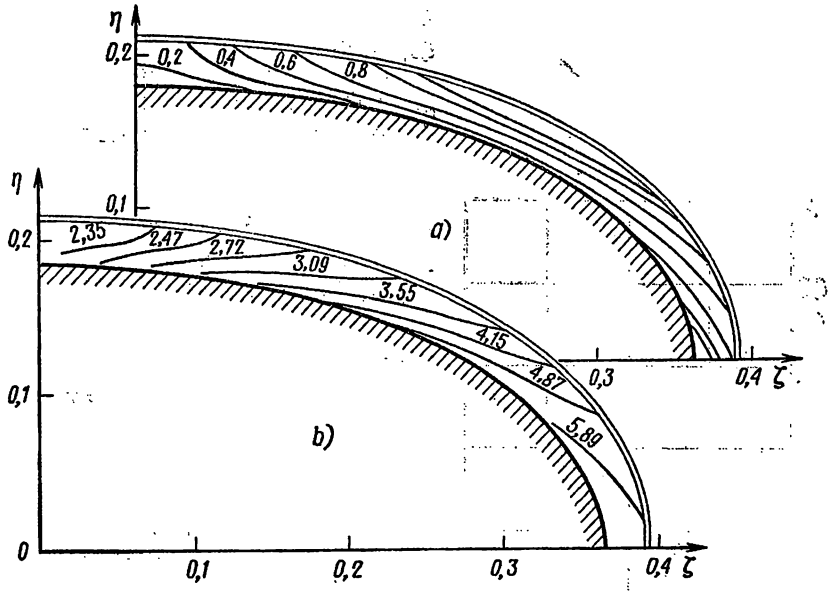


Fig. 54.6

Les ronds figurent les points de l'onde de choc et de la ligne sonique de [6]. On voit que le choc de compression interne qui naît sur le côté ombre du cône est plus fort dans ce cas que lors de l'écoulement autour du cône circulaire à une même incidence. Ce dernier effet est causé par la forte accélération du flux léchant la surface du cône de bas en haut dans le sens antihoraire.

Pour ce même cône elliptique l'image de l'écoulement présente un certain intérêt également pour $\alpha = 0$. Pour $M_0 = 25{,}3$ les résultats correspondants sont illustrés par la figure 54.6,*a* où sont représentées les lignes $M_\tau = \text{const}$ et par la figure 54.6,*b* qui donne les traces des surfaces de courant (les chiffres au-dessus des courbes sont les valeurs de $p/\rho^\varkappa$, ici et dans ce qui suit, dans le flux incident $p_0/\rho_0^\varkappa = 0{,}714$). On voit que dans un écoulement autour du cône elliptique sous incidence nulle les points de la surface situés sur l'axe η sont des points singuliers du type nœud (« points de Ferri ») et ceux situés sur l'axe ζ des points singuliers du type col.

Un autre écoulement encore plus intéressant est l'écoulement autour du cône voisin d'un cône pyramidal (fig. 54.7,*a*, *b*). Rapportée

aux variables η, ζ la surface d'un tel cône était donnée par l'équation $\eta^5 + \zeta^5 = \mathrm{tg}^5\, 20°$, d'où il découle notamment que le demi-angle à son sommet dans les plans x, y et x, z est égal à 20°. Ce cône (ainsi

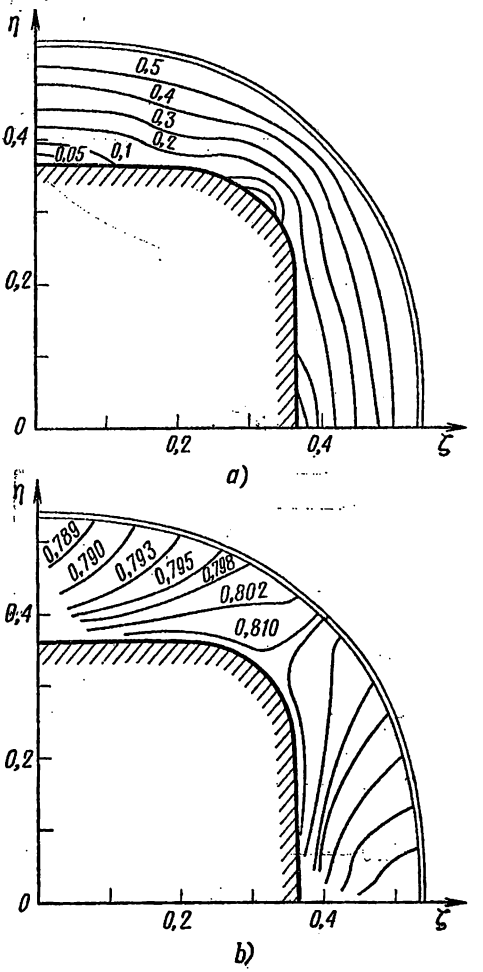


Fig. 54.7

que l'image d'écoulement pour $\alpha = 0$) possède quatre plans de symétrie, ce qui est également mis en évidence par la configuration des lignes $M_\tau = \text{const}$ et $p/\rho^\varkappa = \text{const}$. Sur la figure 54.7,*a*, *b* les courbes correspondantes et les sections transversales du corps et de l'onde de choc sont construites pour le cas $M_0 = 4$ et $\alpha = 0$.

Les figures 54.8 et 54.9 représentent les résultats du calcul de l'écoulement autour des ailes delta d'épaisseur nulle présentant des

bords de fuite supersoniques. Dans les cas étudiés l'extrados et l'intrados de l'aile sont contournés indépendamment, la couche de choc se formant en incidences positives au voisinage de l'intrados est limitée par le choc de pression de tête attaché aux bords d'attaque. Du côté de l'extrados chacun des bords d'attaque est contourné avec formation d'une détente oblique centrée de Prandtl-Mayer. L'onde

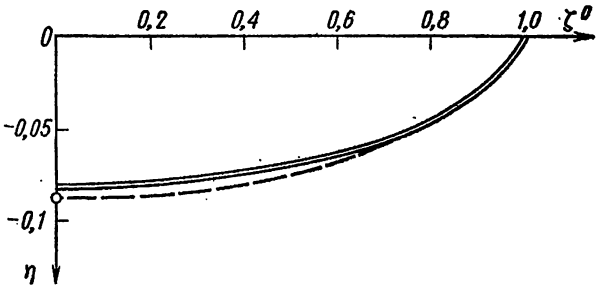


Fig. 54.8

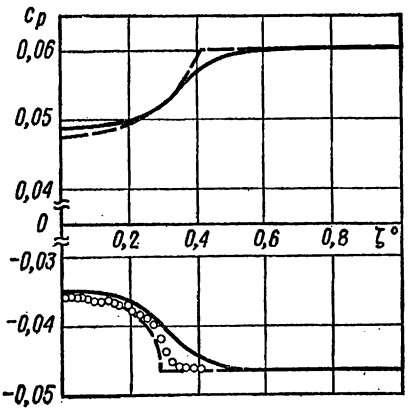


Fig. 54.9

de choc de tête se formant au voisinage de l'intrados de l'aile de flèche $\Lambda = 75°$ pour $M_0 = 6{,}8$ et $\alpha = 13°$ est visualisée sur la figure 54.8 par une ligne double (ζ^0 est la valeur de ζ rapportée à une valeur associée au bord d'attaque). Sur la même figure sont portées en trait interrompu et en cercles les données expérimentales [153] obtenues par les diverses méthodes.

La distribution du coefficient de pression $c_p \equiv 2\,(p - p_0)/\,(\rho_0 q_0^2)$ suivant l'envergure de l'aile delta dans le cas de $\Lambda = 45°$, $M_0 = 3$ et $\alpha = 4°$ est représentée sur la figure 54.9. A l'extrados (intrados) de l'aile correspondent, sur la figure, les courbes inférieures (supérieu-

res), en trait interrompu sont représentés, à titre comparatif, les résultats obtenus dans [119] par la méthode des caractéristiques, les cercles figurent les résultats du calcul fait dans [136]. Dans [119]

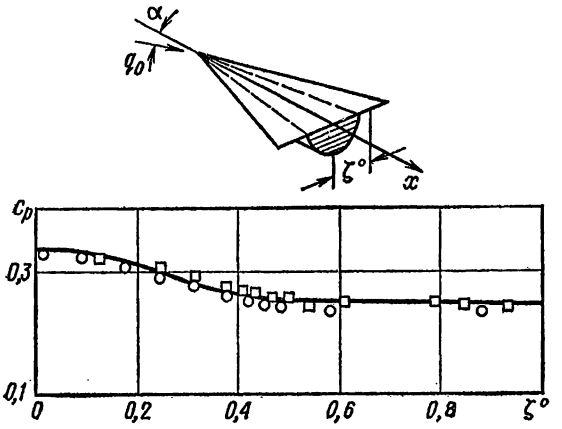


Fig. 54.10

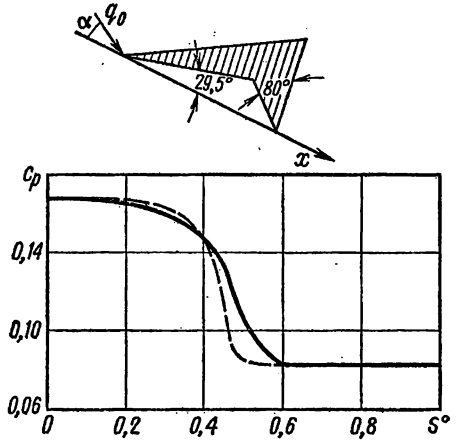


Fig. 54.11

et [136] on a également utilisé l'établissement en r. Le nombre de mailles de calcul dans [136] est de plus de 2,5 fois supérieur à celui utilisé pour l'obtention des courbes pleines.

La distribution de c_p le long de l'intrados de la combinaison aile delta à $\Lambda = 65°$-cône circulaire à $\theta_k = 12{,}5°$ pour $M_0 = 5{,}08$ et $\alpha = 11°$ est donnée sur la figure 54.10. Les cercles figurent les résultats de [136] obtenus avec le même nombre de points de calcul, les

carrés se réfèrent aux données expérimentales citées dans ce même ouvrage.

La dernière figure (fig. 54.11) se rapporte à l'aile en V dans une veine à $M_0 = 3{,}95$. L'angle formé par l'arête de l'aile et le vecteur vitesse de la veine incidente est l'angle d'attaque $\alpha = -10°$, la flèche de chaque moitié de l'aile $\Lambda = 60{,}5°$ et l'angle dièdre de V est 80°. La figure donne la distribution de c_p sur l'intrados de l'aile (S^0 est introduit par analogie avec ξ^0 et est compté à partir de l'arête jusqu'au bord de fuite). Le trait interrompu sur la figure 54.11 représente les résultats de l'ouvrage [84] dans lequel le calcul était fait sur un nombre de points de calcul beaucoup plus élevé (de quatre fois).

§ 55. Ecoulement supersonique autour des configurations spatiales pointues

Examen comparatif des corps spatiaux équivalents (au sens de la distribution de l'aire de la section droite). Ecoulement autour d'un corps de type aéronef

Il est tout naturel de concevoir que le schéma du § 26 peut s'appliquer au calcul de l'écoulement autour de tout corps spaial si le flux dans tout le domaine de calcul est « x-supersonique ». Pour l'illustrer voici quelques exemples de calcul de l'écoulement supersonique autour des corps spatiaux pointus.

Les premiers exemples concernent l'écoulement autour de trois corps spatiaux placés dans une veine supersonique uniforme à $M_0 = 5$. Les corps envisagés possèdent deux ou trois plans de symétrie dont la ligne d'intersection nous servira d'axe des x des coordonnées cylindriques x, r, φ l'origine se trouvant au point amont du corps.

Le flux incident est parallèle à l'axe des x. Chaque corps a une section droite de forme fixée: elliptique, avec le rapport des demi-axes $a/b = 2$, voisine d'un carré et d'un triangle (cf. [45]). La loi de variation en fonction de x de l'aire de la section droite des corps indiqués était supposée la même que celle du corps de révolution formé par un cône circulaire à demi-angle d'ouverture $\theta_k = 20°$ raccordé de façon régulière à une ogive pour $x = 0{,}1$ (la longueur unitaire est celle de l'ensemble du corps). Certains résultats du calcul sont représentés sur la figure 55.1,*a* à *c*, où p^0 est le rapport de la pression à la pression sur un corps de révolution « équivalent » (par l'aire de la section droite) pour le même x. La figure 55.1,*a* est relative au corps de section droite elliptique, la figure 55.1,*b* à celui de section quasi carrée et la figure 55.1,*c* de section voisine d'un triangle équilatéral. Les lignes en trait interrompu et en trait mixte traduisent, sur chaque figure, les distributions de p^0 suivant les génératrices des corps situées dans les plans de symétrie, ceux-ci passant par le grand et le petit axe (ou « demi-axe » pour le triangle) de la

section droite. Les lignes pleines y figurent les distributions suivant x des grandeurs correspondantes mises en moyenne sur φ. Fait intéressant : les coefficients de résistance d'onde des trois corps spatiaux

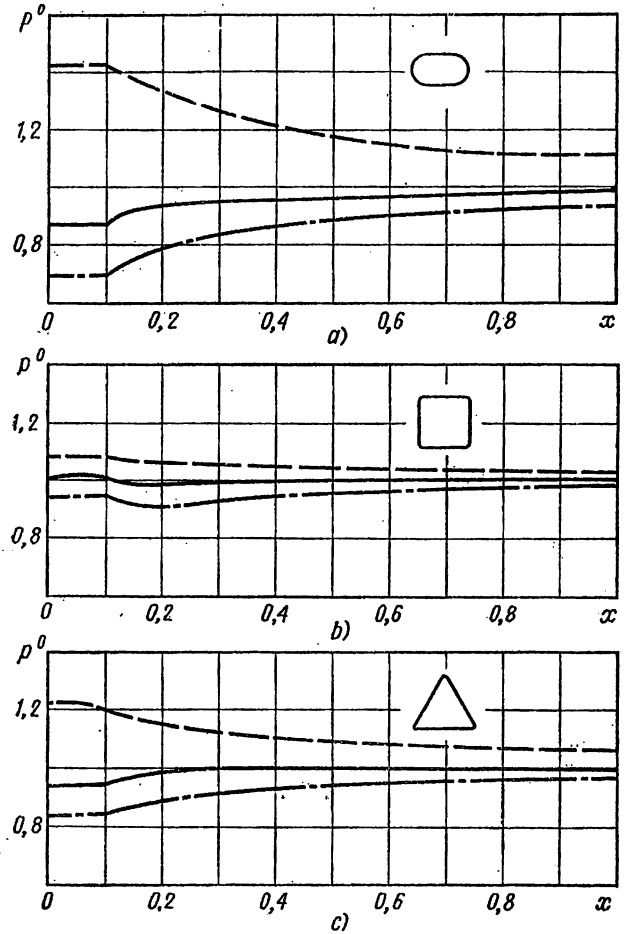


Fig. 55.1

et du corps de révolution sont très voisins entre eux.

L'exemple du calcul d'une configuration plus complexe (d'un corps de type aéronef de [68]) est représenté sur la figure 55.2. La configuration étudiée était placée dans une veine supersonique de $M_0 = 5$ à l'incidence $\alpha = 5°$. Sur la figure 55.2 sont montrées les intersections des surfaces du modèle et du choc de tête (celui-ci était isolé dans le calcul, i.e. n'était pas étalé), ainsi que des isobares

(surfaces $p/p_0 = \text{const}$) avec le plan de symétrie du corps ($y = 0$) et les plans $x = 0{,}2$; $0{,}6$; 1. En outre, on y voit la ligne d'intersection de la surface du corps avec le plan $z = 0$. Les chiffres à côté des isobares sont les valeurs de p/p_0.

Notons en conclusion de ce paragraphe que lors des calculs de l'écoulement autour des têtes des aéronefs mettant en œuvre le schéma aux différences du § 26 l'élément le plus difficile de l'étude (les programmes pour l'ordinateur étant mis au point) s'avère celui de l'introduction dans la machine des données requises sur la forme des surfaces léchées.

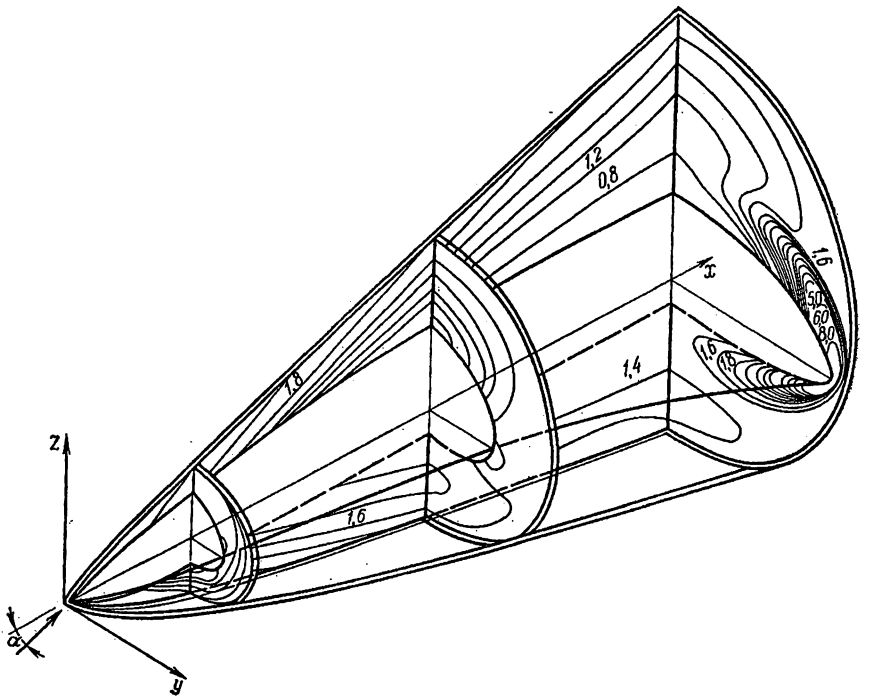


Fig. 55.2

CONCLUSION

Après avoir exposé les principes de la méthode nous avons illustré ses possibilités sur des exemples de calcul de divers problèmes. Il nous a semblé utile en conclusion de mettre en relief les questions générales qui se posent lors de la mise en œuvre de toute méthode moderne de résolution des problèmes de physique mathématique. Il convient de noter avant tout qu'il n'existe pas toujours pour les problèmes présentant un intérêt technique de formulation mathématiquement rigoureuse et de théorèmes d'existence et d'unicité associés. C'est précisément le cas de la plupart des problèmes d'aérodynamique dont la résolution a fait l'objet des derniers chapitres. C'est dire l'importance que revêt la question de la vraisemblance des résultats fournis par le calcul numérique. Malheureusement, on n'est pas encore en mesure d'y répondre par la recherche algorithmique de l'erreur. La voie la plus simple et, semble-t-il, la plus naturelle consistant à tester la convergence interne (en diminuant le pas du réseau aux différences) est pratiquement toujours inaccessible. La capacité limitée des ordinateurs modernes et la complexité extrême des problèmes d'intérêt pratique font que les calculs sont effectués dans la plupart des cas à la limite des possibilités de la technique de calcul. On est alors contraint, dans la pratique, d'utiliser diverses méthodes indirectes de contrôle de la qualité de calcul. Indiquons les suivantes.

Test de la méthode par comparaison des résultats du calcul avec les solutions exactes des problèmes connus ou sur les problèmes dont les solutions ne sont pas obligatoirement établies, mais dont on connaît certaines propriétés, celles de groupe, par exemple. Dans le cadre d'une méthode numérique, exécution des calculs d'un même problème sous diverses formulations. Avec l'ordinateur à capacité limitée ceci vise à l'augmentation de la précision du calcul des détails principaux de l'écoulement au risque de rendre plus grossiers les détails secondaires. Si, en plus, on n'a pas de données *a priori* sur la solution, il faudra procéder, au début, à un calcul grossier. Après en avoir tiré une information qualitative sur la solution il convient de l'analyser pour essayer de la mettre à profit dans les calculs à refaire.

C'est en accumulant graduellement l'information sur la solution et en basant sur les particularités de celle-ci le choix de la tactique de calcul qu'on pourrait espérer une réponse vraisemblable. Par ailleurs, le fait que différentes techniques de calcul conduisent à des résultats voisins témoigne de la stabilité certaine de ces derniers. Examen comparatif des résultats obtenus par des méthodes différentes. On conçoit qu'aucune argumentation mathématique n'est alors possible. Toutefois, en règle générale, la coïncidence des résultats porte à les admettre comme vrais. L'utilisation des données expérimentales pour la mise au point d'une technique fournit le critère le plus objectif de la qualité du calcul, qui permet aussi le contrôle de la concordance entre le phénomène et son image mathématique. Regrettons le fait que cette méthode d'estimation n'est pas toujours accessible à cause des limites des possibilités expérimentales.

On en déduit que les résultats de l'expérience numérique sont inévitablement marqués du caractère subjectif de l'approche. Le succès de l'opération dépend donc en grande partie de l'expérience et l'habilité du calculateur. Un calculateur qualifié doit également être un spécialiste initié au domaine de la science où il a à effectuer des calculs. La connaissance de l'objet des recherches permet souvent de distinguer un phénomène physique d'un phénomène dû au calcul. En outre, toute technique de calcul est à mettre au point sur des problèmes modèles nécessitant des connaissances sur les solutions beaucoup plus étendues que celles exigées par un problème réel. La formulation d'un problème modèle implique que l'on sache mettre en relief l'essence du phénomène au détriment de ses aspects secondaires.

Il est indéniable que la qualité des résultats obtenus dépend également de l'ordre d'approximation du schéma aux différences constituant la base de la technique numérique. La question du choix de l'ordre d'approximation optimal est loin d'être simple. En premier lieu, il doit être en accord avec la différentiabilité de la solution. Il serait vain d'appliquer un ordre d'approximation supérieur pour une solution qui n'est pas lisse à ce point. Signalons que les bons schémas du premier ordre et d'ordre supérieur étalent les ondes de choc pratiquement de la même façon. L'étalement des glissements (des discontinuités de contact, dans le cas instationnaire) est d'autant plus notable que plus l'ordre du schéma est bas, et cet étalement croît lors du déplacement le long de la discontinuité (ou de sa trajectoire) comme une certaine puissance de la distance (plus l'ordre du schéma est élevé, plus l'exposant est petit). C'est pourquoi, dans les cas où la structure de l'écoulement dépend fortement des glissements présents (ou apparaissant) dans le flux et difficiles à isoler, les schémas d'ordre plus élevé sont plus efficaces que ceux du premier ordre. Pour justifier l'application de ces schémas à ceux des problèmes où les glissements sont absents ou non essentiels il faut savoir dans quelle mesure celle-ci élève l'ordre de l'approximation des dif-

férences finies de l'ensemble du problème. Comme on le sait, cet ordre se définit non seulement par celui des équations différentielles de l'écoulement mais aussi par celui des conditions aux limites y compris les conditions sur les ondes de choc. On peut montrer que si dans la solution exacte les paramètres en amont ou en aval de l'onde de choc varient, l'erreur sur l'approximation des conditions sur les chocs est de l'ordre de $h \max |\operatorname{grad} \varphi|$, où φ est un paramètre quelconque de l'écoulement et h le pas du maillage aux différences. Soulignons qu'il ne s'agit pas ici de l'erreur sur la distribution des paramètres à l'intérieur de la zone « d'étalement », erreur qui est de l'ordre de l'unité pour tous les schémas de la méthode de « shock-capturing », mais uniquement des erreurs sur l'approximation des conditions aux limites conduisant à des erreurs de même ordre partout dans le domaine d'influence des discontinuités correspondantes. De sorte que la présence de fortes discontinuités abaisse (en méthode de « shock-capturing ») l'ordre d'approximation de l'ensemble du problème jusqu'au premier. Y font exception les problèmes automodèles pour lesquels $\operatorname{grad} \varphi \equiv 0$, de sorte que l'effet indiqué n'a pas lieu (notons que tous les exemples numériques illustrant les avantages des schémas d'ordre élevé de calcul des solutions discontinues se rapportent uniquement à ce genre de problèmes). En reportant ce qui a été dit aux solutions des équations de la dynamique des gaz dont la structure représente une succession de domaines où elles sont lisses séparés par les discontinuités, la construction des algorithmes de calcul d'un ordre d'approximation pas trop élevé mais individualisant le calcul des discontinuités essentielles aboutit en fait à une augmentation de précision plus sensible que n'en fournit l'utilisation, dans la méthode de « shock-capturing », des schémas d'un ordre d'approximation élevé.

Quelle que soit la méthode numérique à élaborer, on doit considérer comme l'un de facteurs importants l'estimation de la quantité de travail nécessitée par sa réalisation de programme. Si l'on tient compte des tendances du développement des ordinateurs modernes qui révèlent un progrès plus net dans la rapidité de fonctionnement et la capacité que dans l'automatisation de la programmation, il devient clair que dans le proche avenir on préférera évidemment les techniques de logique plus simple pour résoudre des problèmes pratiques assez complexes. Etant donné cette situation les schémas aux différences explicites semblent plus indiqués pour la résolution de ces problèmes. Pour éviter les malentendus, soulignons qu'en estimant les différentes méthodes et les schémas aux différences nous avons poursuivi un but bien précis: la résolution rapide des problèmes appliqués que pose constamment la pratique, décrits par les systèmes du type hyperbolique et caractérisés par un grand nombre de variables, par la complexité des domaines à calculer et la présence de surfaces de discontinuité (en premier lieu, d'ondes de choc).

Naturellement, pour d'autres objectifs on aura à recourir à des méthodes plus compliquées mais en même temps plus exactes.

Malgré le grand progrès qu'on observe dans les méthodes numériques et la technique de calcul (et même, peut-être, à cause de cela) la complexité des problèmes posés par la pratique est telle que leur résolution relève plutôt de l'art.

BIBLIOGRAPHIE

1. Аверенкова Г. Н., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г. и др., Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1, М., ВЦ МГУ, 1970.
2. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А., Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках, М., « Наука », 1970.
3. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа, ЖВМ и МФ, 1961, 1, № 6, 1051-1060.
4. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. М., Русанов В. В., Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом, М., « Наука », 1964.
5. Багриновский К. А., Годунов С. К., Разностные схемы для многомерных задач, ДАН СССР, 1957, 115, № 3, 431-433.
6. Базжин А. П., Трусова О. М., Челышева И. Ф., Расчет течений совершенного газа около эллиптических конусов при больших углах атаки. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа (МЖГ), 1968, № 4, 45-51.
7. Баталова М. В., Бахрах С. М., Загускин В. Л. и др., Комплекс « Сигма » для расчета задач двумерной газодинамики, Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости, Новосибирск, « Наука », 1969.
8. Бачманова М. С., Лапыгин В. И., Липницкий Ю. М., Исследование сверхзвукового обтекания круговых конусов на больших углах атаки, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, 79-84.
9. Белинский П. П., Годунов С. К., Иванов Ю. Б., Яненко И. К., Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами, ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 6, 1499-1511.
10. Белоцерковский О. М., Расчет обтекания кругового цилиндра, Сб. « Вычислительная математика », 1958, № 3, ВЦ АН СССР, 149-185.
11. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Нестационарный метод « крупных частиц » для газодинамических расчетов, ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 1, 182-207.
12. Благосклонов В. И., Иванов М. Я., Истечение в затопленное пространство сверхзвуковой веерной струи идеального газа с равномерным заданием параметров в начальном сечении, Уч. зап. ЦАГИ, 1974, 5, № 1, 91-96.
13. Благосклонов В. И., Хомутов В. А., Внезапное расширение сверхзвуковой струи в цилиндрическом канале, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 3, 18-24.
14. Богод А. Б., Замфорт Б. С., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Об использовании процесса установления по времени при решении

задач стационарного обтекания газом решеток профилей, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4, 118-124.
15. Борисов В. М., Михайлов И. Е., Об установившихся трехмерных безвихревых движениях газа со сверхзвуковой скоростью, ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 4, 1006-1015.
16. Васенин И. М., Рычков А. Д., Применение метода установления к решению одной внутренней задачи газовой динамики, Сб. « Аэродинамика », Труды первой сибирской конференции по аэродинамике, Новосибирск, « Наука », 1969, 196-199.
17. Васенин И. М., Рычков А. Д., Численный расчет осесимметричной сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа, Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5, 197-250.
18. Васенин И. М., Рычков А. Д., Численное решение задачи о смешанном осесимметричном течении газа в некоторых криволинейных областях методом установления, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, 155-159.
19. Васильев О. Ф., Годунов С. К., Киреева И. Л. и др., Численный метод расчета распространения волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке, ДАН СССР, 1963, 151, № 3, 525-527.
20. Ватажин А. Б., Распространение ударной волны в канале при взаимодействии сжатого в ней газа с неоднородным магнитным полем, ПММ, 1970, 34, вып. 4, 672-684.
21. Введенская Н. Д., Пример неединственности обобщенного решения квазилинейной системы уравнений, ДАН СССР, 1961, 136, № 3, 532-533.
22. Виноградов В. А., Захаров Н. Н., Иванов М. Я., К расчету торможения двумерного сверхзвукового потока невязкого газа в канале и возможность реализации такого течения, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 2, 161-166.
23. Волконская Т. Г., Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй, Сб. « Численные методы в газовой динамике ». Вып. II, ВЦ МГУ, 1963, 76-83.
24. Галин Г. Я., Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния, ДАН СССР, 1958, 119, № 6, 1106-1109.
25. Галин Г. Я., К теории ударных волн, ДАН СССР, 1959, 127, № 1, 55-58.
26. Гилинский С. М., Лебедев М. Г., Исследование обтекания плоских осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью, Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1, 17-23.
27. Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Софронов И. Д. и др., Основы методики « Медуза » численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики, Сб. « Численные методы механики сплошной среды », Новосибирск, 1972, 3, № 2, 18-55.
28. Годунов С. К., Разностный метод расчета ударных волн, УМН, 1957, 12, вып. 1, 176-177.
29. Годунов С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики, Матем. сб., 1959, 47, вып. 3, 271-306.
30. Годунов С. К., Интересный класс квазилинейных систем, ДАН СССР, 1961, 139, № 3, 521-523.
31. Годунов С. К., Проблемы обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике, УМН, 1962, 17, вып. 3 (105), 147-158.
32. Годунов С. К., Разностные методы решения уравнений газовой динамики, Лекции для студентов НГУ, Новосибирск, 1962.

33. Годунов С. К., Симметричная форма уравнений магнитной гидродинамики, Сб. « Численные методы механики сплошной среды », Новосибирск, 1972, 3, № 1, 26-34.
34. Годунов С. К., Забродин А. В., О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач, ЖВМ и МФ, 1962, 2, № 4, 706-708.
35. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П., Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной, ЖВМ и МФ, 1961, 1, № 6, 1020-1050.
36. Годунов С. К., Прокопов Г. П., О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток, ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 5, 1031-1059.
37. Годунов С. К., Прокопов Г. П., Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2, 429-440.
38. Годунов С. К., Семендяев К. А., Разностные методы численного решения задач газовой динамики, ЖВМ и МФ, 1962, 2, № 1, 3-14.
39. Гринь В. Т., Иванов М. Я., К исследованию нестационарного, течения в канале при внезапном изменении условий в выходном сечении, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4, 167-169.
40. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Князева Н. Н., Корзун А. П., Крайко А. Н., К исследованию динамики течения торможения сверхзвукового потока идеального газа в канале с продольными перегородками, Уч. зап. ЦАГИ, 1971, 2, № 4, 108-112.
41. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения, Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4, 23-32.
42. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале, ПММ, 1975, 39, вып. 3, 473-484.
43. Дворецкий В. М., К исследованию пространственных смешанных течений в соплах с несимметричным входом, Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2, 189-191.
44. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., К расчету смешанного течения в соплах с несимметричной дозвуковой частью, Уч. зап. ЦАГИ, 1974, 5, № 5, 39-45.
45. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н., О правиле « эквивалентности » для течений идеального газа, ПММ, 1974, 38, вып. 6, 1004-1014.
46. Дерибас А. А., Физика упрочнения и сварка взрывом, Новосибирск, « Наука », 1972.
47. Дубинская Н. В., Иванов М. Я., К расчету взаимодействия сверхзвуковой струи идеального газа с плоской преградой, перпендикулярной ее оси, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 5, 38-44.
48. Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В., О прямой задаче для сопла Лаваля, ДАН СССР, 1970, 191, № 2, 301-304.
49. Дьяченко В. Ф., О задаче Коши для квазилинейных систем, ДАН СССР, 1961, 136, № 1, 16-17.
50. Дьяченко В. Ф., О численном счете разрывных решений квазилинейных систем. ЖВМ и МФ, 1961, 1, № 6, 1127-1129.
51. Дьяченко В. Ф., Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными, ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 4, 680-688.
52. Загускин В. Л., Кондрашов В. Е., О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям, ДАН СССР, 1965, 163, № 5, 1107-1109.

53. Замтфорт Б. С., Иванов М. Я., Обтекание решетки симметричных профилей околозвуковым неизэнтропическим потоком, Уч. зап. ЦАГИ, 1972, 3, № 6, 107-111.
54. Иванов М. Я., Применение метода установления к анализу нерасчетных режимов течения в осесимметричных соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, 137-139.
55. Иванов М. Я., К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения, Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, 162-166.
56. Иванов М. Я., К решению двумерных и пространственных задач обтекания тел околозвуковым потоком, ЖВМ и МФ, 1975, 15, № 5, 1222-1240.
57. Иванов М. Я., Кимасов Ю. И., Численное решение прямой задачи определения осредненного осесимметричного потока идеального газа в ступени турбомашины, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 4, 12-20.
58. Иванов М. Я., Киреев В. И., К расчету распространения сверхзвуковой недорасширенной струи в затопленном пространстве при больших степенях нерасчетности, ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 3.
59. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, 77-83.
60. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Расчет смешанного течения газа в соплах, Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, 1969, т. 2, М., ВЦ АН СССР, 1971, 3-26.
61. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений, II, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 3, 805-813.
62. Иванов М. Я., Крайко А. Н., К расчету сверхзвукового обтекания конических тел, ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 6, 1557-1572.
63. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В., Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений, I, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 2, 441-463.
64. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Назаров В. П., Некоторые розультаты численного исследования перасчетных пространственных струй идеального газа, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4, 102-109.
65. Иванов М. Я., Лапюк А. Н., К расчету сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа при наличии в потоке диска Маха, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 4, 21-26.
66. Иванов М. Я., Назаров В. П., Исследование «бокового» взаимодействия сверхзвуковой нерасширенной струи идеального газа с поверхностями различной формы, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 3-8.
67. Иванов М. Я., Назаров В. П., Численное решение задачи о «боковом» взаимодействии нерасчетных сверхзвуковых струй идеального газа с плоскостью и друг с другом, ЖВМ и МФ, 1974, 14, № 1, 179-187.
68. Иванов М. Я., Никитина Т. В., К расчету пространственного обтекания сверхзвуковым потоком тел сложной формы, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 4, 7-13.
69. Иванов М. Я., Рылько О. А., Расчет трансзвукового течения в пространственных соплах, ЖВМ и МФ, 1972, 12, № 5, 1280-1291.
70. Иванов М. Я., Рылько О. А., К анализу трансзвукового течения в эллиптических соплах, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3, 161-163.
71. Исакова Н. П., Решение прямой задачи о смешанном течении проводящего газа в сопле Лаваля при наличии меридионального магнитного поля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, 14-20.

72. Исакова Н. П., Об образовании ударных волн при внезапном « включении » внешних воздействий, Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5, 136-144.
73. Исакович М. А., Общая акустика, М., « Наука », 1973.
74. Канель Я. И., О некоторых модельных системах уравнений газовой динамики, Диф. уравнения, 1965, V, вып. 5, 922-934.
75. Кацкова О. Н., Чушкин П. И., Пространственные сверхзвуковые течения газа с неравновесными процессами, ЖВМ и МФ, 1968, 8, № 6, 1049-1062.
76. Киреев В. И., Лифшиц Ю. Б., Михайлов Ю. Я., О решении прямой задачи сопла Лаваля, Уч. зап. ЦАГИ, 1970, 1, № 1, 8-13.
77. Колган В. П., Фонарев А. С., Установление обтекания при падении ударной волны на цилиндр и сферу, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5, 97-103.
78. Копченов В. И., Крайко А. Н., Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лаваля, Научные труды НИИ механики МГУ, 1974, вып. 32, 96-108.
79. Коробейников В. П., Чушкин П. И., Шуршалов Л. В., О зоне наземных разрушений при воздушном взрыве крупного метеорита, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3, 94-100.
80. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., « Наука », 1965.
81. Крайко А. Н., Осипов А. А., Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лаваля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1, 84-93.
82. Крайко А. Н., Тагиров Р. К., К околозвуковому обтеканию тел вращения с протоком при наличии истекающей из протока струи, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 73-80.
83. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., « Наука », 1973.
84. Лапыгин В. И., Расчет сверхзвукового обтекания V-образных крыльев методом установления, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3, 180-185.
85. Лобанов В. Ф., Численное моделирование течения при сжатии цилиндрических образцов скользящей детонационной волной, ЖПМТФ, 1975, № 5(93), 145-149.
86. Любимов А. Н., Русанов В. В., Течения газа около тупых тел, М., « Наука », 1970.
87. Магомедов К. М., Сеточно-характеристический метод для численного решения задач газовой динамики, Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, Новосибирск, 1968, 1, М., ВЦ АН СССР, 1971, 328-356.
88. Огнева В. В., Метод « прогонки » для решения разностных уравнений, ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 4, 803-812.
89. Подлубный В. В., Фонарев А. С., Отражение сферической волны от плоской поверхности, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, 66-72.
90. Прокопов Г. П., Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений, Препринт ИПМ АН СССР, 1970, № 45.
91. Прокопов Г. П., О расчете разностных сеток, близких к ортогональным, в областях с криволинейными границами, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 17.
92. Прокопов Г. П., Степанова М. В., Расчет осесимметричного взаимодействия ударной волны с затупленным телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 72.

93. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, М., « Наука », 1968.
94. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
95. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., « Наука », 1971.
96. Самарский А. А., Попов Ю. П., Разностные схемы газовой динамики, М., « Наука», 1975.
97. Славянов Н. Н., Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля, Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6, 85-92.
98. Степанов Г. Ю., Гидродинамика решеток турбомашин, М., Физматгиз, 1962.
99. Тагиров Р. К., Расчет обтекания кормовых частей тел вращения дозвуковым и трансзвуковым потоком, Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6, 162-168.
100. Тагиров Р. К., Трансзвуковое обтекание тела вращения при истечении реактивной струи из его кормовой части, Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2, 97-104.
101. Тагиров Р. К., Усовершенствование метода расчета трансзвукового обтекания тел вращения, Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 6, 1-11.
102. Федоренко Р. П., Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений, УМН, 1973, 28, вып. 2 (170), 121-182.
103. Фонарев А. С., Расчет дифракции ударной волны на профиле с последующим установлением стационарного сверхзвукового и трансзвукового обтекания, Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4, 34-40.
104. Фонарев А. С., Расчет обтекания осесимметричных тел и несущих крыловых профилей трансзвуковым потоком газа, Уч. зап. ЦАГИ, 1973, 4, № 3, 1-10.
105. Харкевич А. А., Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы. Избранные труды в 3 томах, М., « Наука », 1973.
106. Чебан В. Г., Навал И. К., Керчман В. И., Руссу И. В., Об одном численном методе решения связанной задачи термоупругости, Труды III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, « Наука », 1974.
107. Чебан В. Г., Руссу И. В., Численное решение осесимметричной задачи о распространении упругих волн в цилиндре конечной длины, Труды III Всесоюзной конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, « Наука», 1974.
108. Черный Г. Г., Левин В. А., Медведев С. А. и др. Некоторые задачи газовой динамики, связанные с распространением детонационных волн, горением в сверхзвуковых потоках и генерацией лазерного излучения, Отчет № 1488, Институт механики МГУ, 1974.
109. Численное исследование современных задач газовой динамики, под ред. О. М. Белоцерковского, М., « Наука », ВЦ АН СССР, 1974.
110. Чушкин П. И., Обтекание конуса со сверхзвуковой скоростью под углом атаки, Сборник теоретических работ по гидромеханике, М., ВЦ АН СССР, 1970, 30-53.
111. Шугрин С. М., О неоднородных разностных схемах, ЖВМ и МФ, 1966, 6, № 1, 184-185.
112. Шуршалов Л. В., Численное исследование задачи о взрыве цилиндрического заряда конечной длины, ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 4, 971-983.
113. Яненко Н. Н., Фролов В. Д., Неуважаев В. Е., О применении метода расщепления для численного расчета движений теплопроводного газа в криволинейных координатах, Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1967, № 8, вып. 2, 1-30.

114. Alder B., Fernbach S., a.o. Methods in computational physics. Vol. 3 Fundamental methods in hydrodynamics, New York, 1964.
115. Amsden A. A., Hirt C. W., A simple scheme for generating general curvilinear grids. J. Comp. Phys., 1973, 11, № 3, 348-359.
116. Barfield W. D., Numerical method for generating orthogonal curvilinear meshes. J. Comp. Phys., 1970, 5, № 1, 23-33.
117. Barfield W. D., An optimal mesh generator for Lagrangian hydrodynamic calculations in two space dimensions, J. Comp. Phys., 1970, 6, № 1, 417.
118. Barth W., Martin R. S., Wilkinson J. H., Calculation of the eigenvalues of a summetric tridiagonal matrix by the method bisection, Numer. Math., 1967, 9, № 5, 386-393.
119. Beeman E. R., Powers S. A., A method for determining the complete flow field around conical wings at supersonic hypersonic speeds, AIAA Paper № 69-646, 1969 (русский перевод: «Экспресс-информация», Астронавтика и ракетодинамика, ВИНИТИ, 1970, № 6, 1-14.
120. Bohachevsky I. O., Rubin E. L., Mates R. E., A direct method for computation of nonequilibrium flows with detached shock waves, AIAA Paper № 65-24, 1965.
121. Bowley W. W., Prince S. F., Finite element analysis of general fluid flow problem, AIAA Paper № 71-602, 1971.
122. Brown E. F., Ozcan H. M., A time-dependent solution of mixed flow through convergent nozzles, AIAA Paper № 72-680, 1972.
123. Chu C. W., Niemann A. E., Powers S. A., Calculation of multiple rocket engine exhaust plumes by the method of characteristics. Part I, AIAA Paper № 66-651, 1966.
124. Cline M. C., Computation of steady nozzle flow by a time-dependent method, AIAA Journal, 1974, 12, № 4, 419-420.
125. Gole I. A., Solomon G. E., Willmarth W. W., Transonic flow past simple bodies, IAS, 1953, 20, № 9, 627-634 (русский перевод: сб. «Механика», 1954, № 6, 56-68).
126. Crocco L., Cheng S., Theorie of combustion instability in liquid propellant rocket motors, Butterworth, 1956.
127. D'Attorre L., Nowak G., Thommen H. V., An inviscid analysis of the plume created by multiple rocket engines and a comparison with available schlieren data. Part II: A finite difference method, AIAA Paper № 66-651, 1966, 26-44.
128. Friedrichs K. O., Symmetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 1954, 7, № 2, 345-392.
129. Friedrichs K. O., Lax P. D., Systems of conservation equations with a convex extension, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, 68, № 8, 1686-1688.
130. Godounov S., Equations de la physique mathématique, Ed. Mir, 1973.
131. Godounov S., Sur la construction des réseaux dans les domaines compliqués d'une façon automatique pour les équations aux différences finies, Actes Congress intern. math., 1970, 3, 99-104.
132. Godunov S. K., Deribas A. A., Zabrodin A. V., Kozin N. S., Hydrodynamic effects in colliding solids, J. Comp. Phys., 1970, 5, № 3, 517-539.
133. Godounov S., Riabenki V., Schémas aux différences, Ed. Mir, 1977.
134. Gopalakrishnan S., Bozzola R., Numerical technique for the calculation of transonic flow in turbomachinery, Paper ASME № 71-GT-42, 1971.
135. Gopalakrishnan S., Bozzola R., Computation of shocked flow in compressor cascades, Paper ASME № 72-GT-31, 1972.

136. Kutler P., Lomax H., Shock-capturing, finite-difference approach to supersonic flows, Journal Spacecraft and Rockets, 1971, 8, N 12, 1175-1182.
137. Landau L., Lifchitz E., Electrodynamique des milieux continus, Ed. Mir, 1969.
138. Lax P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, Comm. Pure Appl. Math., 1954, 7, № 1, 159-193.
139. Lax P. D., Wendroff B., Sistems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., 1960, 13, № 2, 217-237.
140. Leer van B., Stabilization of difference scheme for the equations of inviscid compressible flow by artificial diffusion, J. Comp. Phys., 1969, 3, № 4, 473-485.
141. Love E. S. and other, Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jet, NASA Technical Report R-6, 1959.
142. Magnus R., Yoshihara H., Inviscid transonic flow over airfoils, AIAA Paper № 70-47, 1970.
143. Masson B. S., Taylor T. D., Foster R. M., Application of Godunov's method to blunt-body calculation, AIAA Journal, vol. 7, Apr. 1969, p. 694-698.
144. Mays R. A., Inlet dynamics and compressor surge, AIAA Paper № 69-484, 1969.
145. McDonald P. W., The computation of transonic flow, Paper ASME № 71-GT-89, 1971.
146. Migdal D., Klein K., Moretti G., Time-dependent calculations for transonic nozzle flow, AIAA Journal, 1969, 7, № 2, 372-374.
147. Moretti G., Inviscid flowfield about a pointed cone at an angle of attack, AIAA Journal, 1967, 5, № 4, 789-791.
148. Neumann J., Richtmyer R., A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, J. Appl. Phys., 1950, 21, № 3, 232-237.
149. Noh W. F., CEL: A time-dependent, two-space-dimentional, coupled Eulerian-Lagrange code. In: Methods in computational physics, Ed. by Berni Alder, Sidney Fernbach, Manuel Rotenberg. Vol. 3, Fundamental methods in hydrodynamics, New York, 1964.
150. Potter D. E., Tuttle G. H., The construction of discrete orthogonal coordinates, J. Comp. Phys., 1973, 13, № 4, 483-501.
151. Rakich S. V., Kutler P., Comparison of characteristics and shock-capturing methods with application to the space shuttle vehicle, AIAA Paper № 72-191, 1972.
152. Ranson V. H., Thompson H. D., Hoffman I. D., Three-dimensional supersonic nozzle flowfield calculations, Journal Spacecraft and Rockets, 1970, 7, № 4, 458-462.
153. Rao D. M., Delta wing shock shape at hypersonic speed, AIAA Journal, 1971, 9, № 10, 2093-2094.
154. Richtmyer R. D., Morton K. W., Difference methods for initial-value problems, New York a.o, Interscience publ., 1967.
155. Rizzi A. W., Inouye M., A time-split finite volume technique for three-dimensional blunt-body flow, AIAA Paper № 73-133, 1973.
156. Sedov L., Two-dimensional problems in hydrodynamics, Wiley, 1952.
157. Serra R. A., Determination of internal gas flows by a transient numerical technique, AIAA Journal, 1972, 10, № 5, 603-610.
158. Steinolfson R. S., Shock formation by a moving force field, AIAA Journal, 1973, 11, 8, 1201-1203.
159. Stivers L. S., Effect of subsonic Mach number on the forces and pressure distributions on four NACA 64A-Series airfoil sections at angles of attack as high as 28°, NACA TN 3162, 1954.

160. Taylor T. D., Masson B. S., Supersonic flow past blunt bodies with large surface injection. Propulsion reentry physics. Ed. Lunc. M. Pergamon Press, PWW-Polish scientific publishers, 1970, p. 399-411, 9 fig., XIXth International Astronautical congress, New York, 1968, Proceedings 31.
161. Taylor T. D., Masson B. S., Application of the unsteady numerical method of Godunov to computation of supersonic flow past bell chaped bodies, J. Comp. Phys., 1970, 5, № 3, 443-454.
162. Wehofer S., Moger W. C., Transonic flow in conical convergent and convergent-divergent nozzles with non-uniform inlet conditions, AIAA Paper № 70-635, 1970.
163. Weyl H., Shock waves in arbitrary fluids, Comm. Pure Appl. Math., 1949, 2, № 2-3, 103-122.
164. Winslow A. M., Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh, U. Comp. Phys., 1966, 1, № 2, 149-172.

INDEX

Acoustique, équations d' 19
Action du jet sur une paroi 337, 377
Adaptabilité de l'algorithme 285
Adiabatique d'HUGONIOT 112, 155
Aéronef 397
Ailes delta 393
Algorithmes de construction des maillages 240 à 249
Analyse de la stabilité par méthode de FOURIER 31, 68, 69, 94, 95, 201
— — en normes énergétiques 32 à 34, 64 à 67, 136
Approximation « quasi unidimensionnelle » 127
— du schéma pour l'acoustique 31
— — pour la dynamique des gaz unidimensionnelle 138

Balayage 99
— matriciel 99
BETHE-WEYL, conditions de 109

Calcul du choc de compression oblique 158
— de l'écoulement autour des corps 340, 384, 396
— des écoulements mixtes 322
— — spatiaux 206
— — supersoniques 145, 206
— d'un écoulement rotationnel 326
— aux frontières du domaine 151, 156
— des jets 334, 355
— — spatiaux 367
— — à symétrie axiale 334, 358
— de l'onde de détente centrée 160
— de la tuyère de LAVAL 323, 348
— — supersonique 161
Caractéristiques des équations d'acoustique 21
Coefficient de réserve 137
Condition(s) de BETHE-WEYL 108, 109
— de constance de l'enthalpie totale 146
— aux discontinuités 106, 107, 175
— aux limites 128 à 133, 170
— — dissipatives 47, 75, 76
— de stabilité pour un réseau parallélogrammatique 69, 87, 88
— — pour un schéma explicite 73, 82, 83
— — — implicite 94 à 96, 103
Cône 384, 387
Cône-cylindre 340
Confluence des jets 375
COURANT, nombre de 32
Critère de stabilité du schéma pour la dynamique dez gaz bidimensionnelle 201 à 205
— — — — — unidimensionnelle 136, 137
— — — pour les écoulements spatiaux instationnaires 215
— — — — stationnaires supersoniques 152, 212
Cylindre circulaire 340

Dérivée matérielle 178
Diffraction d'une onde de choc 290
Disque de MACH 334, 356
Dynamique des écoulements instationnaires 302

Ecoulement(s) autour des ailes delta 393
— autour du bout 341

Ecoulement(s) autour du cône 341, 348
— autour des configurations pointues 396
— — spatiales 396
— autour des corps coniques 384
— — à symétrie axiale 346
— autour du cylindre 340
— dans la grille 329
— dans la manche d'entrée d'air 305
— plans 355
— autour des profils 341
— — plans 340
— spatial autour des corps 346
— supersoniques 145
— — bidimensionnels 145
— — stationnaires 145, 355
— dans un tube à choc 303
— dans la tuyère avec corps central 326
— — de LAVAL 310
— — — à symétrie axiale 161
— unidimensionnels 229
Effet aux différences à la frontière 52 à 55
Enthalpie 145
— totale 145
Entrée d'air 306, 356, 361
Entropie 105, 113
Equation(s) d'acoustique 19
— pour la construction des maillages 233 à 240
— de continuité 174
— de la dynamique des gaz en coordonnées curvilignes 221
— — — pour les écoulements supersoniques stationnaires 145
— — — sous forme intégrale 223
— — —multidimensionnelle 175 à 177
— — — unidimensionnelle 104
— de l'énergie 146, 174
— d'état 104, 105
Explosion d'une charge non sphérique 297
— sphérique 294

Flux supersoniques confluents 152

Gaz conducteur 313
— — dans une tuyère 328
— parfait 355
Grilles planes 329

HUGONIOT, adiabatique d' 112, 155
Hyperbolicité d'un système d'équations 70, 71, 77

Idéalisation du problème de l'explosion 297
Indice de l'adiabatique 105
Influence de la forme de la charge 302
Intégrale de l'énergie pour le système symétrique 71
Interaction entre le jet et la paroi 377
Invariants de RIEMANN 21, 112

Jets annulaires 358
— en éventail 361
— sous-détendus 163, 356, 370
— spatiaux 367
— surdétendus 334, 337
— à symétrie axiale 163

Largeur de la zone d'étalement 39
LAX-WENDROFF, schéma de 43
Loi(s) de conservation pour la dynamique des gaz multidimensionnelle 173 à 175
— — — — unidimensionnelle 125, 126
— — pour un écoulement supersonique 146
— — — à symétrie axiale 147
— — de l'énergie des ondes acoustiques 20
— — intégrales 146 à 148
— de répartition des points 183

MACH, nombre de 153
Maillages curvilignes 331, 332
— flottants 181
Méthode d'établissement 322
Modèle linéarisé pour la gazodynamique bidimensionnelle 200
— — — unidimensionnelle 133, 134
Monotonie du schéma 40 à 42

Niveau 218
Nombre de COURANT 32
— de MACH 153

Onde de choc secondaire 302
Ordre d'approximation 400

Paramètre d'interaction magnéto-hydrodynamique 314, 328
Particularités de la méthode des différences finies 288
Principes de la mise en œuvre de la méthode des différences finies 285
Problème(s) de décomposition d'une discontinuité pour l'acoustique 23
— — — dans la dynamique des gaz 110
— de deux flux confluents 152
— direct de la tuyère de LAVAL 323, 348
— instationnaires de la dynamique des gaz 290
Processus dynamiques dans les canaux 304
Profil 344
Propagation d'une onde de choc 313

Reconstitution de la courbe 229 à 231
Réflexion du choc 334
— irrégulière 334
— de MACH 296
— des ondes planes 310

Schéma(s) de confluence de deux flux 153
— de la décomposition de discontinuité 111
— aux différences finies pour l'acoustique 26
— — — — bidimensionnelle 61, 62
— — — pour la dynamique des gaz unidimensionnelle 122
— — implicite 91
Schéma(s) aux différences implicite pour les problèmes quasi linéaires 164
— pour écoulements spatiaux instationnaires 212
— — — stationnaires 206
Soudage par explosion 317
Structure du problème 217
Symétrisation d'un système d'équations 78, 165
Système(s) d'équations de la dynamique des gaz multidimensionnelle 176 à 178
— — — — unidimensionnelle 104
— — hyperboliques symétriques 179 à 181
— — de la théorie linéaire de l'élasticité 89, 90

Tactique d'isolement des singularités 286
TCHAPLYGUINE-JOUKOVSKI, condition de 329
Tuyère elliptique 365
— de LAVAL 323, 365
— — plane 326
— — spatiale 348
— spatiale 365
— « superelliptique » 367
— — avec corps central 326

Viscosité aux différences 39, 139
Vitesse(s) massiques 112, 113
— du son 112, 113

Zone d'étalement 39

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S

Imprimé en Union Soviétique